2ème Année Licence physique

Centre universitaire Ahmed Zabana, Relizane.
Département de Physique

TD de Mécanique Analytique

Abdelwahed Semmah

Année …………

TD Mécanique Analytique (Fiche N° 1)

Exercice.1

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $\Re(O,xyz)$ muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées du point M dans le référentiel $\Re$ sont données par :

$$x(t) = t+1 \text{ , } y(t) = t^2+1 \text{ et } z(t) = 0 \text{ . (t étant le temps)}$$

1. Donner l'équation de la trajectoire de M dans $\Re$. En déduire sa nature.
2. Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_{(M/\Re)}}$ et l'accélération $\overrightarrow{a_{(M/\Re)}}$ du point M.

Exercice.2

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $S(t)$. Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\overrightarrow{V_{(M/\Re)}}$ de module V. On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ telle que $\overrightarrow{V_{(M/\Re)}} = V\vec{\tau}$.

1) Que désignent les vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$?

2) Quelle relation existe-t-il entre t et V ?

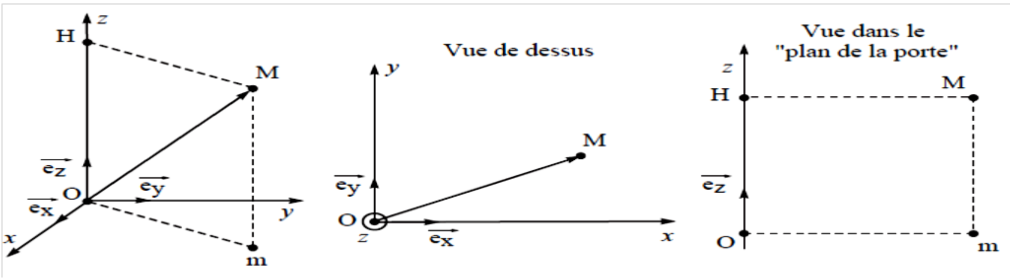
3) Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\Re$ est donné par :

$$\overrightarrow{\gamma_{(M/\Re)}} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n}$$

Rc étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

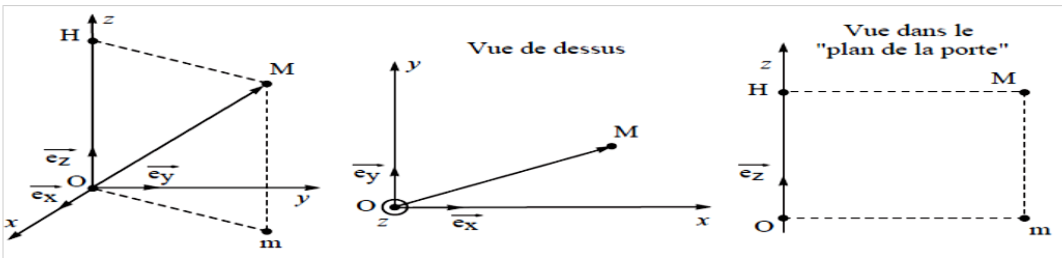
Exercice.3

Recopier les trois schémas suivants. Y faire apparaitre les trois vecteurs de la base cylindrique et les coordonnées cylindriques correspondantes. Exprimer, dans cette base locale, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{M/R}}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{a_{M/R}}$.



Exercice.4

Même question qu'à l'exercice précédent, Recopier les trois schémas suivants. Y faire apparaitre les trois vecteurs de la base sphérique et les coordonnées sphériques correspondantes. Exprimer, dans cette base locale, le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{\mathrm{v}_{M/R}}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\mathrm{a}_{M/R}}$.



Exercice.5

Soit M une particule (point matériel) en mouvement dans un système d'axes cartésiens.

Déterminer les coordonnées cylindriques puis sphériques du point M $(2, 2\sqrt{3}, 4)$.

Exercice.6

Soient $\Re(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère cartésien muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\Re'(O, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ le repère cylindrique muni de la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$. Considérons un point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et cylindriques (ρ, φ, z).

1) Faire une représentation des vecteurs des deux bases associées à $\Re$ et $\Re'$ et des coordonnées du point M.

2) Donner les expressions du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{dOM}}$ dans les deux repères $\Re$ et $\Re'$.

3) Déterminer les expressions de x, y et z en fonction de ρ, φ et z.

4) Déterminer les expressions de ρ, φ et z en fonction de x, y et z.

5) Déterminer les expressions de x, y et z en fonction de ρ, φ et z et leurs dérivées par rapport au temps $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ et $\dot{z}$.

6) Déterminer les expressions des vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de celles de la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$.

Exercice.7

Soit $\Re(O,xyz)$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, muni de la base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Soit M un point matériel de masse m. Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xoy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω (φ=ωt et ω>0). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F}=F\overrightarrow{e_\rho}$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overrightarrow{OM}=at\overrightarrow{e_\rho}$ (t étant le temps et a une constante positive). $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$.

1) Calculer la vitesse $\overrightarrow{v_{(M/R)}}$ et l'accélération $\overrightarrow{a_{(M/R)}}$ de M dans $\Re$ en fonction de a, t et ω.

2) Déterminer $\overrightarrow{L_{0(M/\Re)}}$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

3) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M.

4) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de $\vec{R}$.

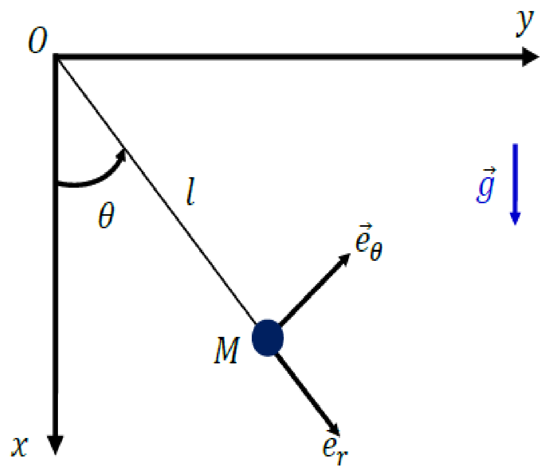
5) Déterminer $\overrightarrow{E_{(M/R)}}$ l'énergie cinétique du point M dans $\Re$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

6) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

7) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $\vec{F}$.

Exercice.8

On considère un pendule simple constitué d'un objet ponctuel M de masse m, accroché à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (xOy) du référentiel fixe $\Re(O,xyz)$.



On écarte le pendule d'un angle θ de sa position d'équilibre (θ=0) et on le lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes.

L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre g considéré comme uniforme.

1) Exprimer les forces appliquées au point M dans la base ($\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$, $\vec{k}$).

2) Calculer $\overrightarrow{V_{(M/\Re)}}$ et $\overrightarrow{a_{(M/\Re)}}$ respectivement les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\Re$.

3) En appliquant le PFD dans le référentiel galiléen $\Re$:

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.

b) Résoudre cette équation différentielle.

4) Etablir l'expression de la tension T du fil.

5) Retrouver l'équation différentielle du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

TD Mécanique Analytique (Fiche N° 2)

Exercice.1

On considère une sphère creuse (S) de rayon a dans un repère galiléen **R (O, xyz)**.

Une bille supposée ponctuelle de masse m est astreinte à se déplacer sans frottement à l'intérieur de la sphère, **figure 1**.

1. Quelles sont les contraintes sur le mouvement de **m**? En déduire le nombre de degré de liberté de la bille.

2. Calculer l'énergie cinétique de la bille,

3. En déduire le Lagrangien et ensuite les équations du mouvement sachant que l'énergie potentielle est donnée par : **U= - mgacosθ**.

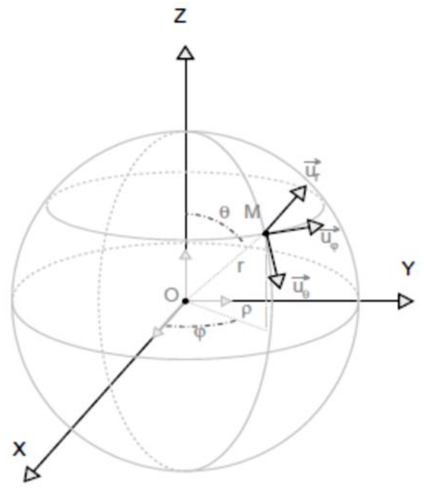


Figure 1 – Mouvement d'une bille à l'intérieur d'une sphère.

Exercice.2

Un cylindre plein de masse **M** de rayon. **R** roule sans glisser sur un plan horizontal. Il est accroché en son centre à un ressort horizontal de raideur k et dont la deuxième extrémité est fixe.

Après avoir choisi la coordonnée généralisée du problème, calculer le lagrangien du système et écrire l'équation de Lagrange.

Indications : Pour le calcul de l'énergie cinétique, on considère le centre de masse et l'énergie cinétique comporte deux termes l'un de translation, l'autre de rotation

$\frac{1}{2}\mathbf{I_{cm}}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}$avec $\mathbf{I_{cm}} = \frac{1}{2}\mathbf{MR^2}$

On rappelle que l'énergie potentielle d'un ressort de raideur **k** est $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathbf{kx^2}$ (pour une élongation **x**).

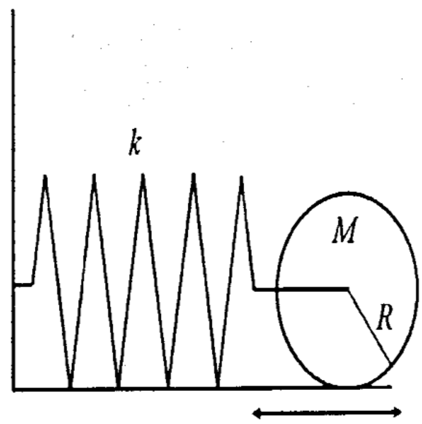


Figure 2 – Cylindre attaché à un ressort

Exercice.3

Une particule libre (en coordonnées polaires)

1.Calculer la vitesse de la particule en utilisant **a-** les coordonnées cartésiennes/ **b-** les coordonnées polaires

2.Donner le lagrangien qui d'écrit le mouvement d'une particule libre en coordonnées polaires **(r, θ)**.

3.Donner les équations d'Euler-Lagrange pour ce système.

4.Donner l'équation du mouvement.

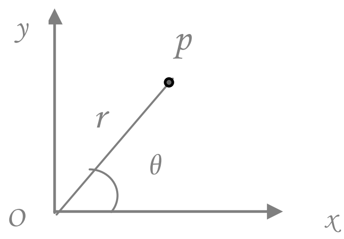
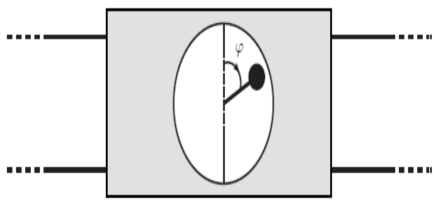


Figure 3 – Une particule libre

Exercice.4

Un chariot de masse **M** peut glisser sur des rails le long de l'axe **x** sans friction. A l'extrémité d'une tige rigide de longueur **L** et de masse nulle est fixée une masse **m**. La masse **m** est plongée dans un potentiel

$$\mathbf{U(\varphi) = \frac{1}{2} k \cos^2 \varphi}$$



Il n'y a pas de gravité.

1. Quelle est la dimension de la constante k ?

2. Combien de degrés de liberté le système compte-t-il ?

3. Déterminer le Lagrangien.

Exercice.5

Soit un pendule de longueur **l** avec une masse placée dans un champ de pesanteur **g** et astreint à se déplacer dans un plan **(x, y)** muni de la base mobile $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$. La position du point **M** est repérée par $\overrightarrow{OM} = l\vec{u_r}$.

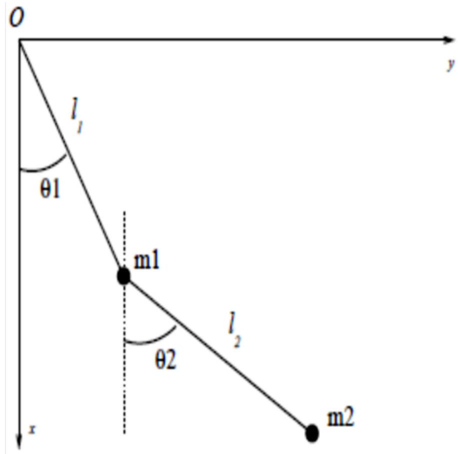
1. Calculer le nombre de degrés de liberté. En déduire que l'on peut décrire le système par la coordonnée θ.

2. Calculer la vitesse et déduire l'expression de l'énergie cinétique.

3. Calculer l'expression du Lagrangien et déduire l'équation du mouvement en utilisant l'équation d'Euler Lagrange.

Exercice.6

On utilise le formalisme de Lagrange pour étudier le système suivant : une masse ponctuelle $\mathbf{m_1}$ est reliée par un fil supposé sans masse de longueur l_1 à un point fixe **O**.



Une seconde masse $\mathbf{m_2}$ est reliée par un fil sans masse de longueur $\mathbf{l_2}$ à $\mathbf{m_1}$. Les deux masses ne peuvent pas se mouvoir que dans le plan vertical.

1. Définir les liaisons, le nombre de degrés de liberté et les coordonnées généralisées.

2. Calculer l'´energie cinétique et l'énergie potentielle. En déduire l'expression du Lagrangien.

3. Trouver les équations du mouvement.

TD Mécanique Analytique (Fiche N° 3)

Trouver les Hamiltoniens correspondant aux Lagrangiens suivants :

1. Pendule en rotation : $$\mathbf{L(\theta,\dot\theta)=\frac{mR^2}{2}\left(\dot\theta^2+\omega^2\sin^2\theta\right)+mgR\cos\theta}$$
2. Pendule sphérique : $$\mathbf{L(\theta,\emptyset,\dot\theta,\dot\emptyset)=\frac{mR^2}{2}\left(\dot\theta^2+\dot\emptyset^2\sin^2\theta\right)-mgR\cos\theta}$$
3. Système de ressorts : $$\mathbf{L(x_1,x_2,\dot x_1,\dot x_2)=\frac{m}{2}\left(\dot x_2{}^2+\dot x_1{}^2\right)-\frac{K}{2}x_1{}^2-\frac{K}{2}x_2{}^2-\frac{K}{2}(x_1-x_2)^2}$$
4. Pendule en déplacement : $$\mathbf{L(u,\emptyset,\dot u,\dot\emptyset)=\frac{m_1+m_2}{2}\dot u^2+\frac{m_2}{2}\left(l\dot\emptyset\right)^2+m_2 l\dot u\dot\emptyset\cos\emptyset+m_2 g l\cos\emptyset}$$

Exercice.2

On considère une sphère creuse (S) de rayon a dans un repère galiléen **R (O, xyz)**.

Une bille supposée ponctuelle de masse m est astreinte à se déplacer sans frottement à l'intérieur de la sphère, **figure 1**.

1. Calculer l'Hamiltonien du système.

2. Déterminer les équations canoniques et l'équation du mouvement par rapport a la coordonnée θ

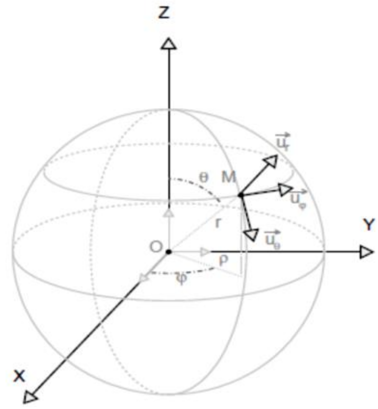


Figure 1 – Mouvement d'une bille à l'intérieur d'une sphère.

Exercice.3

Un cylindre plein de masse **M** de rayon. **R** roule sans glisser sur un plan horizontal. Il est accroché en son centre à un ressort horizontal de raideur k et dont la deuxième extrémité est fixe.

1. Calculer l'Hamiltonien du système et écrire les équations canoniques.

2. En déduire l'équation du mouvement.

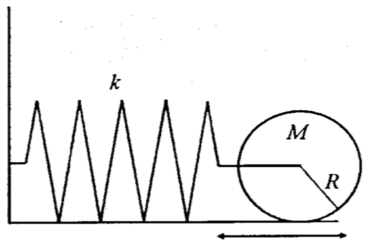


Figure 2 – Cylindre attaché à un ressort

Exercice.4

Une particule libre (en coordonnées polaires)

1. Calculer l'Hamiltonien du système.

2. Donner les équations canoniques.

3. En déduire les équations du mouvement.

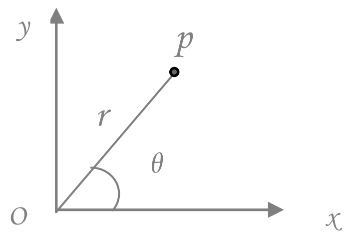


Figure 3 – Une particule libre

Exercice.5

Soit un pendule de longueur **l** avec une masse placée dans un champ de pesanteur **g** et astreint à se déplacer dans un plan **(x, y)** muni de la base mobile $(\overrightarrow{\mathbf{u_r}},\overrightarrow{\mathbf{u_\theta}})$. La position du point **M** est repérée par $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{l}\overrightarrow{\mathbf{u_r}}$.

1. À partir du Lagrangien du système calculer l'Hamiltonien.

2. Ecrire les équations canoniques.

3. En déduire l'équation du mouvement.

Exercice.6

On considère un système physique dont la dynamique est régie par le Hamiltonien suivant :

$$\mathbf{H\,(p, q, t) = kp^2q^2,\ \ k > 0}$$

1. Ecrire les équations canoniques de Hamilton.

2. Retrouver le Lagrangien duquel ce Hamiltonien découle.

Exercice.7

Soient **(q, p)** les coordonnées canoniques. En utilisant les crochets de poisson, dire si la transformation suivante est canonique :

$$\begin{cases} \mathbf{Q = p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}} \\ \mathbf{P = p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Exercice.8

moment d'Inertie (Barre Homogène)

Calculer le moment cinétique d'une barre homogène (I_Δ) par rapport à un axe (Δ) qui passe par son milieu (figure). On donne : la longueur de la barre L et la densité de masse $\rho=M/L$, M est la masse de la barre.

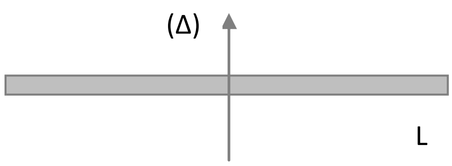


Figure 4 – Une barra homogéne

Exercice.9

moment d'Inertie (cylindre plein)

Calculer le moment cinétique d'un cylindre plein ou un disque (I_Δ) en rotation par rapport à un axe (Δ) qui passe par le centre de sa surface circulaire (figure). On donne : la densité volumique $\rho=M/V$, M est la masse du cylindre et V son volume ($\pi R^2 L$).

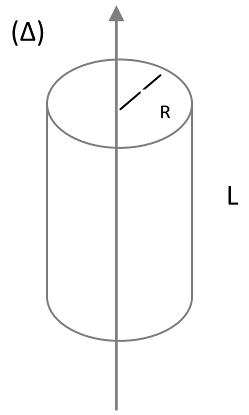


Figure 5 – Un cylindre plein

Exercice.10

Soit un solide (disque), un référentiel d'inertie matérialisé par un système d'axes **(O,x,y,z)** et soit un repère d'inertie $(\mathbf{G}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$. Les deux vecteurs $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ sont dans le plan du disque et le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_3$ est sur l'axe de symétrie. On a donc le tenseur d'inertie qui sera diagonal par rapport à ce repère.

En appliquant la variante du théorème du moment cinétique, déterminer les équations d'Euler. On donne $\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\alpha = \left(\sum_\beta \boldsymbol{\omega}_\beta \, \vec{\mathbf{e}}_\beta\right) \wedge \vec{\mathbf{e}}_\alpha$ la formule de poisson avec **(α, β =1,2,3)**