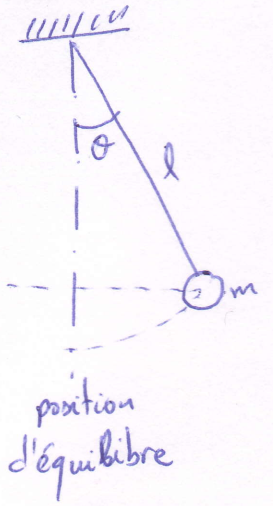
Module : Ondes et Vibrations — Enseignant : Fellah Ahmed

Chapitre 01 Introduction aux équation de Lagrange

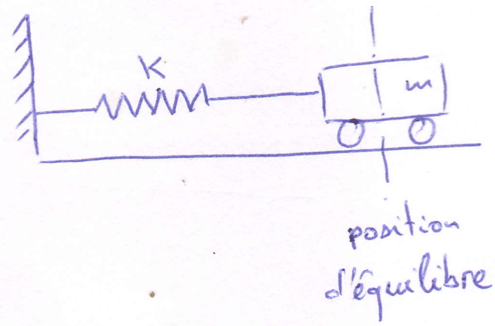
mvt de vibration : mvt d'un corps qui se déplace alternativement de part à autre par rapport à une position d'équilibre dans un intervalle du temps T (période)

Exemple

pendule simple



masse-ressort



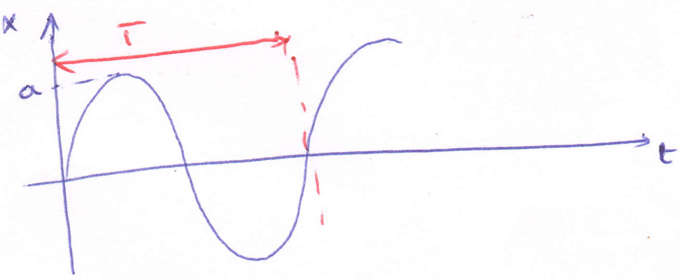
La période T a une relation avec la fréquence du mvt, tel que :

$T = \frac{1}{f}$ avec $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ω : pulsation (rd/s)

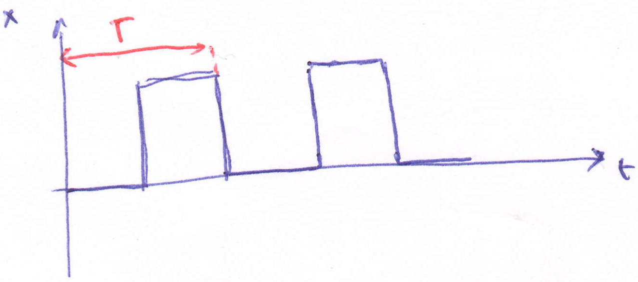
donc $T = \frac{1}{\omega/2\pi} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{[rd]}{[rd/s]} = [s]$

- mvt Harmonique (Courbe sous forme sinusoïdale)

$x(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$



- mvt périodique



Equation du mouvement :

- Le mvt de vibration est caractérisé par l'équation du mvt (éq différentielle) donné par :

$$\boxed{m\ddot{q} + c\dot{q} + Kq = F_{ext}(t)}$$

q : les coordonnées généralisé (nbre de degré de liberté "d")

tel que : $d = N - r$

N : ~~nbre~~ translations et rotations trouvant dans le système
r : relation entre ces translations et rotation (nbre de liaison)

$\dot{q}$: vitesse (m/s), $\ddot{q}$: accélération (m/s^2)

m : masse (Kg)
c : l'amortissement (N.s/m)
K : régidité (N/m)
F : Forces exterieures (N).

- On peut déterminer l'équation du mvt par plusieurs méthods, ~~on peut~~ comme :
  - principe d'Alembert ($2^{ème}$ loi de Newton).
  - " des travaux virtuels.
  - principe d'Hamilton.
  - Equation de lagrange.

Equation de Lagrange :

- **Système conservatif** : ou l'energie total du système reste constante

$\left(\frac{dE_t}{dt} = 0\right.$ avec $\left. E_t = T + V = E_{cinétique} + E_{potentielle}\right)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

q : coordonnées généralisé (déplacement, rotation)

L : lagrangien $L = T - V$

T : Energie cinétique
- → Translation : $T_{trans} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $\dot{x}$ = vitesse linéaire
- → Rotation : $T_{rotation} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$, $\dot{\theta}$: vitesse angulaire

J : moment d'inertie $[Kg.m^2]$

V : Energie potentielle
- → Elastique : $V = \frac{1}{2} K x^2$
- → Pésanteur : $V = mg.h$

• **Système non-conservatif** : On a une perte de l'énergie total $\left(\frac{dE_t}{dt} \neq 0\right)$.

l'equation de lagrange est donnée par :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{ext} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}}$$

F_{ext} : forces exterieures (N)

D : fonction de dissipation → Forces de dissipation

$$D = \frac{1}{2} c \dot{q}^2$$

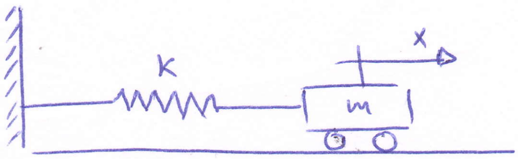
Chapitre 02 : Vibration d'un système à 1 ddl

1- Vibration libre d'un système à 1 ddl non amortis :

$$\begin{cases} \text{libre} \rightarrow F_{ext} = 0 \\ \text{Non amortis} \rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{(pas d'amortisseur)} \end{cases}$$

Exemple - système masse-ressort
- pendule simple.

Système masse-ressort



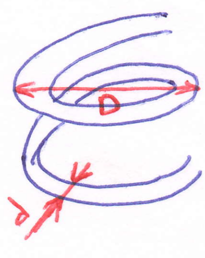
Eq de lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ ou $q = x$ (coordonné généralisé)

Calcul de lagrangien $L = T - V$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ V = \frac{1}{2} K x^2 \end{cases}$$

$\left(k = \frac{G.d^4}{8 n D^3}\right.$ ressort hélicoïdaux (à boudin) $\left.\right)$

$$\begin{cases} G : \text{module de Coulomb} \\ n : \text{nbre de spires} \\ d : \text{diametre} \\ D : \text{''} \quad \text{du spire} \end{cases}$$



Donc :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \cancelto{cte}{\frac{1}{2} k x^2} \right) = m \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\cancelto{cte}{\frac{1}{2} m \dot{x}^2} - \frac{1}{2} k x^2 \right) = -kx$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - (-kx) = m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \longrightarrow \text{Eq de mvt d'un système masse-ressort}$$

En divisant sur m :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

tel que ω_0 : c'est la pulsation propre d'un système masse-ressort

et $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

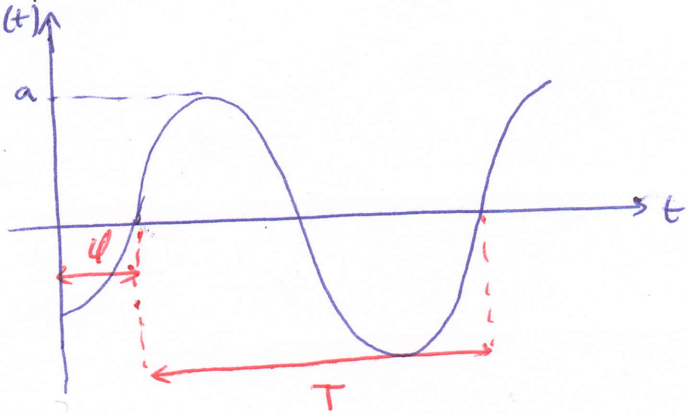
On a : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Donc $\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$

* La solution de l'équation du mvt d'un système libre nonamortis à 1ddl est donné sous la forme :

$$\boxed{x(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi) = A \sin \omega t + B \sin \omega t}$$

tel que
- a : l'amplitude de mvt $\quad a = \sqrt{A^2 + B^2}$
- ω_0 : pulsation propre $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- φ : Phase $\quad tg\,\varphi = \frac{A}{B}$



* A et B sont déterminer à partir des conditions initiales du mvt déplacement initial $(x(t=0))$, et vitesse initial $(\dot{x}(t=0))$
* Par exemple, si le syst à démaré à partir de la position d'équilibre (au repos) on à : $x(t=0)=0$, $\dot{x}(t=0)=0$

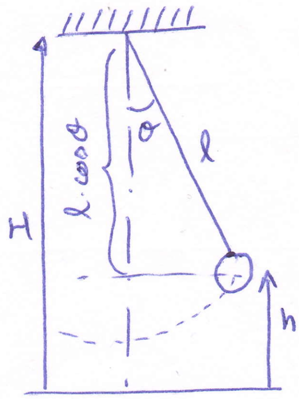
Si on a une déformation du ressort (déplacement statique), on trouve :

$$x(t=0)=x_0 \quad , \quad \dot{x}(t=0)=0$$

Pendule simple :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

$q=\theta$, $\dot{q}=\dot{\theta}$ (mvt de rotation)



∘ Calcul de lagrangien $L=T-V$

- Energie Cinétique : $\boxed{T=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2}$ $(J=ml^2)$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m.l^2.\dot{\theta}^2}$$

- Energie potentielle (pésanteur) : $\boxed{V=m.g.h}$

{ h : hauteur à l'état de mvt [m]
g : gravité [m/s²] }

avec $h=H-l\cos\theta$

Donc $\boxed{V=mgH-mgl\cos\theta}$

$$L=T-V=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgH+mgl\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta}=-mgl\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m l^2 \ddot\theta + m g l \sin\theta = 0$$

Dans le cas de petite oscillation $\theta \simeq 0 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

Donc l'eq de mvt d'un pendule simple est donné par

$$\boxed{m l^2 \ddot\theta + m g l \theta = 0}$$

En divisant par $m l^2$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$: pulsation propre.

et $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

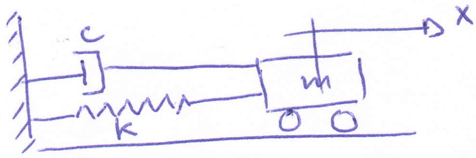
2- Vibration Libre Amortis d'un système à 1 ddl

$F_{ext} = 0$

$\frac{\partial D}{\partial \dot q} \neq 0$, $\cancel{\frac{\partial D}{\partial q}}$ $D = \frac{1}{2} c \dot q^2$

Système masse-ressort-Amortisseur

Eq de lagrange :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot x + k x$$

$$-\frac{\partial D}{\partial \dot q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot x} = -c\dot x$$

$m\ddot x + k x = -c\dot x \Rightarrow \boxed{m\ddot x + c\dot x + k x = 0}$ Eq du mvt

en divisant par m : $\boxed{\ddot x + \frac{c}{m}\dot x + \frac{k}{m} = 0}$

. la solution de l'eq de mvt est donné sous la forme $\boxed{x = Ae^{rt}}$

Donc $\dot{x} = Are^{rt}$ et $\ddot{x} = Ar^2e^{rt}$

Remplaçant $x, \dot{x}, \ddot{x}$ à l'eq de mvt :

$$Ar^2e^{rt}\ \ddot{x} + \frac{c}{m}Are^{rt}\ \dot{x} + \frac{k}{m}Ae^{rt}\ x = \left(r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m}\right)Ae^{rt} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} \quad (b^2 - 4ac)$$

Donc :

$$\boxed{r_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}\right]} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{a}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{a}\right)$$

et

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

Facteur d'amortissement : $\alpha = \frac{c}{C_c}$: C_c : c critique (Coef d'amortisement critique)

si $c = C_c \Rightarrow \Delta = 0$

$$\left(\frac{C_c}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{C_c = 2m\omega_0} \qquad \boxed{\alpha = \frac{c}{2m\omega_0}}$$

$$c = 2\alpha m\omega_0 \Longrightarrow \boxed{\frac{c}{m} = 2\alpha\omega_0}$$

Eq du mvt : $\boxed{\ddot{x} + \overbrace{2\alpha\omega_0}^{c/m}\dot{x} + \overbrace{\omega_0^2}^{k/m}x = 0}$ $\qquad \frac{4k}{m} = (2\omega_0)^2$

Donc $r_{1/2} = \frac{1}{2}\left[-2\alpha\omega_0 \pm \sqrt{(2\alpha\omega_0)^2 - \frac{4k}{m}}\right]$

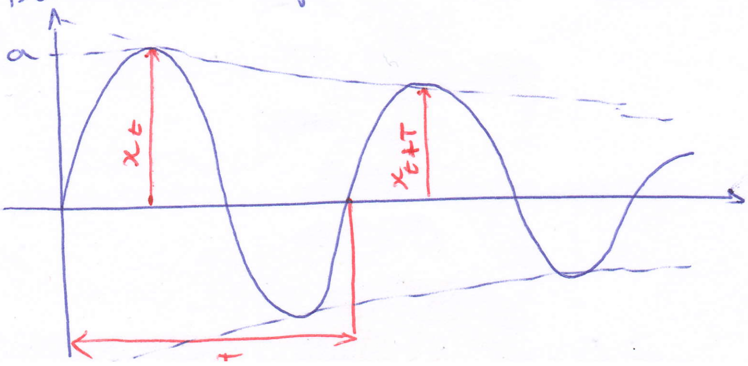
$$= \frac{1}{2}\left[-2\alpha\omega_0 \pm \sqrt{(2\alpha\omega_0)^2 - (2\omega_0)^2}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\left[-\cancel{2}\alpha\omega_0 \pm \cancel{2}\omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}\right]$$

$$\boxed{r_{1/2} = -\alpha\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

si $\boxed{\alpha < 1 \rightarrow c < C_c}$ " Amortissement faible ou sous critique "

r_1, r_2 : solution complexes, Avec $\boxed{\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \alpha^2}}$ puls V.L.A

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_a}}$$



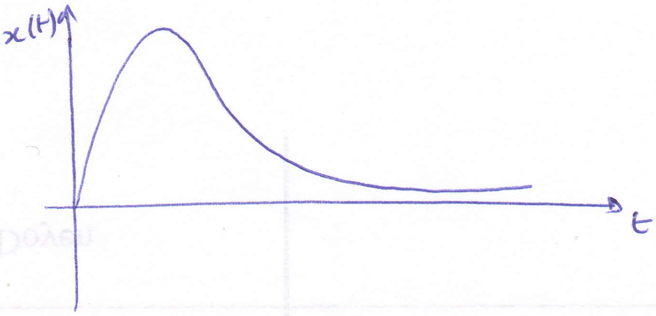
Decrément logarithmique

$$\boxed{\delta = \ln\frac{x_t}{x_{t+T}}}$$

Si $\boxed{\alpha = 1 \quad , \; C = C_c}$ "Amortissement critique" ~~mvt supercritique~~

$r_1 = r_2 = -\omega$

$x(t) = A_1 e^{-\omega t} + A_2 t . e^{-\omega t}$ (racines double)



Si $\boxed{\alpha > 1 , \; C > C_c}$ "Amortissement super-critique"

r_1 , r_2 : solution réelles