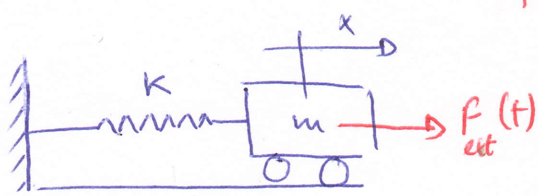
3- Vibration forcées non amortie d'un système à 1 ddl.

- Vibration des systèmes conservatif soumis à une excitation harmonique



$F_{ext}(t)$: force extérieures (N)

- On dit que $F_{ext}(t)$ est Harmonique, si l'équation $F(t)$ est sous la forme sinusoïdale :

$$F_{ext}(t) = P_0 \sin \Omega t$$

Où P_0 : Amplitude de la force excitatrice.

Ω : pulsation " " " "

- l'équation du mvt de système est sous la forme :

$$\boxed{m\ddot{x} + Kx = F_{ext}(t) = P_0 \sin \Omega t}$$

La solution de cette équation est sous la forme :

$$\boxed{x(t) = x_H + x_p}$$

Où : • x_H : solution Harmonique (Homgène) d'un système libre non amortie $(m\ddot{x} + Kx = 0)$

$$\boxed{x_H = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t}$$

A, B sont déterminer à partir des conditions initiales $(x(t=0), \dot{x}(t=0))$

Donc x_H est une solution transitoire

- x_p : solution particulière dépend directement de la force excitatrice

Si $F(t) = 0 \longrightarrow x_p = 0$, $F(t)$ dépend de la pulsation Ω de la force excitatrice, x_p ne dépend pas aux condititions initialiales (sol permanante)

où : $\boxed{x_p = G \sin \Omega t}$

G est déterminé à partir de l'équation de mvt :

$x_p = G \sin \Omega t$, $\dot{x}_p = G\Omega \cos \Omega t$, $\ddot{x}_p = -G\Omega^2 \sin \Omega t$

On remplace x_p, $\ddot{x}_p$ a l'équation de mvt :

$$-m\Omega^2 G \sin \Omega t + K G \sin \Omega t = P_0 \sin \Omega t$$

On divise sur "$\sin \Omega t$" :

$$-m\Omega^2 G + K G = P_0$$

On divise sur "K"

$$-\frac{m}{K}\Omega^2 G + G = \frac{P_0}{K} \Rightarrow -\frac{1}{\omega_0^2}\Omega^2 G + G = \frac{P_0}{K}$$

$$G\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{P_0}{K}$$

$$\boxed{G = \frac{P_0}{K}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = \frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}}$$

où $\boxed{\beta = \frac{\Omega}{\omega_0}} = \frac{\text{pulsation de la force excitatrice}}{\text{pulsation propre de système}}$

β : est le rapport des pulsations (fréquençes)

Donc $\boxed{x_p = \frac{P_0}{K}\,\frac{1}{1-\beta^2}\,\sin \Omega t}$

et $\boxed{x(t) = x_H + x_p = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{P_0}{K}\,\frac{1}{1-\beta^2}\,\sin\Omega t}$

- Système initialement au repos : $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = 0$

∘ $x(t=0) = 0$, $A\cancel{\cos 0}^{1} + \cancel{B\sin 0}^{0} + \cancel{\frac{P_0}{K}\,\frac{1}{1-\beta^2}\sin 0}^{0} = 0$

Donc $\boxed{A = 0}$

∘ $\dot{x}(t=0) = 0$, $\cancel{-\omega_0 A\sin 0}^{0} + B\omega_0\cancel{\cos 0}^{1} + \Omega\cdot\frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cancel{\cos 0}^{1} = 0$

$$-B\cdot\omega_0 = \frac{P_0}{K}\cdot\frac{\Omega}{1-\beta^2} \Rightarrow B = -\frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cdot\frac{\Omega}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{B = -\frac{P_0}{K}\cdot\frac{\beta}{1-\beta^2}}$$

Donc pour un système initialement au repos :

$$\boxed{\begin{aligned} x_H &= -\frac{P_0}{K}\cdot\frac{\beta}{1-\beta^2}\sin\omega_0 t \\ x_p &= \frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\sin\Omega t \end{aligned}}$$

$x_H \rightarrow$ solution transitoire

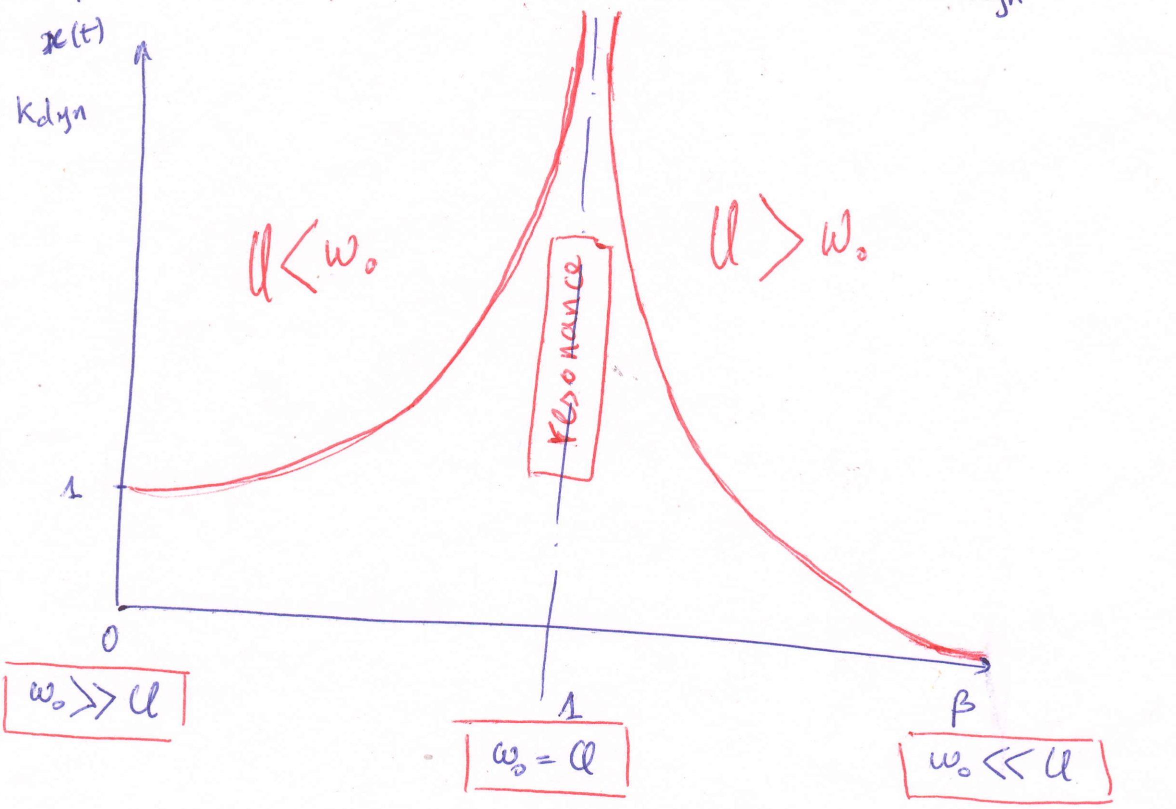
$x_p \rightarrow$ solution permanante

$$\boxed{x(t) = \frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\left(-\beta\sin\omega_0 t + \sin\Omega t\right)}$$

$\dfrac{1}{1-\beta^2}$ c'est le facteur d'amplification dynamique K_{dyn}

$$\boxed{K_{dyn} = \left|\frac{1}{1-\beta^2}\right|} = \left|\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}\right|$$

- si $\beta = \infty$ $(\omega_0 = \Omega) \rightarrow x(t) \rightarrow \infty \rightarrow K_{dyn} \rightarrow \infty$



- $\beta = 1 \rightarrow$ si $1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 0 \rightarrow \Omega \ll \omega_0$
- $\beta \rightarrow 0 \rightarrow$ si $1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow \infty \rightarrow \Omega \gg \omega_0$

$\frac{P_0}{k}$, On l'appelle deplacement statique produit sous l'effet de la force P_0 appliqué "statiquement" : $\boxed{x_{st} = \frac{P_0}{k}}$

* Facteur de réponse

$$\boxed{R(t) = \frac{\text{réponse dynamique du système}}{\text{deplacement statique}} = \frac{x(t)}{P_0/k}}$$

$$R(t) = \frac{\frac{\cancel{P_0}}{\cancel{k}} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \Omega t - \beta \sin \omega_0 t)}{\cancel{P_0/k}}$$

$$\boxed{R(t) = \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \Omega t - \beta \sin \omega_0 t)}$$ ... syst initialement au repos

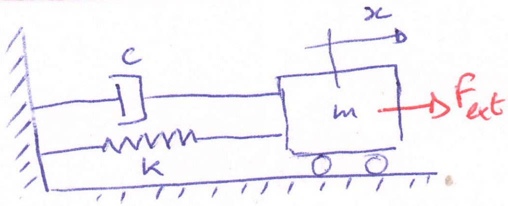
* Relation entre K_{dyn} et déplacement statique :

$$\boxed{K_{dyn} = \left| \frac{\text{Amplitude de la réponse permanente du syst}}{\text{déplacement statique}} \right|} = \left| \frac{P_0/k \cdot 1/1-\beta^2}{P_0/k} \right|$$

$$\boxed{K_{dyn} = \left| \frac{1}{1-\beta^2} \right|}$$

4- Vibrations forcées amorties d'un système à 1 ddl :

- Vibrations des systèmes amortis soumis à une excitation harmonique :



Soit le système masse-ressort-Amortisseur soumis à une force F_{ext}. Où :

$F_{ext}(t) = P_0 \sin \Omega t$ (forme sinusoïdale)

Donc l'éq du mvt de ce système est sous la forme :

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P_0 \sin \Omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{P_0}{m}\sin \Omega t$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\alpha\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_0}{m}\sin \Omega t}$$ ... Eq du mvt

la solution de cette équation est sous la forme :

$x(t) = x_H + x_p$

x_H : solution Homogène

x_p : solution particulière

x_H : est la solution d'un système libre amortie (deuxième partie de l'équation du mvt égale à zero) :

on à 3 cas pour un système libre amortie :

1ère cas : $\alpha < 1 \rightarrow C < C_c$: faible amortissement $\rightarrow$ 2 solutions complexes

2ème cas : $\alpha = 1 \rightarrow C = C_c$: Amortissement critique $\rightarrow$ 1 solution double

3ème cas : $\alpha > 1 \rightarrow C > C_c$: Amortissement super-critique $\rightarrow$ 2 solutions réelles

cas évitée

pour le premier cas (Amortissement faible), la solution homogène x_H est sous la forme :

$$x_H = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

Ou r_1 et r_2 : sont des solutions complexes (Voir TD2)

$$x_H = a e^{-\alpha\omega_0 t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

$$\boxed{x_H = e^{-\alpha\omega_0 t}(A\cos\omega_a t + B\sin\omega_a t)}$$

$\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\alpha^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, A, B sont déterminé à partir des C.I (Voir TD2)

Donc x_H c'est une solution transitoire (dépend des C.I $x(t=0)$, $\dot{x}(t=0)$).

- la solution particulière x_p est donné sous la forme :

$$\boxed{x_p = G_1 \sin \Omega t + G_2 \cos \Omega t}$$

x_p dépend des paramètre de la force excitatrice (Ω, P_0), donc x_p est une solution permanante.

G_1, G_2 sont déterminés à partir de l'équation du mvt :

$$\begin{cases} x_p = G_1 \sin \Omega t + G_2 \cos \Omega t \\ \dot{x}_p = G_1 \Omega \cos \Omega t - G_2 \Omega \sin \Omega t \\ \ddot{x}_p = - G_1 \Omega^2 \sin \Omega t - G_2 \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases}$$

On remplace x_p, $\dot{x}_p$, $\ddot{x}_p$ à l'équation de mvt, On trouve :

$$\boxed{\begin{cases} G_1 = \dfrac{P_0}{K} \dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} \\ G_2 = \dfrac{P_0}{K} \dfrac{-2\alpha\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} \end{cases}} \qquad \beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\boxed{x_p = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} \left((1-\beta^2) \sin \Omega t - 2\alpha\beta \cos \Omega t \right)}$$

$$\boxed{x(t) = x_H + x_p = \underbrace{e^{-\alpha\omega_0 t} (A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t)}_{x_H} + \underbrace{\frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} \left[(1-\beta^2) \sin \Omega t - 2\alpha\beta \cos \Omega t \right]}_{x_p}}$$

On peut la écrire sous la forme :

Premièrement on a : $\begin{cases} A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t = a \sin(\omega_a + \phi) \rightsquigarrow x_H \\ G_1 \sin \Omega t + G_2 \cos \Omega t = d \sin(\Omega t + \theta) \rightsquigarrow x_p \end{cases}$

tel que : $\begin{cases} a = \sqrt{A^2 + B^2} & : \text{Amplitude de la réponse trasitoire} \\ tg\,\phi = \dfrac{A}{B} & : \text{phase de la R.t} \\ d = \sqrt{G_1^2 + G_2^2} & : \text{Amplitude de la réponse permanante} \\ tg\,\theta = \dfrac{G_2}{G_1} & : \text{phase de la R.P} \end{cases}$

Donc on peut $x(t)$ sous la forme

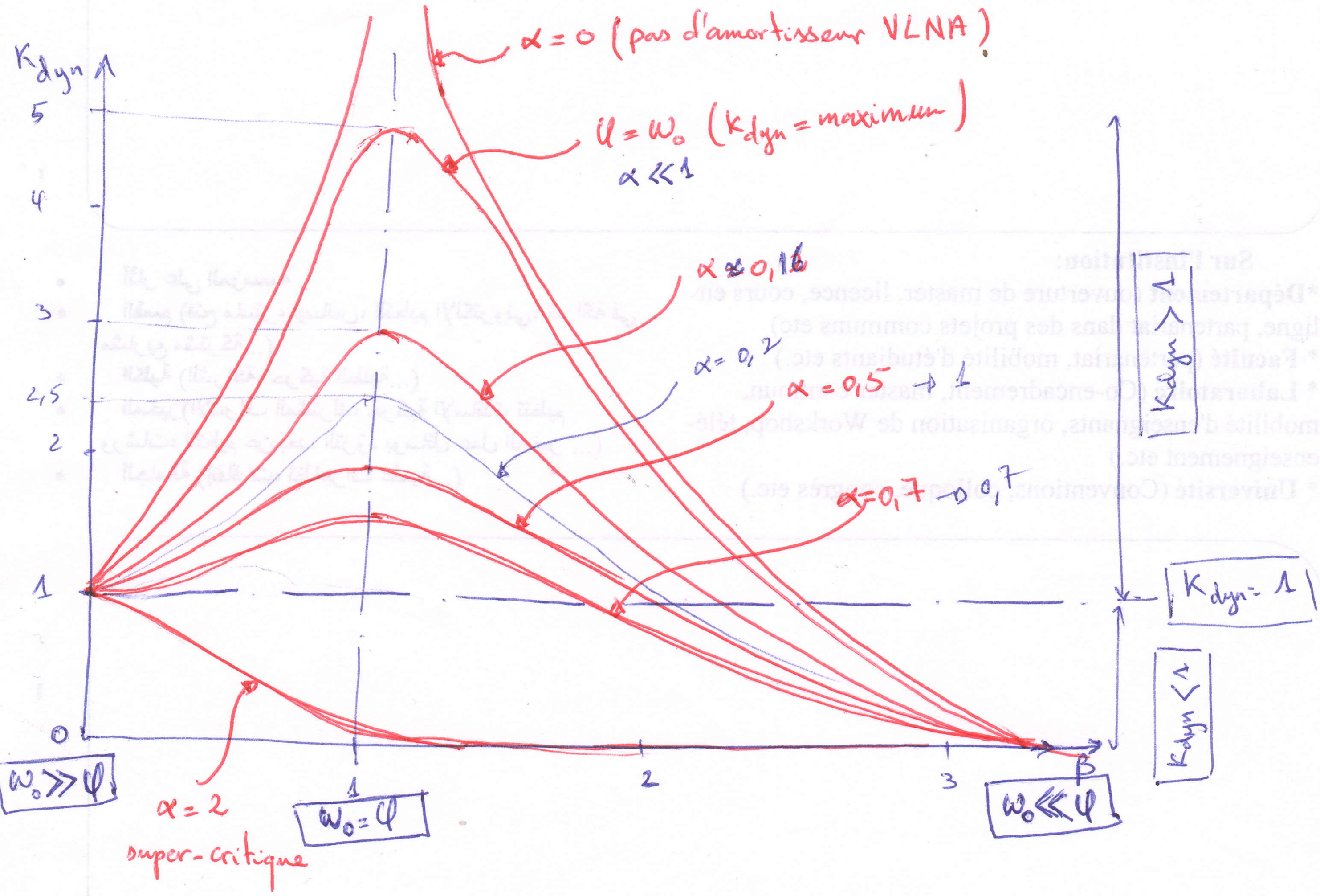
$$\boxed{x(t) = \underbrace{a e^{-\alpha w_0 t} \sin(w_a t + \psi)}_{x_H} + \underbrace{d \sin(\psi t + \theta)}_{x_p}}$$

$$\begin{cases} d = \dfrac{P_0/K}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\alpha\beta)^2}} \\[2ex] tg\,\theta = \dfrac{G_c}{G_1} = -\dfrac{2\alpha\beta}{1-\beta^2} \end{cases}$$

* **Facteur d'amplification dynamique :**

$$K_{dyn} = \left| \frac{\text{Amplitude de la réponse permanante}}{\text{déplacement statique}} \right| = \left| \frac{d}{P_0/K} \right|$$

$$\boxed{K_{dyn} = \left| \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\alpha\beta)^2}} \right|} \quad , \quad K_{dyn} = f(\beta, \alpha)$$



* **Facteur de Réponse**

$$\boxed{R(t) = \frac{\text{Réponse dynamique du système}}{\text{deplacement statique}}} = \frac{a e^{-\alpha w_0 t} \sin(w_a t + \psi) + d \sin(\psi t + \theta)}{P_0/K}$$