

2<sup>ème</sup> Année Licence physique

Centre universitaire Ahmed Zabana, Relizane.  
Département de Physique

# Cours de Mécanique Analytique

*Abdelwahed Semmah*

Laboratoire de simulation à multi échelles et modélisations  
Université Djillali Liabes, Sidi.Bel.Abbes

Année 2017

## Avant-propos

Cette polycopie de cours est une initiation aux concepts de la mécanique analytique. Il s'adresse aux étudiants de la deuxième année LMD, option physique. L'ambition de ce cours est de permettre une introduction aussi complète que possible aux bases de l'approche féconde de la mécanique classique, que ce soit à l'échelle du point matériel (mécanique du point) ou à l'échelle du solide (mécanique du solide), par l'enseignement des formalismes de Lagrange et Hamilton ainsi que certaines de ces applications. Pour une bonne compréhension des concepts de la mécanique analytique, la maîtrise des outils mathématiques usuels de la Physique, notamment des équations différentielles ; ainsi qu'une bonne connaissance de la mécanique newtonienne sont indispensables. Pour l'élaboration de ce cours polycopié, j'ai utilisé quelques ouvrages et sites Web qui sont d'ailleurs cités en références. Gageons que ce cours constituera un précieux outil pédagogique pour les étudiants.

## Références

- 1- Cours de Mécanique Analytique/ P. Amiot et L. Marleau /Version 2016.
- 2- Introduction à la mécanique analytique, Philippe Hautcoeur, [Philippe.Hautcoeur@ac-nantes.fr](mailto:Philippe.Hautcoeur@ac-nantes.fr).
- 3- Mécanique Analytique, Cours pour la deuxième année, Ruth Durrer, Département de Physique Théorique de l'Université de Genève Quai E. Ansermet 24, 1211 Genève 4, Suisse, édition 2010.
- 4- Résumé du cours de Mécanique Analytique, [jean-eloi.lombard@ep.ch](mailto:jean-eloi.lombard@ep.ch), 22 janvier 2009.
- 5- Cours de Mécanique Analytique Jonathan Ferreira, Université Joseph Fourier, Laboratoire d'AstrOphysique de Grenoble [http : //www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/\\_ferreira](http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/_ferreira) (2008-2009).

# Table des Matières

<b>1/ Rappel de la mécanique classique</b>	
1-1 Définition.....	1
1-2 Cinématique d'une particule.....	1
1-2/a Vecteur Vitesse.....	2
1-2/b Vecteur accélération.....	2
1-2/c Coordonnées cylindriques.....	3
1-2/d Les coordonnées sphériques.....	4
1-3 Dynamique d'une particule.....	4
1-3/a Quantité de mouvement.....	4
1-3/b Lois de Newton.....	5
1-4 Travail et Energie.....	5
1-4/a Le travail d'une force.....	5
1-4/b L'énergie cinétique.....	6
1-5 Système à N particules et Forces extérieures.....	6
1-5/a Moment Cinétique.....	7
1-6 Degrés de Libertés.....	9
<b>2/ Formalisme de Lagrange</b>	
2-1 Définition.....	11
2-2 Coordonnées généralisées.....	11
2-3 Variation fonctionnelle.....	11
2-4 Le Lagrangien.....	14
2-5 Coordonnées curvilignes.....	15
2-6 Contrainte holonomes et non holonomes.....	19
2-7 Applications.....	19
2-7/a Particule dans un champ gravitationnel.....	19
2-7/b Particule liée à un ressort.....	20
2-7/c Problème à deux corps.....	21
2-7/d Le potentiel central.....	22
<b>3/ Formalisme de Hamilton</b>	
3-1 Définition.....	24
3-2 Transformation de Legendre.....	24
3-2/a Description simplifiée.....	24
3-3 L'Hamiltonien.....	25
3-4 Crochets de Poisson et variations canoniques.....	27
3-4/a Crochets de Poisson.....	27
3-4/b Propriétés du crochet de poisson.....	28
3-4/c Variables Canoniques.....	28
3-5 Moment généralisés.....	29
3-6 Transformations canoniques.....	30

<b>3-7</b>	<b>La méthode de Hamilton-Jacobi</b> .....	30
	3-7/a Equation de Hamilton Jacobi.....	31
<b>3-8</b>	<b>L'espace des phases</b> .....	32
	3-8/a Portait de phase (système à un degré de liberté).....	32
<b>3-9</b>	<b>Variables angle-action</b> .....	33
	3-9/a Variable d'angle.....	34
	3-9/b Variable d'action.....	34
<b>4/</b>	<b>Mouvement d'un solide indéformable</b>	
<b>4-1</b>	<b>Définition</b> .....	38
<b>4-2</b>	<b>Degrés de liberté d'un solide</b> .....	38
<b>4-3</b>	<b>Moment cinétique du solide</b> .....	40
<b>4-4</b>	<b>Axes Principaux et Tenseur d'inertie</b> .....	41
<b>4-5</b>	<b>Energie Cinétique</b> .....	43
<b>4-6</b>	<b>Approche vectoriel et équations d'Euler</b> .....	43
<b>4-7</b>	<b>Approche Lagrangienne et angles d'Euler</b> .....	44
	4-7/a Les rotations d'Euler.....	45
<b>4-8</b>	<b>Toupie Symétrique</b> .....	45
	4-8/a Etude d'une Toupie Symétrique.....	45
	4-8/b Vitesse angulaire instantanée ( $\vec{\Omega}$ ).....	46
	4-8/c Tenseur moment d'inertie (I).....	46
	4-8/d Energie Cinétique.....	47
<b>5/</b>	<b>Mécanique Lagrangienne des milieux continus</b>	
<b>5-1</b>	<b>Le passage à la limite continue (cas simple : corde élastique en 1D)</b>	48
	5-1/a Milieu continu.....	48
	5-1/b Retour au Lagrangien.....	50
<b>5-2</b>	<b>Formulation Lagrangienne des milieux continus</b> .....	51
	5-2/a Equation de Lagrange du champ.....	52
<b>6/</b>	<b>Théorème de Liouville</b> .....	54

## Chapitre1/ Rappel de mécanique classique

### 1-1 Définition

La mécanique classique ou mécanique Newtonienne est une théorie de physique qui décrit le mouvement des objets macroscopique lorsque leur vitesse est faible par rapport à celle de la lumière.

### 1-2 Cinématique d'une particule

Soit un référentiel donné, noté  $\mathbf{R}$ , dont le repère d'espace a pour origine un point  $\mathbf{O}$ , et par rapport auquel on étudie le mouvement de la particule  $\mathbf{P}$ , la position de ce point à un instant  $\mathbf{t}$  quelconque est donnée par le vecteur position :  $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{P}/(\mathbf{R})} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$ .

Le vecteur position varie au cours du mouvement et l'ensemble des positions successives au cours du temps de son extrémité  $\mathbf{P}$  forme une courbe appelée trajectoire de la position  $\mathbf{P}$ .

En utilisant pour le repère d'espace les coordonnées cartésiennes de base orthogonale associée  $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$  le vecteur  $\vec{\mathbf{r}}$  se décompose en:  $\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ .

La donnée des fonctions  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$ ,  $z=h(t)$  constitue les équations horaires du mouvement, celle-ci peuvent être obtenues par intégration des équations du mouvement.

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps  $\mathbf{t}$  entre les différentes équations horaires, ce qui n'est pas toujours en pratique possible.

Il est intéressant d'introduire un repaire spécifique appelé trièdre de Serret-Frenet (Repère de Frenet), il permet d'exprimer d'une façon intrinsèque la vitesse et l'accélération, (c'est-à-dire exprimer ces grandeurs cinématique indépendamment d'un système de coordonnées particulier).

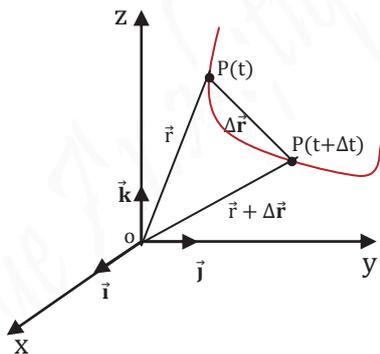


Fig. 1-1/ Système de coordonnées cartésienne.

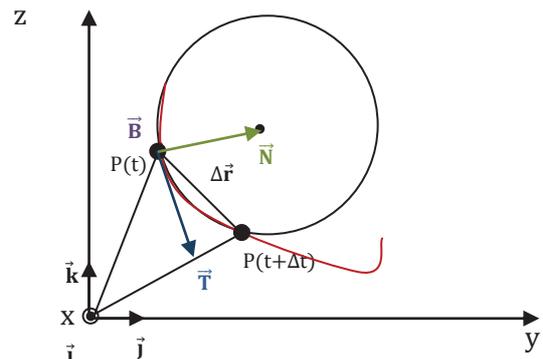


Fig.1-2/ Repaire de Frenet.

Il s'agit d'un repère mobile avec  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  (position de la particule à un instant  $\mathbf{t}$ ) orthonormé de vecteurs de base  $(\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{B}})$ .

$\vec{\mathbf{T}}$  :Tangente en  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , orienté dans le sens du mouvement.

$\vec{\mathbf{N}}$  :Normale à la trajectoire en  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  perpendiculaire à  $\vec{\mathbf{T}}$ , orienté vers le sens de courbure.

$\vec{\mathbf{B}}$  :Binormale ( $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{T}} \wedge \vec{\mathbf{N}}$ ).

### 1-2/a Vecteur Vitesse

$P$  position de la particule à l'instant  $t$

$P'$  position de la particule à l'instant  $t'$

La vitesse moyenne est égale à :  $\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\overline{PP'}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ , ( $\Delta t = t' - t$ )

La vitesse instantanée est égale à :  $\vec{v} = \vec{v}_{P/(R)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{PP'}}{\Delta t} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_R$

Il est facile de montrer que le sens de la vitesse  $\vec{v}$  est celui de la tangente à la trajectoire au point  $P$ , donc le sens de la vitesse est celui du mouvement de  $P$  à  $P'$ .

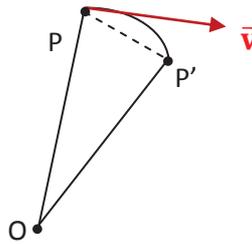


Fig.1-3/ Sens du vecteur vitesse

En utilisant les coordonnées cartésiennes le vecteur vitesse se décompose en :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \text{ où } \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

La notion d'abscisse curviligne peut être introduite pour donner une interprétation plus physique de  $\vec{v}$  :  $d\vec{r} = \vec{v}dt$  qui correspond au vecteur déplacement infinitésimal pendant  $dt$  sur la trajectoire de  $P$ . Sa norme  $ds = \|d\vec{r}\| = \|\vec{v}\|dt = vdt$ , correspond donc à la distance parcourue pendant  $dt$  par la particule.

On a  $ds = vdt \Rightarrow v = ds/dt$ , en utilisant le repère de Frenet :  $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = v\vec{T}$ .

- L'abscisse curviligne  $s(t)$  correspond à la distance parcourue par la particule entre  $t_0$  et  $t$  :  $s(t) = \int_{t_0}^t vdt$

### 1-2/b Vecteur accélération

Par définition, le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse.

$\vec{a} = \vec{a}_{P/(R)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ , en coordonnées cartésiennes l'accélération se décompose en :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \text{ où } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dans le repère de Frenet, nous avons :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = v\vec{T} \text{ et } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{T}) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v^2\frac{d\vec{T}}{ds}$$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v^2\frac{d\vec{T}}{ds}$ , pour trouver la relation finale de l'accélération il faut déterminer la

direction et la valeur scalaire du vecteur  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  dans le repère de Frenet

**\*la direction de  $\frac{d\vec{T}}{ds}$**

On peut facilement vérifier que  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  est perpendiculaire à ( $\perp \vec{T}$ ) donc parallèle à ( $\parallel \vec{N}$ ) dans le repère de Frenet.

-  $\vec{T}$  est un vecteur unitaire ( $\vec{T}^2 = 1$ ),  $\mathbf{0} = \frac{d\vec{T}^2}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{T} \cdot \vec{T}) = \vec{T} \frac{d\vec{T}}{ds} + \frac{d\vec{T}}{ds} \vec{T} = 2\vec{T} \frac{d\vec{T}}{ds} \Rightarrow$   
 $\frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T}$  et donc  $\parallel \vec{N}$ .

**\*la valeur scalaire de  $\frac{d\vec{T}}{ds}$**

En utilisant toujours le repère de Frenet on peut aussi calculer facilement la valeur scalaire de  $\frac{d\vec{T}}{ds}$

$d\vec{T} = \|\vec{T}\|d\theta$  et  $ds = R_c d\theta \Rightarrow \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R_c} \vec{N}$

Par conséquent  $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v^2 \frac{1}{R_c} \vec{N}$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{1}{R_c} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$\vec{a}_T$  : Composante tangentielle (colinéaire à  $\vec{v}$ )

$\vec{a}_N$  : Composante normale (nulle pour  $R_c = \infty$ )

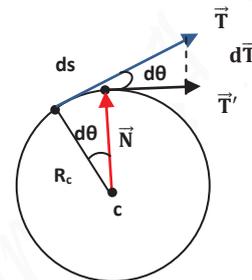


Fig.1-4/ calcul géométrique de l'accélération normale dans le repère de Frenet.

**1-2/c Coordonnées cylindriques**

Les coordonnées cylindriques de la particule P sont :  $P(\rho, \varphi, z)$

En coordonnées cartésiennes on a :

$x = \rho \cos \varphi$

$y = \rho \sin \varphi$

$z = z$

Le repère associé aux coordonnées cylindriques est :

$(P, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}), \vec{OP} = \vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$

Ecrire les vecteurs du repère associé en fonction des coordonnées cartésiennes

$\vec{e}_\rho \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \vec{e}_\varphi \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \vec{e}_z(\vec{k})$

\*Le vecteur vitesse s'écrit :

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{z} \vec{k}$  or  $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k}$

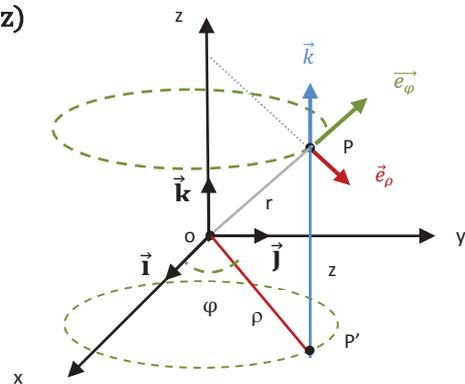


Fig.1-5/ Les coordonnées Cylindriques

\*Le vecteur accélération s'exprime sous la forme :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \ddot{z}\vec{k} \text{ or } \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \text{ et } \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$$

### 1-2/d Les coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques de la particule P sont :  $\mathbf{P}(r, \theta, \varphi)$

En coordonnées cartésiennes on a :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

Le repère associé aux coordonnées sphériques est :

$$(\mathbf{P}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi), \vec{OP} = \vec{r} = r\vec{e}_r$$

Ecrire les vecteurs du repère associé en fonction des Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{e}_r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \vec{e}_\theta \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \vec{e}_\varphi \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

\*Le vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \text{ or } \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

\*Le vecteur accélération s'obtient de la même façon :

$$\mathbf{a}_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta$$

$$\mathbf{a}_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\mathbf{a}_\varphi = r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta$$

### 1-3 Dynamique d'une particule

La dynamique est une science qui étudie la cause de mouvement d'une particule (c.à.d.  $\vec{F}$ )

#### 1-3/a Quantité de mouvement : notée $\vec{P}$

Pour une particule  $\mathbf{M}$  de masse  $\mathbf{m}$  en mouvement dans un référentiel  $\mathbf{R}$ , la quantité de mouvement  $\vec{P}_{\mathbf{M}/(\mathbf{R})} = \mathbf{m}\vec{v}_{\mathbf{M}/(\mathbf{R})}$

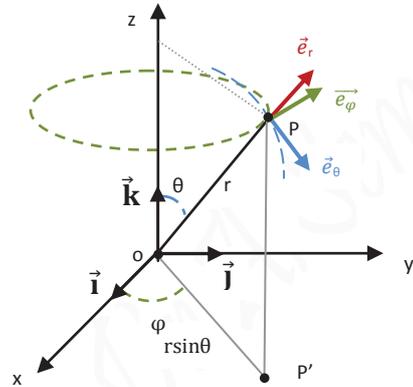


Fig.1-5/ Les coordonnées Sphériques

### 1-3/b Lois de Newton

**\*1<sup>ère</sup> loi : Le Principe d'inertie** « Tout corps persévère dans l'état de repos ou l'état de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelques forces n'agissent sur lui, et ne le contraignent à changer d'état. »

Pour le principe d'inertie,  $\vec{P}_{M/(R)} = \text{cte}$  donc  $\vec{v}_{M/(R)} = \text{cte}$ .

- Un référentiel  $R$  où le principe d'Inertie est vérifié est appelé référentiel Galiléen.
- Tout référentiel  $R_1$  en translation uniforme par rapport à un référentiel  $R_0$  Galiléen est considéré aussi Galiléen.

**\*2<sup>ème</sup> loi : Principe fondamental de la dynamique (P.F.D.)**

Par rapport à un  $R_0$  (Galiléen), le mouvement de la particule  $M$  de masse  $m$  soumis à une résultante de force  $\vec{F}$  :

$$\left. \frac{d\vec{P}_{M/(R_0)}}{dt} \right|_{R_0} = \vec{F} \Rightarrow \left. \frac{d(m\vec{v}_{M/(R_0)})}{dt} \right|_{R_0} = m \left. \frac{d\vec{v}_{M/(R_0)}}{dt} \right|_{R_0} = m\vec{a}_{M/(R_0)} = \vec{F}$$

**\*3<sup>ème</sup> loi : Principe des actions réciproques**

Pour une particule  $M_1$  de masse  $m_1$  et une particule  $M_2$  de masse  $m_2$ , si  $M_1$  exerce une force  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$  sur  $M_2$  alors  $M_2$  exerce aussi une force  $\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$  de telle sorte que  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$ .

### 1-4 Travail et énergie

Un point matériel qui subit un mouvement avec une vitesse  $\mathbf{v}$  soumise à une force  $\mathbf{f}$  par définition on appelle  $P = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ , puissance instantanée de la force.

#### 1-4/a Le travail d'une force

Soit un référentiel  $R$  matérialisé par un système d'axe (Figure 1-7),  $M$  se déplace du point 1 ( $t_1$ ) → 2 ( $t_2$ ) donc  $W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$ .

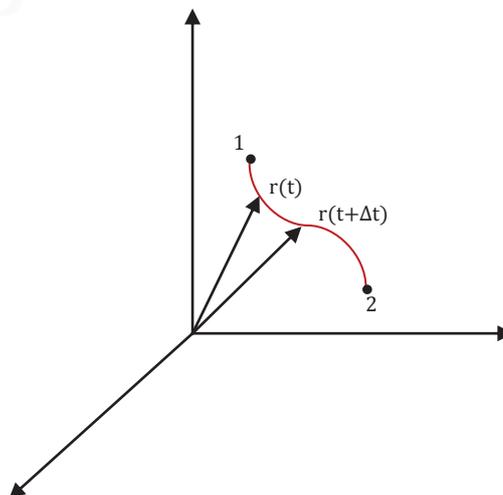


Fig.1-7/ Trajectoire d'une particule de 1 → 2

$\Rightarrow W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} dt = W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{dr}$ , le travail pour aller du point 1  $\rightarrow$  2.

Le travail infinitésimal  $\delta W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{dr} = |\mathbf{f}| |\mathbf{dr}| \cos \theta \Rightarrow \mathbf{W} = \int_{\Gamma} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \mathbf{dr}$

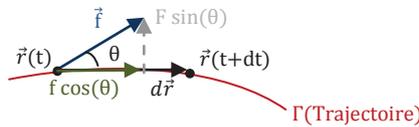


Fig.1-8/ La force responsable de ramener la particule de 1  $\rightarrow$  2

### 1-4/b L'énergie cinétique

Soit une particule  $M$  de masse  $m$  en mouvement à une vitesse  $\mathbf{v}$ , on appelle énergie cinétique par définition :  $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ .

Pour plusieurs particules il suffit de sommer toutes les contributions de type de  $(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2)$  pour trouver l'énergie cinétique totale

#### \*Théorème de l'énergie cinétique

Le changement de l'énergie cinétique quand la particule passe du point 1  $\rightarrow$  2, vaut l'intégrale de  $t_1$  à  $t_2$  de la puissance instantanée

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dt = W_{12}.$$

#### Démonstration du Théorème

Nous avons :

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \Big|_1^2 = T_2 - T_1 \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$ .

### 1-5 Système à N particules et forces extérieures

Soit un système de  $N$  particules dont les interactions mutuelles sont régies par la 3<sup>ème</sup> loi de Newton (principe de l'action et de la réaction).

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \Rightarrow \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i, j \text{ et } i \neq j} \vec{F}_{ji} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{0} \equiv \vec{F}^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Il est utile d'introduire les définitions suivantes :

$$\text{Centre de masse : } \vec{\mathbf{R}} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\mathbf{M}}$$

$$\text{Impulsion totale : } \vec{\mathbf{P}} = \sum_i \vec{\mathbf{P}}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i = \mathbf{M} \dot{\vec{\mathbf{R}}}$$

$$\text{On obtient donc : } \mathbf{M} \frac{d^2 \vec{\mathbf{R}}}{dt^2} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{\text{ext}} \equiv \vec{\mathbf{F}}^{\text{ext}}.$$

### \*Théorème du centre de masse

Le centre de masse se comporte comme un point matériel de masse totale  $\mathbf{M}$  soumis à une force extérieure égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur chacune des particules.

Pour un système isolé dans un référentiel Galiléen,  $\vec{\mathbf{P}}$  est conservé.

Introduisons les coordonnées barycentriques par rapport au centre de masse :

$$\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{r}}'_i$$

$$\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{v}}'_i, \vec{\mathbf{V}} = \dot{\vec{\mathbf{R}}}$$

### 1-5/a Moment Cinétique

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}}_0 &= \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \wedge \vec{\mathbf{P}}_i = \sum_i [(\vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{r}}'_i) \wedge m_i (\vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{v}}'_i)] \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{L}}_0 &= \sum_i [(\vec{\mathbf{R}} \wedge m_i \vec{\mathbf{V}}) + (\vec{\mathbf{r}}'_i \wedge m_i \vec{\mathbf{V}}) + (\vec{\mathbf{R}} \wedge m_i \vec{\mathbf{v}}'_i) + (\vec{\mathbf{r}}'_i \wedge m_i \vec{\mathbf{v}}'_i)] \end{aligned}$$

Nous avons :

- $\sum_i (\vec{\mathbf{R}} \wedge m_i \vec{\mathbf{V}}) = \mathbf{M} \vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{V}}$ , (soit  $\mathbf{A} = \text{cte}$ ,  $\vec{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{A} \vec{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}} \wedge \vec{\mathbf{y}}$ ).
- $\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i = \sum_i m_i (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{R}}) = \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i - \mathbf{M} \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}} \rightarrow (1^*)$  à démontrer.
- $\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}'_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i = \vec{\mathbf{0}} \rightarrow (2^*)$  à démontrer.

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{M} \vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{V}} + \sum_i \vec{\mathbf{r}}'_i \wedge \vec{\mathbf{P}}_i$$

### Démonstration (1\*)

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{R}} &= \frac{1}{\mathbf{M}} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{\mathbf{M}} \sum_i m_i (\vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{r}}'_i) = \frac{1}{\mathbf{M}} \sum_i m_i \vec{\mathbf{R}} + \frac{1}{\mathbf{M}} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{R}} &= \vec{\mathbf{R}} + \frac{1}{\mathbf{M}} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i \\ \Rightarrow \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i &= \vec{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

**Démonstration (2\*)**

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{d}{dt} \vec{R} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \\ \Rightarrow \vec{V} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{R} + \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{V} + \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}'_i \\ &\Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0\end{aligned}$$

**1<sup>er</sup> Théorème de Koenig**

Le moment cinétique par rapport au point  $\mathbf{o}$  est égal à la somme du moment cinétique de centre de masse par rapport au point  $\mathbf{o}$  et le moment cinétique par rapport au centre de masse (moment cinétique propre du système).

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i) = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}'_i \\ \Rightarrow \vec{L}_0 &= \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}'_i = \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \wedge \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}'_i \\ &= M \vec{R} \wedge \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}'_i\end{aligned}$$

**Théorème du moment cinétique**

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale au moment des forces extérieures appliquées

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \sum \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}^{\text{ext}}) \rightarrow (3^*) \text{ à démontrer}$$

**Démonstration (3\*)**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{L}_0 &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{P}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_i \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} \\ &+ \sum_{i,j \text{ et } i \neq j} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} = \mathbf{0} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i < j} \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}_0 &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i < j} (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ji}) = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}_{ji}\end{aligned}$$

Si  $\vec{F}_{ji}$  est dérivée suivant  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  [c'est le cas pour la gravitation], nous aurons :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}^{\text{ext}})$$

**2<sup>ème</sup> Théorème de Koenig**

L'énergie totale cinétique est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie des particules par rapport au centre de masse :

$$T = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 \rightarrow (4^*) \text{ à démontrer}$$

**Démonstration (4\*)**

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i{}^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V}^2 + 2\vec{V}\vec{v}'_i + \vec{v}'_i{}^2) \\ &= \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \sum_i m_i \vec{v}'_i \vec{V} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \mathbf{0} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 \\ &\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 \end{aligned}$$

**1-6 Degrés de liberté**

Un système physique à 1,2,3,4,...,N degrés de liberté.

Le degré de liberté est la généralisation du nombre de directions indépendantes selon lesquelles une particule peut se déplacer dans l'espace physique.

Ainsi, une particule pouvant se déplacer dans une direction possède un (1°) degré de liberté.



Fig.1-9/ Particule à un degré de liberté

Une particule est libre de se déplacer dans un espace à deux dimensions, elle possède deux (2°) degrés de liberté.

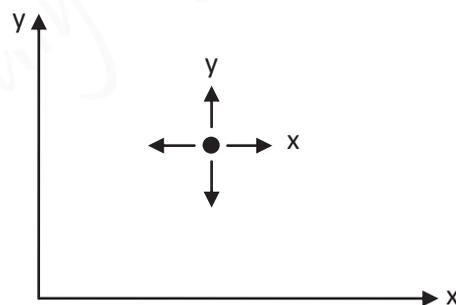


Fig.1-10/ Particule à deux degrés de liberté

Une particule est libre de se déplacer dans un espace à trois dimensions, elle possède trois (3°) degrés de liberté.

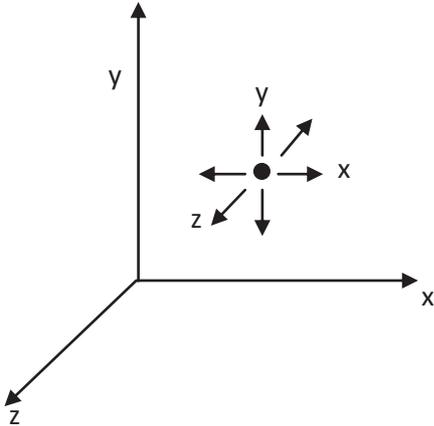


Fig.1-11/ Particule à trois degrés de liberté

La contrainte où la liaison peut réduire ou supprimer au moins un degré de liberté.

**Exemple**

Particule libre sur un axe  $ox$  :



Fig.1-12/ Particule à 1° degré de liberté

Si une force agit sur la particule, soit  $F=-k.x$  le degré de liberté est réduit de  $-x_0$  à  $+x_0$

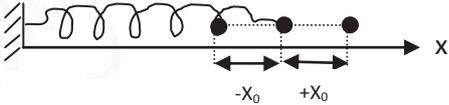


Fig.1-13/ Particule à 1° degré de liberté réduit de  $-x_0$  à  $+x_0$

Si le ressort est remplacé par une tige, la particule perd son degré de liberté.

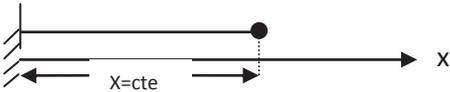


Fig.1-14/ Particule à 0° degré de liberté

## Chapitre2/ Formalisme de Lagrange

### 2-1 Définition

Le Lagrangien permet d'étudier une vaste gamme de problèmes en mécanique. En ce sens il est équivalent au formalisme de Newton mais, il a sur ce dernier un certain nombre d'avantages, d'abord il est fondé sur un principe théorique fondamental et élégant. Il utilise des quantités scalaires plutôt que vectorielles et en ce sens, sa forme est indépendante des coordonnées utilisées.

### 2-2 Coordonnées généralisées

On appelle coordonnées généralisées d'un système physique un ensemble de variables réelles, qui ne correspondent pas toutes à des coordonnées cartésiennes (Exemple : angle, position relative), et permettant de décrire ce système.

On paramétrise un système par « les coordonnées généralisées » supposées indépendantes, notés  $\{q_i\}$  et par leurs dérivées temporelles  $\{\dot{q}_i\}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , appelées « vitesse généralisées ».

L'espace qui caractérise l'état du système à un instant  $t$  donné est « l'espace de configuration » de coordonnées  $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

**Exemple** : Une particule, en coordonnées cartésiennes :

$$(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi) \text{ et } (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$$

### 2-3 Variation fonctionnelle

Considérons le cas particulier d'une particule astreinte à se déplacer, sans frottement, sur une courbe plane contenue dans le plan  $xOy$ .

La courbe sur laquelle est astreinte à se déplacer la particule de masse  $m$ , est le lieu des points dont les coordonnées vérifient les relations :

$$\begin{cases} z = 0 & (1) \\ f(x, y) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) Correspond au plan  $xoy$

(2) Représente l'équation de la trajectoire dans ce plan. (les 2 relations définissent les équations des liaisons).

Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de coordonnées qui représentent la position de la particule  $M$  (3 dans le cas générale) moins le nombre de liaisons.

Pour un système à  $N$  particules dans un espace à  $3D$  et  $k$  représente le nombre de liaisons dans ce système alors le nombre de degrés d'indépendance ou de liberté des  $N$  particules est

$$n = 3N - k$$

Dans notre cas la particule possède un (1°) de liberté (cas d'un pendule simple). Il faut choisir une variable  $q$  pour repérer sa position, cette variable est appelée coordonnée généralisée. Il

est possible d'exprimer le vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  de la particule en fonction de la coordonnée généralisée  $q$  par :  $\vec{r} = \vec{r}(q)$ .

Soit  $\vec{F}$  la résultante de toutes les forces agissant sur la particule. Le principe fondamental de la dynamique nous donne :

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ où } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} : \text{vitesse de la particule.}$$

### \*Différentielles réelles

Soit une fonction  $f(q_i, t)$  telle que  $i = 1, 2, \dots, n$  sa différentielle réelle est :

$$df = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Où  $dq_i$  et  $dt$  sont des différentielles des  $q_i$  et  $t$ .

### \*Différentielles virtuelles

Les variations des coordonnées  $q_i$  s'effectuent suivant des lois  $q_i = q_i(t)$  et  $f$  est finalement une fonction du temps par intermédiaire des  $q_i$ .

Par définition on appellera différentielle virtuelle de  $f$  à l'instant  $t$  l'expression :

$$\delta f = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

Le temps est figé  $dt = 0$ .

**Exemple :** Trouvez la différentielle réelle et virtuelle de la fonction suivante

$$f(x, \varphi, t) = x \sin(\omega t + \varphi)$$

La différentielle réelle de  $f$

Soit  $q_i = (q_1, q_2)$  telle que  $q_1 = x$  et  $q_2 = \varphi$

Alors nous avons :

$$df = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \Rightarrow df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow df(x, \varphi, t) = \sin(\omega t + \varphi) dx + x \cos(\omega t + \varphi) d\varphi + x \omega \cos(\omega t + \varphi) dt$$

$$\Rightarrow df(x, \varphi, t) = \sin(\omega t + \varphi) dx + x \cos(\omega t + \varphi) (\omega dt + d\varphi)$$

La différentielle virtuelle de  $f$

Nous avons :

$$\delta f = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i \right) \Rightarrow \delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta \varphi$$

$$\Rightarrow f(x, \varphi, t) = \sin(\omega t + \varphi) \delta x + x \cos(\omega t + \varphi) \delta \varphi$$

Soit  $\delta w$  le travail fourni par la force  $\vec{F}$  lors d'un déplacement infinitésimal  $\delta \vec{r}$  :

$$\delta w = \vec{F} \delta \vec{r}$$

Comme  $\vec{r}(\mathbf{q}) = \vec{r}$  alors le déplacement infinitésimal  $\delta \vec{r}$  peut s'écrire en fonction de  $\delta \mathbf{q}$  de la coordonnée généralisé  $\mathbf{q}$  :

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q}$$

$\delta w$  peut se mettre de la forme :

$$\delta w = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_q = \frac{\delta w}{\delta \mathbf{q}} = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}}$$

$\vec{F}_q$  : Force généralisée conjuguée de  $q$ .

Par conséquent  $\delta w$  s'écrit :  $\delta w = \vec{F}_q \delta \mathbf{q}$

En tenant compte du Principe Fondamental de la Dynamique on a :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q}$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}} + \vec{v} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

Sachant que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \mathbf{q}}$$

On obtient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathbf{q}} \right) - \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \mathbf{q}}$$

Le vecteur vitesse peut s'écrire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dq} \dot{q}$$

D'où

$$\partial \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dq} \partial \dot{q} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dq} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}$$

et :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} \right) - \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

Sachant que :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}$$

et que :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

on obtient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

L'expression de  $\delta w$  devient :

$$\delta w = m \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \right\} \delta q$$

\*On note  $T = \frac{1}{2} m v^2$  énergie cinétique de la masse  $m$

$$\Rightarrow \delta w = \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} \right\} \delta q$$

Finalement on en déduit l'équation d'Alembert pour un degré de liberté :

$$F_q = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q}$$

## 2-4 Le Lagrangien

Dans les systèmes conservatifs, la force appliquée au système dérive d'un potentiel  $U$  et elle s'écrit :

$$F_q = - \frac{\partial U}{\partial q}$$

L'équation de Lagrange devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} &= - \frac{\partial U}{\partial q} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] &= \frac{\partial}{\partial q} (T - U) \end{aligned}$$

L'énergie potentiel ne dépend pas de la vitesse alors on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (T - U) \right] - \frac{\partial}{\partial q} (T - U) = 0$$

avec  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$

on introduit  $L = T - U$

$L$  : la fonction de Lagrange (ou le Lagrangien du système).

D'où la forme de l'équation d'Euler-Lagrange dans le cas d'un système conservatif.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Pour  $N$  particules l'équation d'Euler-Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1.2.3 \dots n$$

## 2-5 Les coordonnées curvilignes :

On écrit communément  $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$  avec  $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ , cette notation peut rapidement prêter à confusion, en effet en coordonnées cartésiennes dans un repère inertiel, il n'y a pas de problèmes :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \Rightarrow \dot{\vec{r}} &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

Donc :  $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  et  $\mathbf{v}^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

Cette simplicité vient du fait que  $x, y$  et  $z$  ont tous les trois dimensions de longueur et que leurs axes sont fixes et orthogonaux.

Prenons par exemple les coordonnées sphériques où :

$$\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$$

Deux problèmes surgissent ici :

- 1-  $r, \theta$  et  $\varphi$  n'ont pas les mêmes dimensions.
- 2- Leurs axes sont orthogonaux mais ne sont pas fixes.

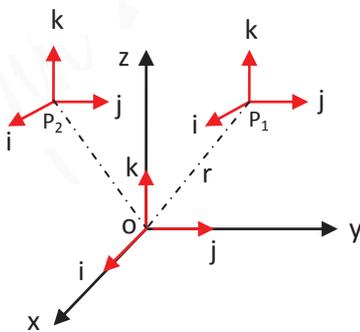


Fig. 1-1/ Coordonnées cartésienne.

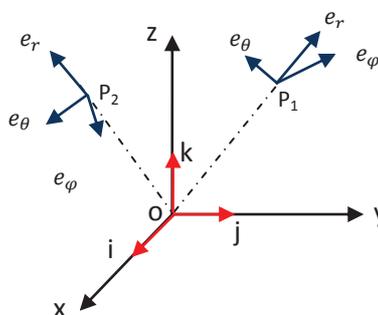


Fig. 1-2/ Coordonnées sphériques.

\*En coordonnées cartésiennes :

Le rayon vecteur  $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Le rayon vitesse  $\vec{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

L'énergie cinétique  $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$  et  $\mathbf{v}^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  car  $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$

\*En coordonnées sphériques

$x = r\sin\theta\cos\varphi$ ,  $y = r\sin\theta\sin\varphi$ ,  $z = r\cos\theta$

On calcule :

$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi$

$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi$

$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$

On obtient  $\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$

Les coordonnées étant  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ , il est clair que :

$T \neq \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2$  mais bien  $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$

De façon générale, on écrira alors :

$$T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$g_{ij}$  : Tenseur métrique.

Pour les coordonnées cartésiennes on identifie  $q_i(x, y, z)$  et  $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour les coordonnées sphériques on identifie  $q_i(r, \theta, \varphi)$  et  $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$

Ici dans les deux cas le tenseur métrique est diagonal car les deux systèmes d'axes restent orthogonaux en tout point.

Le tenseur métrique apparaît généralement dans la définition de l'élément longueur :

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

En coordonnées sphériques :

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

Fondamentalement la métrique permet de définir la longueur dans l'espace donné.

On vérifié facilement ci-dessus que  $g_{ij}$  est identique au  $g_{ij}$  qui nous permet de définir sans ambiguïté l'énergie cinétique  $T$  par  $T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ .

Dans le cas des coordonnées cartésiennes l'équation de Newton et  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ,

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Lagrangien nous donne :

$$L = \frac{m}{2} v^2 - U(x_i)$$

Les équations d'Euler-Lagrange nous donnent :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] = \frac{\partial L}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} [mv] = - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \left( \frac{\partial}{\partial t} = \nabla \text{ et } - \nabla U = F \right)$$

Et donc on obtient :

$$\frac{d}{dt} [mv] = F$$

Ce qui nous montre que les équations d'Euler-Lagrange concordent avec celles de Newton.

En coordonnées sphériques, par contre l'équation de Newton pour  $\theta$  n'est pas :  $\frac{d}{dt} (m\dot{\theta}) = F_\theta$

Sachant que Lagrangien sera :

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - U(r, \theta, \varphi)$$

Pour  $r$  :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - U(r, \theta, \varphi) \right) = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - U(r, \theta, \varphi) \right) = m\dot{r} = m r \dot{\theta}^2 + m r \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - \frac{\partial U}{\partial r}$$

donc :

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= m r \dot{\theta}^2 + m r \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - \frac{\partial U}{\partial r} \\ \Rightarrow \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta &= - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial r} \end{aligned}$$

Pour  $\theta$  :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - U(r, \theta, \varphi) \right) = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta}$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - U(r, \theta, \varphi) \right) = m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

donc :

$$m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} - m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta = - \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta = -\frac{1}{mr^2} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Pour  $\varphi$  :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left( \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - U(r, \theta, \varphi) \right) = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = mr^2 \ddot{\varphi} \sin^2\theta + 2mr\dot{r} \dot{\varphi} \sin^2\theta + 2mr^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - U(r, \theta, \varphi) \right) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

donc :

$$mr^2 \ddot{\varphi} \sin^2\theta + 2mr\dot{r} \dot{\varphi} \sin^2\theta + 2mr^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cot\theta = -\frac{1}{mr^2 \sin^2\theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Le coté gauche des trois équations est de la forme :

$$\ddot{q}_i + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$\Gamma_{jk}^i$  : Symbole de Christoffel (la dérivée covariante par rapport à  $\mathbf{t}$  du vecteur vitesse de composante  $\dot{q}_i$ ).

Dans notre cas ici  $\mathbf{q}_i = (r, \theta, \varphi)$  pour  $i=1,2,3$ , l'équation en  $\theta$  correspond à  $i=2$  et au lieu de  $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i = 0$ , la bonne définition de la dérivée par rapport au temps, tenant compte des unités et du fait que les vecteurs unitaires varient d'un point à l'autre, sera :

$$\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r} \dot{r} + \Gamma_{12}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{13}^2 \dot{r} \dot{\varphi} + \Gamma_{21}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{22}^2 \dot{\theta} \dot{\theta} + \Gamma_{23}^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + \Gamma_{31}^2 \dot{r} \dot{\varphi} + \Gamma_{32}^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + \Gamma_{33}^2 \dot{\varphi} \dot{\varphi}$$

Tenant compte du fait que  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$  on identifie, pour les coordonnées sphériques :

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = 0, \Gamma_{22}^2 = 0, \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = 0, \Gamma_{33}^2 = \sin\theta \cos\theta.$$

De la même façon on peut identifier les  $\Gamma_{jk}^1$  et les  $\Gamma_{jk}^3$ .

On peut calculer les  $\Gamma_{jk}^i$  par la formule :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l \mathbf{g}_{il}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{li}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathbf{g}_{lk}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial q_l} \right)$$

$\mathbf{g}^{-1}$  : Matrice inverse de  $\mathbf{g}$ .

## 2-6 Contrainte holonomes et non holonomes

Une contrainte holonome est une contrainte qui peut se mettre sous la forme :

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

- Egalité.
- Les vitesses n'apparaissent pas.

si non elle est non holonome.

### Exemple

$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \neq 0$ , contrainte non holonome.

$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t)$ , contrainte non holonome.

## 2-7 Applications

### 2-7/a Particule dans un champ gravitationnel

une particule de masse  $m$  dans le champ gravitationnel près de la surface à une énergie potentielle  $U=mgz$  où  $z$  mesure sa hauteur et  $g$  est l'accélération due à la gravité.

NB : un corps se déplace en  $3D$ , il possède 3 degrés de liberté.

\*L'énergie cinétique :  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

\*L'énergie potentielle :  $U = mgz$

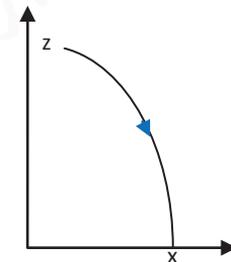


Fig.2-3/ Particule dans un champ gravitationnel

Donc  $L=T-U \Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$ .

Nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1.2.3$$

Pour  $x$  :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = c \Rightarrow m\dot{x} = c \Rightarrow x = Ct + a, \left( c = \frac{c}{m} \right)$$

Pour  $y$  :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = c' \Rightarrow m\dot{y} = c' \Rightarrow y = C't + a', \left( c' = \frac{c'}{m} \right)$$

Pour  $z$  :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right] = \frac{\partial L}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = -mg \Rightarrow \ddot{z} = -g \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + C''t + a''$$

où  $C''$  et  $a''$  sont déterminées par les conditions du problème.

Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{C}t + \mathbf{a} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}'t + \mathbf{a}' \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + \mathbf{C}''t + \mathbf{a}'' \end{aligned}$$

### 2-7/b Particule liée à un ressort

Une particule de masse  $m$  est suspendue à un ressort de constante  $k$  dans le champ gravitationnel près de la surface de la terre. On pose que seul le mouvement vertical est permis.

**NB** : corps se déplace en **3D** mais avec deux contraintes qui bloc le mouvement en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  donc il possède 1 degré de liberté.

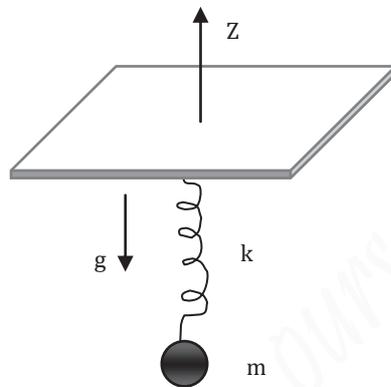


Fig. 2-4/ Particule suspendue à un ressort

\*Energie cinétique :  $\mathbf{T} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{z}}^2$

\*Energie potentielle :  $\mathbf{U} = \frac{1}{2}k(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^2 + mgz$

Donc le Lagrangien du système est :  $\mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{U} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{z}}^2 - \frac{1}{2}k(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^2 - mgz$

L'équation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{z}} &= -k(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) - mg \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right) &= \frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{z}}) = m\ddot{\mathbf{z}} \\ \Rightarrow m\ddot{\mathbf{z}} + k(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + mg &= 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{z}} + \frac{k}{m}\mathbf{z} = \frac{k}{m}\mathbf{z}_0 - g \end{aligned}$$

C'est une équation du deuxième ordre avec second membre, la solution générale est de la forme :

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_h + \mathbf{z}_p$$

$\mathbf{z}_h$  : Solution homogène qui est solution de  $\ddot{\mathbf{z}}_h + \frac{k}{m}\mathbf{z}_h = 0$ .

$\mathbf{z}_p$  : Solution particulière de l'équation  $\ddot{\mathbf{z}}_p + \frac{k}{m}\mathbf{z}_p = \frac{k}{m}\mathbf{z}_0 - g$ .

\*la solution de l'équation homogène est de la forme :

$$\mathbf{z}_h = \mathbf{A}e^{st} \Rightarrow \dot{\mathbf{z}}_h = s(\mathbf{A}e^{st}) = s\mathbf{z}_h \Rightarrow \ddot{\mathbf{z}}_h = s^2\mathbf{z}_h$$

Nous avons alors :  $\ddot{\mathbf{z}}_h + \frac{k}{m}\mathbf{z}_h = \mathbf{0} \Rightarrow s^2\mathbf{z}_h + \frac{k}{m}\mathbf{z}_h = \mathbf{0} \Rightarrow s^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow s = \pm i\omega$  où  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Donc on a :  $\mathbf{z}_h = \mathbf{A}'e^{i\omega t} + \mathbf{B}'e^{-i\omega t} \Rightarrow \mathbf{z}_h = \mathbf{A}\sin(\omega t + \gamma)$ .

$\mathbf{A}$  et  $\gamma$  sont deux constantes d'intégration devant être déterminées par les conditions initiales.

\*le terme non homogène obéit à :

$$\ddot{\mathbf{z}}_p + \frac{k}{m}\mathbf{z}_p = \frac{k}{m}\mathbf{z}_0 - \mathbf{g} = \text{cste} \Rightarrow \mathbf{z}_p = \mathbf{c}$$

alors la solution générale devient :

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_h + \mathbf{z}_p \Rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{A}\sin(\omega t + \gamma) + \mathbf{c}$$

\*calcul de  $\mathbf{c}$  :

$$\ddot{\mathbf{z}} + \frac{k}{m}\mathbf{z} = \frac{k}{m}\mathbf{z}_0 - \mathbf{g}$$

avec :  $\ddot{\mathbf{z}} = \ddot{\mathbf{z}}_h + \mathbf{0} = -\omega^2\mathbf{A}\sin(\omega t + \gamma)$

on obtient :

$$\begin{aligned} -\omega^2\mathbf{A}\sin(\omega t + \gamma) + \left(\frac{k}{m}\right)\mathbf{A}\sin(\omega t + \gamma) + \frac{k}{m}\mathbf{c} &= \frac{k}{m}\mathbf{z}_0 - \mathbf{g} \\ \Rightarrow -\omega^2\mathbf{A}\sin(\omega t + \gamma) + \omega^2\mathbf{A}\sin(\omega t + \gamma) + \frac{k}{m}\mathbf{c} &= \frac{k}{m}\mathbf{z}_0 - \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{z}_0 - \frac{m}{k}\mathbf{g} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}\sin(\omega t + \gamma) + \mathbf{z}_0 - \frac{m}{k}\mathbf{g}$$

## 2-7/c Problème à deux corps

C'est le système fermé le plus simple qui existe, deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ , dont les positions instantanées sont  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  interagissent via un potentiel :

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{U}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Ainsi le Lagrangien s'écrit :

$$\mathbf{L} = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_2^2 - \mathbf{U}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

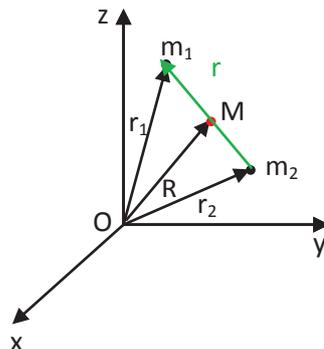


Fig.2-5/Problème à deux corps

Nous avons :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Le barycentre :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} (\mathbf{m}_1 \mathbf{r}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{r}_2)$$

Ainsi :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} \mathbf{r}$$

Calcul des vitesses donne :

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} \dot{\mathbf{r}}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} \dot{\mathbf{r}}$$

Remplaçant dans le Lagrangien on obtient :

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{M}}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mathbf{m}}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{U}(\mathbf{r})$$

avec :

$\mathbf{M} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$  : Masse totale du système.

$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}$  : Masse réduite du système.

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{CM}} + \mathbf{L}_{\text{rel}}$$

\* $\mathbf{L}_{\text{CM}} = \frac{\mathbf{M}}{2} \dot{\mathbf{R}}^2$  (L'énergie cinétique globale du système).

Puisque  $\mathbf{R}$  est une variable cyclique :

$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \right) = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \mathbf{cste} = \mathbf{c} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{L}_{\text{CM}}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{c}$ , (Le barycentre se déplace à une vitesse constante).

\*La deuxième partie est la partie relative  $\mathbf{L}_{\text{rel}} = \frac{\mathbf{m}}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{U}(\mathbf{r})$ , elle apparaît comme le Lagrangien d'une particule de masse  $\mathbf{m}$  et position  $\mathbf{r}$ .

## 2-7/d Le potentiel central

Nous étudions ici un problème à un corps qui est aussi assimilable à celui d'une particule soumise à une force centrée à l'origine. Le Lagrangien du système est de la forme :

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{m}}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{U}(\mathbf{r})$$

$\mathbf{U}(\mathbf{r})$  : Le potentiel central.

**NB** : ce cas peut être aussi le problème du mouvement relatif dans un système à deux corps.

Dans ce cas, la force est dans la direction de  $\mathbf{r}$ . Si le problème de base est un problème à deux corps, alors la force est purement dans la direction de la droite les reliant (cas de l'interaction

gravitationnelle entre deux corps massifs ainsi que l'interaction coulombienne entre deux corps chargés).

Puisque  $\vec{F}$  est purement radiale (aucune composante  $\theta$  et  $\varphi$ ), le torque  $\vec{r} \wedge \vec{F}$  est identiquement nul et par conséquent le moment cinétique est une constante du mouvement.

En effet :  $\dot{\vec{I}} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{P} = \dot{\vec{r}} \wedge m\dot{\vec{r}} = m\dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} \Rightarrow \dot{\vec{I}} = m\dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} + m\dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} = \mathbf{0} + \dot{\vec{r}} \wedge m\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{F} = \mathbf{0}$   
 $\Rightarrow \vec{I} = m\dot{\vec{r}} \wedge \vec{r}$  est un vecteur constant en grandeur et en direction est donc  $\vec{I} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$ .

La conséquence physique est que le mouvement est dans un plan perpendiculaire à  $\vec{I}$ , on choisit  $xOy$ , c.à.d.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $\dot{\theta} = 0$ .

Pour  $\varphi$  :

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

$\varphi$  est une variable cyclique :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = l$$

$l$  : est la longueur du moment cinétique qui pointe ici selon l'axe  $Oz$ , sa valeur est fixée par les conditions initiales.

Pour  $r$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r} \\ m \ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

En  $\varphi$  on a :  $m r^2 \dot{\varphi} = l \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{m r^2}$

En remplace dans l'équation  $r$  :

$$m \ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \Rightarrow m \ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{l^2}{m r^3} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( U + \frac{l^2}{2m r^2} \right) = -\frac{\partial U_{\text{eff}}(r)}{\partial r}$$

$U_{\text{eff}}(r)$  : Potentiel efficace.

Tout se passe donc en  $r$  comme dans une équation à la Newton pour un système à un degré de liberté :

$$m \ddot{r} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}(r)}{\partial r} = F_{\text{eff}}(r)$$

Ce potentiel efficace  $U_{\text{eff}}(r)$  est constitué du potentiel original  $U(r)$  et énergie cinétique de rotation  $T_{z-\text{rot}}$  autour de l'axe  $z$ .

$$T_{z-\text{rot}} = \frac{l^2}{2m r^2}$$

avec

$$l = m r^2 \dot{\varphi}$$

qui représente une répulsion centrifuge : un corps qui tourne par rapport à l'origine  $O$  est effectivement repoussé de l'origine et plus il tourne rapidement c.à.d. plus  $l$  est grand, plus il est repoussé.

## Chapitre3/ Formalisme de Hamilton :

### 3-1 Définition

L'Hamiltonien, joue un grand rôle en mécanique quantique. Comme dans le formalisme de Lagrange, ce formalisme utilise des quantités scalaires comme l'énergie cinétique  $T$  et l'énergie potentielle  $U$ , plutôt que vectorielles comme la force  $\vec{F}$  de Newton. Dans le formalisme de Hamilton, un système mécanique à  $N$  degrés de liberté décrit par les  $q_i$  indépendants mène à  $2N$  équation du premier ordre.

### 3-2 Transformation de Legendre

Cette transformation est souvent utilisée en thermodynamique où elle permet de relier entre eux les différents potentiels thermodynamiques. En mécanique elle permet de définir l'Hamiltonien à partir de Lagrange.

#### 3-2/a Description simplifiée

Soit une fonction  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont deux variables indépendantes dont dépend  $f$ .

On pose :

$$\mathbf{w} = \frac{\partial f(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

La transformation de Legendre permet de définir une fonction  $g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  qui peut remplacer  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  : (1)

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}\mathbf{w} - f$$

On vérifie facilement : (2)

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} + \mathbf{w}d\mathbf{v}$$

De l'équation (1) on obtient : (3)

$$dg = \mathbf{w}d\mathbf{v} + \mathbf{v}d\mathbf{w} - df$$

On remplace  $df$  par sa valeur dans (3): (4)

$$dg = \mathbf{w}d\mathbf{v} + \mathbf{v}d\mathbf{w} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} - \mathbf{w}d\mathbf{v} = \mathbf{v}d\mathbf{w} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} \Rightarrow g = g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

Pour opérationnaliser cette transformation et la disparition de  $\mathbf{v}$  dans  $g$  on doit, à partir de la définition de  $\mathbf{w} = \frac{\partial f(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  pouvoir l'inverser en  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ .

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - f(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u}, \mathbf{w}))$$

Puisque nous avons  $g = g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ , sa différentielle réelle donne : (5)

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{w}} d\mathbf{w}$$

On identifie (5) et (4) :

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \text{ et } \mathbf{v} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{w}} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{\partial g(\mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{v}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

### 3-3 L'Hamiltonien

Posons un Lagrangien  $L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t)$  que nous traiterons comme la fonction  $f$  ci-dessus :

$$L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) \Leftrightarrow f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$\mathbf{q}_i \Leftrightarrow \mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i \Leftrightarrow \mathbf{v}$$

$$\mathbf{P}_i \left( \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) \Leftrightarrow \mathbf{w} \left( = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, t) \Leftrightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

A la place de  $\mathbf{w}$ , nous définissons les moments généralisés (moments canoniques).

$$\mathbf{P}_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \mathbf{P}_i(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, t); i, j = 1, 2 \dots n$$

Un système de  $n$  équations que, comme pour  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$ , nous devons pouvoir inverser pour les  $n$  relations :

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i(\mathbf{q}_j, \mathbf{P}_j, t); i, j = 1, 2 \dots n$$

En analogie avec  $\mathbf{g}$ , nous définissons une fonction des  $\mathbf{q}_i$  est  $\mathbf{P}_i$  que nous noterons  $\mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, t)$ .

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}\mathbf{w} - f$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, t) = \sum_i^n \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{P}_i - L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t)$$

Dans laquelle l'expression est présumé être  $\dot{\mathbf{q}}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, t)$ , nous avons :

$$L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t)$$

$$dL = \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} d\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \text{ avec } \mathbf{P}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}$$

$$(6) \Rightarrow dL = \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i + \sum_i^n \mathbf{P}_i d\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

On calcule  $dH$  à partir de sa définition : (7)

$$dH = \sum_i^n \dot{\mathbf{q}}_i d\mathbf{P}_i + \sum_i^n \mathbf{P}_i d\dot{\mathbf{q}}_i - dL$$

En remplace (6) dans (7) :

$$dH = \sum_i^n \dot{q}_i dP_i + \sum_i^n P_i d\dot{q}_i - \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_i^n P_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$(8) \Rightarrow dH = \sum_i^n \dot{q}_i dP_i - \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \Rightarrow H = H(q_i, P_i, t)$$

Ce qui vérifie que  $H$  est fonction des  $q_i$ ,  $P_i$  et de  $t$ , on peut donc écrire : (9)

$$dH = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

En identifiant les équations (8) et (9) on a :

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \dot{q}_i; n \text{ équations}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}; n \text{ équations}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Si  $H$  ne dépend pas du temps,  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ .

On sait que la trajectoire physique obéit à l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} P_i = \dot{P}_i$$

Ainsi les  $2n$  équations canoniques du moment se liront :

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i}; i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}; i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} 2n$$

Les  $2n$  équations canoniques remplacent les  $n$  équations d'Euler-Lagrange

$$dH = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

On peut calculer sur une trajectoire qui obéit aux équations canoniques :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = - \sum_i^n \dot{P}_i \dot{q}_i + \sum_i^n \dot{q}_i \dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Ainsi, H est une constante du mouvement (ou intégrale première) à moins de dépendre explicitement du temps du temps c'est-à-dire à moins qu'un agent extérieur n'agisse sur le système étudié et ce de façon non constante dans le temps.

### 3-4 Crochets de Poisson et variations canoniques

#### 3-4/a Crochet de Poisson

$\{A, B\}_{q,P}$  est la façon standard de noter une certaine opération qui implique les quantités  $A(q_i, P_i)$  et  $B(q_i, P_i)$  ainsi que l'ensemble de variables canoniques  $(q_i, P_i)$ .

$$\{A, B\}_{q,P} \equiv \sum_i^n \left[ \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial P_i} - \frac{\partial A}{\partial P_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$

Soit une fonction quelconque  $F(q_i, P_i, t)$

$$dF = \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Si cette trajectoire est une trajectoire physique, elle obéit aux équations canoniques de l'Hamiltonien  $H$  du système :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \dot{P}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Et alors :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

En particulier, cette équation permet un calcul facile des constantes du mouvement,  $\partial F/\partial t = 0$ . Par exemple, si F ne dépend pas explicitement du temps c'est-à-dire  $\partial F/\partial t = 0$  alors  $F(q_i, P_i)$  est une constante du mouvement si son crochet de poisson avec  $H$  est nul.

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\}$$

$$\text{si } \{F, H\} = 0 \Rightarrow \frac{dF}{dt} = 0$$

**3-4/b Propriétés du crochet de poisson :**

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= -\{B, A\} \\ \{A, b\} &= 0, b = \text{cste} \\ \{A, B, C\} &= \{A, B\} + \{A, C\} \\ \{A, BC\} &= B\{A, C\} + \{A, B\}C \\ \frac{\partial}{\partial t} \{A, B\} &= \left\{ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right\} \\ \{A, q_i\} &= -\frac{\partial A}{\partial p_i} \\ \{A, p_i\} &= \frac{\partial A}{\partial q_i} \\ \{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} &= 0, \text{L'identité de Jacobi} \end{aligned}$$

**3-4/c Variables Canoniques**

Il existe une famille de résultats intéressants du crochet de poisson. Parmi les plus importants calculons certains de ces crochets entre des variables canoniques : coordonnées et moments :  $\{q_k, q_i\}$ ,  $\{p_k, p_j\}$  et  $\{q_k, p_j\}$  où  $k$  et  $j$  sont fixés.

$$\{q_k, q_i\} = \sum_i^n \left[ \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \right] = 0$$

car les variables canoniques sont indépendantes  $\left( \frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0, \frac{\partial q_k}{\partial p_i} = 0 \right)$ .

\*Pour la même raison :  $\{p_k, p_j\} = 0$

Pour la même raison, mais :

$$\{q_k, p_j\} = \sum_i^n \left[ \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right] = \sum_i^n \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \sum_i^n \delta_{ki} \delta_{ji} = \delta_{kj}$$

où  $\delta_{kj}$  est le delta de Kronecker.

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ces résultats sont très importants parce qu'on peut démontrer que leur inverse est vrais, c'est-à-dire si un ensemble de  $nq_i$  et de  $np_i$  obéit aux relations ci-dessus alors l'ensemble des  $q_i$  et des  $p_i$  constitue un ensemble de variables canoniques.

Une autre utilisation intéressante des crochets de poisson est qu'ils permettent de symétriser les équations canoniques.

Puisqu'il est vrai que pour une fonction quelconque des variables  $(p_i, q_i)$ , soit  $F(p_i, q_i)$ , sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

La chose est certainement vraie pour les  $\mathbf{q}_i$  et les  $\mathbf{P}_i$  eux même et les équations canoniques peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_i &= \{\mathbf{q}_i, \mathbf{H}\} \\ \mathbf{P}_i &= \{\mathbf{P}_i, \mathbf{H}\}\end{aligned}$$

à cause de cette symétrie, on est parfois amené à parler des  $2n$  variables canoniques. Une telle symétrie n'existe pas dans le formalisme Lagrangien entre les  $\mathbf{q}_i$  et les  $\dot{\mathbf{q}}_i$ .

### 3-5 Moment généralisés

On parle des  $\mathbf{P}_i$  comme étant des moments généralisés de la même façon que les  $\mathbf{q}_i$  sont des coordonnées généralisées. Comme les dimensions des  $\mathbf{q}_i$  peuvent être à peu près n'importe quoi il en va de même des  $\mathbf{P}_i$ . Nous avons vus, les  $\mathbf{P}_i$  étaient les composantes de  $\vec{\mathbf{P}}$  :

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{v}}$$

Cette définition n'est pas toujours vraie. En effet lorsque l'interaction dépend des vitesses :

$$\vec{\mathbf{P}} \neq m\vec{\mathbf{v}}$$

En effet on a Lagrangien d'une particule de masse  $m$  et de charge  $e$  dans un champ électromagnétique est, en coordonnées cartésiennes,  $\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  :

$$\mathbf{L} = \frac{m}{2} \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 + e \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i \mathbf{A}_i - e\mathbf{V}$$

Où  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{A}$  sont les potentiels scalaire et vectoriel du champ électromagnétique et dépendant généralement des  $\mathbf{x}_i$  et de  $t$

Définissant les moments généralisés  $\mathbf{P}_i$  :

$$\mathbf{P}_i = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} = m\dot{\mathbf{x}}_i + e\mathbf{A}_i$$

On constate que  $\vec{\mathbf{P}}$  n'est plus  $m\vec{\mathbf{v}}$  mais  $\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{v}} + e\vec{\mathbf{A}}$

Nous avons :

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{P}_i - e\mathbf{A}_i}{m}$$

Avec la définition de  $\mathbf{H} : \sum_i \mathbf{P}_i \dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{L}$ , on obtient :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \sum_i (\mathbf{P}_i - e\mathbf{A}_i)^2 + e\mathbf{V}$$

### 3-6 Transformations canoniques

Une transformation canonique est un changement de variables  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, t)$ ,  $\mathbf{p}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, t)$  tel que les équations de mouvement sont encore des équations canoniques. Il s'agit donc de transformations telles qu'il existe une fonction  $\mathbf{K}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i, t)$  vérifiant :

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{Q}_i}, \quad \frac{d\mathbf{Q}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{P}_i}$$

La fonction  $\mathbf{K}$  est l'équivalent de l'Hamiltonien dans les nouvelles coordonnées.

D'après le principe variationnel l'existence d'une fonction  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i, t)$  vérifiant :

$$\sum_i \mathbf{P}_i \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, t) = \sum_i \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{K}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i, t) + \frac{d\mathbf{F}}{dt}$$

est une condition suffisante sur  $\mathbf{F}$ .

#### 3-6/a Transformation canonique principales (Fonctions généralisées)

Les transformations canoniques principales sont :

1.  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{q}_i, \mathbf{Q}_i, t)$  et on pose :

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad \mathbf{P}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{Q}_i} \text{ et } \mathbf{K} = \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t}$$

2.  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i, t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t) - \sum_i \mathbf{Q}_i \mathbf{p}_i$  et on pose :

$$\mathbf{P}_i = \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad \mathbf{Q}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{p}_i} \text{ et } \mathbf{K} = \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial t}$$

3.  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i, t) = \sum_i \mathbf{q}_i \mathbf{P}_i - \mathbf{F}_3(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, t)$  et on pose :

$$\mathbf{q}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{P}_i}, \quad \mathbf{p}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{P}_i} \text{ et } \mathbf{K} = \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial t}$$

4.  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i, t) = \sum_i \mathbf{p}_i \mathbf{Q}_i - \mathbf{F}_4(\mathbf{P}_i, \mathbf{p}_i, t)$  et on pose :

$$\mathbf{q}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_4}{\partial \mathbf{P}_i}, \quad \mathbf{Q}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_4}{\partial \mathbf{p}_i} \text{ et } \mathbf{K} = \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{F}_4}{\partial t}$$

### 3-7 La méthode de Hamilton-Jacobi :

Soit un Hamiltonien  $\mathbf{H}(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i)$  dépendant de  $2n$  variables canoniques, les  $(\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i)$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

Nous savons que nous pouvons passer à un nouvel ensemble de variables canoniques les  $(\mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i)$  également au nombre de  $2n$  et dont sera fonction un nouvel Hamiltonien  $\mathbf{K}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i)$ .

Le but de la méthode est d'opérer une T.C. telle que les  $(\mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i)$  soient précisément  $2n$  constantes du mouvement :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_i) \text{ -T. C. } \rightarrow (\mathbf{Q}_i, \mathbf{p}_i) \\ \dot{\mathbf{Q}}_i = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}_i} = 0 & \Leftrightarrow \mathbf{Q}_i = \beta_i = \text{constante,} \end{aligned}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \Leftrightarrow p_i = \alpha_i = \text{cstes}$$

T.C. inversée nous donne :

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_j, p_i, t) = q_i(\beta_j, \alpha_j, t) \\ P_i &= P_i(Q_j, p_j, t) = P_i(\beta_j, \alpha_j, t) \end{aligned}$$

On cherche la fonction génératrice qui satisfait l'équation  $K=0$ , la fonction choisie ici est de type  $F_2(q_i, p_i, t)$  donc de type  $F_2(q_i, \alpha_i, t)$  que nous noterons de façon standard  $s(q_i, \alpha_i, t)$  telle que :

$$K(Q_i, p_i, t) = H(q_i, P_i, t) + \frac{\partial s(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} = 0$$

### 3-7/a Equation de Hamilton-Jacobi

On peut écrire :

$$K(Q_1, \dots, Q_n, p_1, \dots, p_n, t) = H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial s}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial s}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0; \left(P_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)$$

Equation différentielle de premier ordre de **H-J**, la solution de l'équation et de la forme :

$$s(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des constantes d'intégration arbitraires  $\alpha_i \equiv p_i$  on trouve :

$$p_i = \frac{\partial s(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i} \text{ et } Q_i = -\frac{\partial s(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} \equiv \beta_i = -\frac{\partial s(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i}$$

#### \*Théorème

Une fonction  $s(q, \alpha, t)$  est une intégrale complète ou solution complète de l'équation **H-J** si  $s$  satisfait l'équation de **H-J** et  $\det \frac{\partial^2 s}{\partial q_i \partial \alpha_i} \neq 0$ .

#### \*Théorème de Jacobi

Si  $s(q, \alpha, t)$  est une intégrale complète de l'équation de **H-J**, alors les :

$$p_i = \frac{\partial s}{\partial q_i}, \beta_i = -\frac{\partial s}{\partial \alpha_i}$$

sont solution des équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

### 3-8 L'espace des phases

L'état d'un système mécanique est connu lorsqu'on se donne la position et la vitesse de chaque particule.

De façon équivalente, il est déterminé par la donnée des coordonnées  $\mathbf{q}_i$  et des impulsions  $\mathbf{p}_i$ ,  $i=1, \dots, N$ .

L'espace à  $2N$  dimension des coordonnées et des impulsions s'appelle l'espace des phases.

#### 3-8/a Portait de phase (système à un degré de liberté)

L'exemple le plus simple est celui des systèmes à un degré de liberté. Dans ce cas, l'espace des phases est un espace à  $2D$ , c'est-à-dire un plan, et les trajectoires sont des courbes dans ce plan.

Dans le cas des systèmes autonomes, c'est-à-dire des systèmes décrits par un Hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps, l'équation des trajectoires est donnée par :

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{E}$$

Une collection d'orbites représentative d'un système s'appelle un portait de phase.

Exemple :

Considérons le pendule simple constitué d'un point matériel fixé à une corde et pouvant tourner autour d'un axe horizontal. C'est un système à un degré de liberté. L'énergie s'écrit :  $\mathbf{T} + \mathbf{U}$

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \\ \mathbf{U} = -m g r \cos \theta \end{cases}$$

$$\mathbf{p}_\theta = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \mathbf{H}(\theta, \mathbf{p}_\theta) = \frac{\mathbf{p}_\theta^2}{2 m r^2} - m g r \cos \theta$$

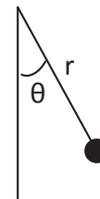


Fig.3-1/ Pendule simple

L'équation  $\mathbf{H}(\theta, \mathbf{p}_\theta) = \mathbf{E}$  conduit à  $\mathbf{p}_\theta = \pm \sqrt{2 m r^2 (\mathbf{E} + m g r \cos \theta)}$

Deux cas de figure sont à distinguer :

- $-m g r \leq \mathbf{E} < m g r$  : pour que la racine définie, il faut que  $\mathbf{E} + m g r \cos \theta > 0 \Rightarrow \cos \theta > -\frac{\mathbf{E}}{m g r} \Rightarrow -\hat{\theta} < \theta < \hat{\theta}$  avec  $\cos \hat{\theta} = -\frac{\mathbf{E}}{m g r}$

Les orbites sont alors des courbes fermées. Le pendule oscille autour de sa position d'équilibre. Lorsque  $\mathbf{E}$  se rapproche de sa valeur minimale  $-m g r$ ,  $\hat{\theta} \rightarrow 0$ . L'amplitude des oscillations est très faible. Par contre, lorsque  $\mathbf{E}$  se rapproche de  $m g r$ ,  $\hat{\theta} \rightarrow \pi$ , et l'amplitude des oscillations est proche de  $2\pi$ .

- $\mathbf{E} > m g r$  :  $\mathbf{P}_\theta$  ne s'annule jamais et garde toujours le même signe. Le pendule tourne indéfiniment. Il est alors plus naturel de considéré  $\theta$  comme une variable allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

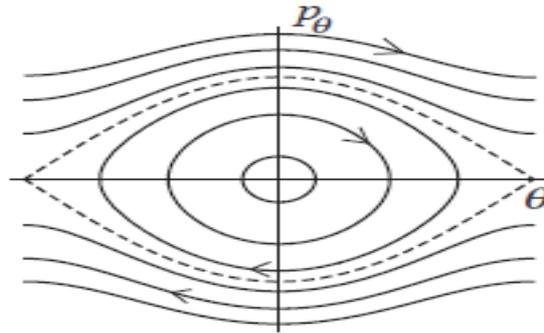


Fig.3-2/ portrait de phase d'un pendule simple

### 3-9 Variables angles-actions

Il est possible de définir des variables canoniques pour un mouvement périodique ou quasi périodique, les variables angles-actions.

Si on considère un système fermé périodique à 1 degré de liberté. Ce système peut montrer deux types de mouvement périodique, l'oscillation et la rotation.



Fig.3-3/ Espace des phases pour deux types de mouvement périodique.

- 1- L'oscillation:  $\mathbf{q}(t)$  et  $\mathbf{p}(t)$  sont alors des fonctions périodiques de même fréquence. Dans l'espace des phases, la trajectoire  $y$  est décrite par une courbe fermée.
- 2- La rotation (ou circulation):  $\mathbf{q}(t)$  n'est pas périodique (dans le sens  $\mathbf{q}(t) \neq \mathbf{A} \sin(\omega t + \theta)$ ) mais le système est invariant par translation  $\mathbf{q} + \mathbf{q}_0$ : Le moment conjugué  $\mathbf{p}(t)$  reste borné. La trajectoire dans l'espace des phases est ouverte mais  $\mathbf{q}_0$ -périodique.

Pour un système à  $n$  degrés de liberté, le mouvement sera appelé périodique si la projection de la trajectoire dans le plan défini par chacun des couples de variables  $(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$  est périodique.

On dit d'un système qu'il est simplement périodique, si toutes les périodes  $T_i$  associées aux degrés de liberté  $\mathbf{q}_i$  sont égales. Autrement, on parle de mouvement multiplément périodique ou quasi-périodique.

On a affaire à des systèmes pour lesquels toutes les valeurs que peuvent prendre  $\mathbf{q}_i$  et  $\mathbf{p}_i$ , l'espace des phases, est borné. Qui plus est, un mouvement périodique implique que le système est invariant par translation dans le temps, c'est-à-dire que l'Hamiltonien  $H$  est une constante du mouvement.

La méthode de Hamilton-Jacobi peut servir à déterminer la transformation canonique appropriée à celle définie dans l'approche 2. Les nouveaux moments vérifient

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

et pour un système périodique

$$\dot{Q}_i = -\frac{\partial K}{\partial p_i} = \omega_i$$

$$K = H(\mathbf{p}_i) = \text{constante}$$

où  $\omega_i$  sont également des invariants, puisque toutes les  $Q_i$  sont cycliques et  $H$  ne dépend pas explicitement du temps. On trouve alors

$$Q_i = \gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i \text{ (dépendance linéaire)}$$

$$p_i = \alpha_i = \text{constant}$$

### 3-9/a Variables d'angles

On sait que les  $Q_i$  varient linéairement avec le temps. Puisque on s'intéresse ici à de systèmes (quasi-)périodiques, ne balayant qu'une partie finie (bornée) de l'espace des phases, cela n'implique que les variables  $Q_i$  qu'il est possible de les ramener à des variables de type « angle » variant de  $0$  à  $2\pi$ .

On peut donc dire que les angles  $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  résident sur un hypertore de dimension  $n$ , noté  $\mathbf{T}^n$  dont les rayons dépendent de  $\mathbf{p}_i = \boldsymbol{\alpha}_i$  et donc sont des constantes. Un hypertore de dimension  $n$  est peut être vu comme le produit tensoriel de  $n$  cercles. Autrement dit, un point quelconque  $\mathbf{Q}$  sur ce hypertore  $\mathbf{T}^n$  est caractérisé par  $n$  angles  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , où  $\gamma_i$  est l'angle sur le cercle  $i$  de rayon  $R_i$ .

### 3-9/b Variables d'action

Pour les systèmes conservatifs périodiques, nous avons vu que les nouvelles variables  $Q_i$  doivent être des angles  $g_i$ , tel que  $0 \leq \gamma_i \leq 2\pi$ . Si c'est le cas, les moments  $p_i$  sont des moments angulaires et les  $\omega_i$ , des fréquences angulaires

$$\omega_i(\mathbf{p}_i) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Les variables  $p_i$  ont des dimensions d'une énergie divisée par une fréquence angulaire, c'est à dire les dimensions d'un moment cinétique ou de l'action. Il est donc approprié de désigner  $p_i$  comme des « variables d'actions » et pour mettre en évidence qu'il s'agit de moments cinétiques, nous les dénoterons par  $I_i = p_i$ .

### Cas d'un système à 1 degré de liberté

L'espace des phases est de dimension 2 et l'on cherche la transformation canonique telle que les nouvelles variables vérifient

$$\gamma(t) = \omega t + \beta$$

$$I(t) = I$$

c'est à dire, soient respectivement un angle  $\gamma$  variant linéairement dans le temps et une action  $I$  constante.

L'Hamiltonien d'un tel système s'écrit toujours

$$H = \frac{p^2}{2m} - V(q)$$

Puisque nous ne nous intéressons qu'à des systèmes périodiques, cela signifie que l'espace des phases est borné et donc, que le portrait de phase engendré par l'ensemble des contours

$$P(q) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}$$

dessine une aire  $A(E)$  pour une énergie  $E$  donnée du système

$$\iint_A dq dP = \iint_A dQ dp$$

et

$$\iint_A dq dP = \oint_{\Gamma} P dq \quad (7^*) \text{ à démontrer}$$

où  $\Gamma$  est un contour fermé de l'espace des phases, orienté dans le sens gauche ou indirect.

Utilisant ces propriétés et le fait que  $\gamma$  est un angle variant entre  $0$  et  $2\pi$  tandis que  $I$  doit être un invariant, on obtient

$$A(E) = \oint_{\Gamma} P dq = \oint_{\Gamma} I d\gamma = I \int_0^{2\pi} d\gamma = I 2\pi$$

c'est à dire l'expression suivante pour la variable action

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} P dq$$

### Démonstration de (7\*)

Nous avons

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \vec{A}) d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{\ell}$$

où  $\Sigma$  est une surface délimitée par un contour fermé  $\Gamma$  orienté dans le sens direct. Prenons le cas 2D où  $d\vec{S} = dx dy \vec{k}$ ,

$d\vec{\ell} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$  et  $\vec{A} = (-y, x, 0)/2$ . Alors  $\nabla \wedge \vec{A} = (0, 0, 1)$  et on obtient

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \vec{A}) d\vec{S} = \iint_{\Sigma} dx dy$$

et on a

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{2}$$

D'autre par on a

$$\oint_{\Gamma} d(xy) = xy|_M^M = 0$$

$$= \oint_{\Gamma} \mathbf{x}dy + \mathbf{y}dx \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{x}dy = - \oint_{\Gamma} \mathbf{y}dx$$

et on obtient finalement

$$\iint_{\Sigma} dxdy = \oint_{\Gamma} \mathbf{x}dy = - \oint_{\Gamma} \mathbf{y}dx$$

### Exemple : Chute libre 1D

Soit une particule de masse  $m$  en chute libre dans un champ de gravitation  $\mathbf{g}$ , rebondissant sur le sol de façon élastique. Le Hamiltonien s'écrit :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - mgq$$

et le portrait de phase est décrit par les courbes

$$\mathbf{P}(q, E) = \pm \sqrt{2m(E - mgq)}$$

La solution négative correspond à la chute depuis une altitude  $q_0 = E/mg$ , la solution positive au rebond depuis  $q = 0$  jusqu'à  $q_0$ , formant ainsi un contour fermé  $\Gamma$  parcouru dans le sens gauche. La variable action est alors

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}(q) dq = \frac{2}{2\pi} \int_0^{q_0} \sqrt{2m(E - mgq)} dq = \frac{2}{3\pi g} \sqrt{\frac{2}{m}} E^{3/2}$$

La variable angle est  $\gamma(t) = \omega t + \beta$ , où la pulsation est donnée par  $\omega = \partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{I}$ . Il faut donc exprimer d'abord  $\mathbf{H}(\mathbf{I})$ . Par inversion de l'expression de  $\mathbf{I}$ , on obtient

$$\mathbf{H}(\mathbf{I}) = \left( \frac{9\pi^2 mg^2}{8} \right)^{1/3} \mathbf{I}^{2/3}$$

d'où une pulsation

$$\omega = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{I}} = \pi g \sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Si l'on veut  $\gamma(q, \mathbf{P})$  et  $\mathbf{I}(q, \mathbf{P})$  il suffit de remplacer  $E$  par  $\mathbf{H}(q, \mathbf{p})$  dans leurs expressions. Inversement, pour revenir aux variables  $(q, \mathbf{p})$ , il suffit de connaître  $q(\gamma, \mathbf{P})$  puisqu'on a déjà  $\mathbf{p}(q, E)$  et  $E(\mathbf{I})$ . L'équation canonique de Hamilton  $\dot{q} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{P}}$  peut se réécrire :

$$\gamma - \beta = \int_0^t \omega dt = \omega \int_{q=0}^q \frac{dq}{\dot{q}} = \omega \int_{q=0}^q \frac{dq}{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{P}}} = \frac{\pi}{2} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \pi(\sqrt{1-u} - 1)$$

avec  $u = mgq/E = q/q_0$ . On obtient ainsi la relation recherchée

$$q(\gamma, \mathbf{I}) = \frac{E(\mathbf{I})}{mg} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\gamma - \beta}{\pi} \right)^2 \right]$$

Plus usuellement, cette expression est équivalente à  $\mathbf{q}(\mathbf{t}) = -\frac{1}{2} \mathbf{g}\mathbf{t}^2 + \mathbf{a}\mathbf{t} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  devant être déterminées par les conditions initiales (ici on a arbitrairement choisi  $\mathbf{q}(\mathbf{t} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ).

## Chapitre4/ Mouvement d'un solide indéformable

### 4-1 Définition

Un solide (**S**) est indéformable si la distance entre deux points quelconques qui le compose est indépendante du temps quelque soit le mouvement de ces points.

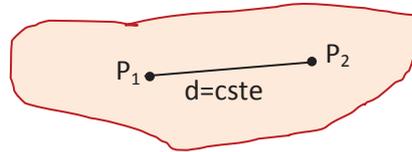


Fig.4-1/ Solide indéformable

### 4-2 Degrés de liberté d'un solide

Dans un espace vide, un corps qui ne serait lié à aucun autre corps pourrait être déplacé de tous sens et de tous cotés.

Par rapport aux axes orthogonaux il posséderait, alors 6 degrés de liberté.

Table 4-1/Mouvements possibles d'un S.I

Translation (T)	Rotation (R)
$T_x$ (2sens $\Leftrightarrow$ 1D.L.)	$R_x$ (2sens $\Leftrightarrow$ 1D.L.)
$T_y$ (2sens $\Leftrightarrow$ 1D.L.)	$R_y$ (2sens $\Leftrightarrow$ 1D.L.)
$T_z$ (2sens $\Leftrightarrow$ 1D.L.)	$R_z$ (2sens $\Leftrightarrow$ 1D.L.)
TOT = 3 D.L.	TOT = 3 D.L.
6 Degrés de liberté	

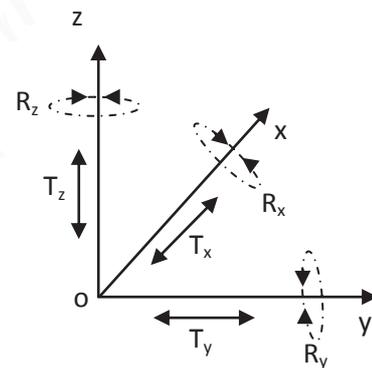


Fig.4-2/ Les 12 possibilités de mouvement d'un solide indéformable ( $\equiv$  6 D.L.)

Une liaison entre deux corps supprime au moins un degré de liberté.

#### Exemple

Une liaison ponctuelle supprime  $T_y$  :  $T_y = 0 \Rightarrow \exists F_y$  qui empêche cette translation par rapport à  $y$ .

$F_y$  est appelée degré de liaison.

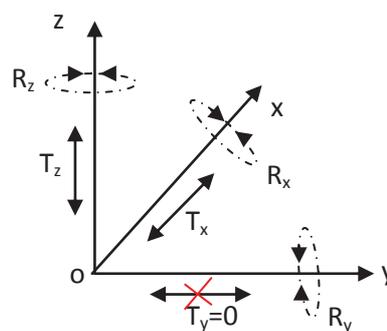


Fig.3-3/ Solide indéformable à 5 degrés de liberté

**Loi de la dynamique**

Pour tout système de point matériels, le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

et le théorème du centre de masse :

$$\mathbf{M} \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

On constate que pour un solide indéformable il ya 3 équations de mouvement pour le théorème du moment cinétique et 3 équations de mouvement pour le théorème du centre de masse avec 6 coordonnées indépendantes en générale. Par conséquent ces équations suffisent pour décrire la dynamique d'un solide indéformable. En mécanique il est utile d'utilisé le centre de masse.

Le théorème du moment cinétique à une variante telle que :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \text{ avec } \vec{L}_G = \sum_i \{ \vec{GP}_i \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{GP}_i) \} \text{ et } \vec{M}_G^{\text{ext}} = \sum_i \{ \vec{GP}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} \}$$

→ (5\*) à démontrer

**Démonstration (5\*)**

$$\vec{L}_O = \sum_i \{ m_i \vec{OP}_i \wedge (\vec{V}_G + (\vec{\omega} \wedge \vec{GP}_i)) \} = \sum_i \{ m_i (\vec{OG} + \vec{GP}_i) \wedge (\vec{V}_G + (\vec{\omega} \wedge \vec{GP}_i)) \}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = \vec{OG} \wedge M \vec{V}_G + \sum_i \vec{GP}_i \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{GP}_i) + \vec{OG} \wedge \left( \vec{\omega} \wedge \sum_i m_i \vec{GP}_i \right) + \sum_i m_i \vec{GP}_i \wedge \vec{V}_G$$

Nous avons : (voire chapitre 1)

$$\sum_i m_i \vec{GP}_i = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G + \vec{L}_G$$

Dérivons le résultat par rapport à t

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = M \frac{d\vec{OG}}{dt} \wedge \vec{V}_G + \vec{OG} \wedge M \frac{d\vec{V}_G}{dt} + \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

Nous avons :

$$\frac{d\vec{OG}}{dt} = \vec{V}_G \text{ et } M \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

Alors on obtient l'équation (1)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

D'autre part :

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \sum_i \{\overrightarrow{OP}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}\} = \sum_i \{(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}_i) \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}\} = \overrightarrow{OG} \wedge \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \{\overrightarrow{GP}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}\}$$

Nous avons :

$$\vec{M}_G^{\text{ext}} = \sum_i \{\overrightarrow{GP}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}\}$$

Alors on obtient l'équation (2) :

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \overrightarrow{OG} \wedge \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

Par identification de (1) et (2) on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \wedge \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \overrightarrow{OG} \wedge \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{M}_G^{\text{ext}} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \vec{M}_G^{\text{ext}} \end{aligned}$$

### 4-3 Moment cinétique du solide

Le moment cinétique en  $G$  :

$$\vec{L}_G = \sum_i \{\overrightarrow{GP}_i \wedge m_i(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GP}_i)\}$$

Nous avons  $\mathbf{m}_i$  et  $\vec{P}_i$  définissent la forme de l'objet,  $\vec{\omega}$  caractérise la vitesse angulaire de l'objet.

Sachant que :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Donc on a :

$$\vec{L}_G = \sum_i m_i [(\overrightarrow{GP}_i \cdot \overrightarrow{GP}_i) \vec{\omega} - (\overrightarrow{GP}_i \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{GP}_i]$$

Soit  $(G, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  un repère lié au solide et on projette la relation  $\vec{L}_G$  sur  $\vec{e}_\alpha$  ( $\vec{L}_G = L_G \vec{e}_\alpha$ ).

La projection de  $\vec{L}_G$  dans la direction de  $\vec{e}_\alpha$  donne :

$$\vec{L}_{G,\alpha} = \sum_i m_i \left[ \overrightarrow{GP}_i^2 \omega_\alpha - \sum_\beta (\overrightarrow{GP}_i \cdot \vec{\omega}_\beta) \overrightarrow{GP}_{i,\alpha} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{G,\alpha} = \sum_i m_i \left[ \overline{GP_i}^2 \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} \omega_\beta - \sum_\beta (GP_{i,\beta} \cdot \omega_\beta) GP_{i,\alpha} \right]$$

$\delta_{\alpha\beta}$  : Delta de Kronecker  $\begin{cases} \delta_{\alpha\beta} = 1 \text{ si } \alpha = \beta \\ \delta_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{L}_{G,\alpha} = \sum_\beta \sum_i m_i \left[ \overline{GP_i}^2 \delta_{\alpha\beta} - GP_{i,\beta} GP_{i,\alpha} \right] \omega_\beta$$

$$\Rightarrow L_{G,\alpha} = \sum_\beta I_{\alpha\beta} \omega_\beta \text{ avec } I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[ \overline{GP_i}^2 \delta_{\alpha\beta} - GP_{i,\beta} GP_{i,\alpha} \right]$$

#### 4-4 Axes Principaux et Tenseur d'inertie

Nous avons :

$$L_{G,\alpha} = \sum_\beta I_{\alpha\beta} \omega_\beta, I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[ \overline{GP_i}^2 \delta_{\alpha\beta} - GP_{i,\beta} GP_{i,\alpha} \right]$$

La relation entre  $L_G$  et la vitesse angulaire  $\omega$  est une relation tensorielle et  $I_G$  est un tenseur. Quand on parle en termes de composantes on peut écrire les composantes du tenseur qui forme une matrice et donc on a une notation matricielle  $3 \times 3$  :

$$L_G = I_G \omega = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$I_G$  : Tenseur d'inertie.

On peut vérifier facilement que  $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ , la matrice est symétrique. Ce qui implique mathématiquement qu'elle est diagonalisable.

#### Propriété mathématique

Il existe toujours un repère tel que :

$$L_G = I_G \omega = \begin{pmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Un tel repère, lié au solide, s'appelle **un repère d'inertie** et les directions qui définissent ce repère (les vecteurs du repère) sont appelées **les axes principaux d'inertie**.

#### Propriété du moment cinétique et la vitesse angulaire

Nous avons :

$$\vec{L}_G = I_G \vec{\omega}$$

On vérifie si  $\vec{L}_G$  et  $\vec{\omega}$  sont deux vecteurs colinéaire (parallèles).

Les composantes de  $\vec{L}_G$  donnent :

$$\begin{pmatrix} L_{G1} \\ L_{G2} \\ L_{G3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G1} \omega_1 \\ I_{G2} \omega_2 \\ I_{G3} \omega_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Si  $\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = \lambda \vec{B}$

- Si et seulement si un  $\omega_i \neq 0$ . Il faut que la vitesse angulaire soit le long d'un axe principal d'inertie.
- Pour le cas particulier où  $I_{G1} = I_{G2} = I_{G3}$ , alors n'importe quelle direction est un axe principal d'inertie.

### Moment d'inertie

Soit un solide (S) qui tourne autour d'un axe  $\Delta$  fixe, pris comme 3<sup>ème</sup> axe de coordonnée.

Nous avons :

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i [\overline{GP_i}^2 \delta_{\alpha\beta} - GP_{i,\beta} GP_{i,\alpha}] \text{ avec } \alpha = 3 \text{ et } \beta = 3$$

$$\Rightarrow I_{33} = \sum_i m_i [\overline{GP_i}^2 \delta_{33} - GP_{i,3} GP_{i,3}] = \sum_i m_i [GP_{i,1}^2 + GP_{i,2}^2 + GP_{i,3}^2 - GP_{i,3}^2]$$

$$\Rightarrow I_{33} = \sum_i m_i [GP_{i,1}^2 + GP_{i,2}^2]$$

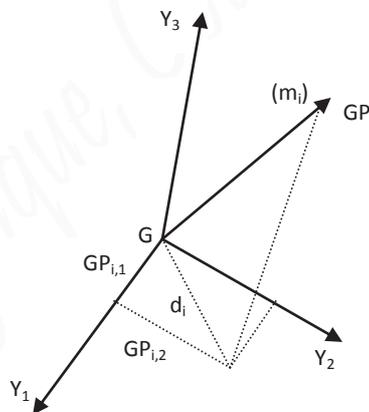


Fig.4-4/ Axe Principal d'Inertie

$d_i$  : la distance de la masse  $m_i$  par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) :

$$d_i^2 = GP_{i,1}^2 + GP_{i,2}^2 \Rightarrow I_{\Delta} = \sum_i m_i d_i^2$$

On en déduit que les termes diagonaux du tenseur d'inertie ( $I_{G1}$ ,  $I_{G2}$ ,  $I_{G3}$ ) sont des moments d'inertie.

#### 4-5 Energie Cinétique :

Soit un solide (S) qui tourne autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) chaque point matériel du solide décrit un cercle (chaque masse  $m_i$  a un mouvement circulaire de rayon  $d_i$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ ). L'énergie cinétique du solide est donnée par :

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_i m_i (d_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i d_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$$

#### 4-6 Approche vectoriel et équations d'Euler

Soit un solide (disque), un référentiel d'Inertie matérialisé par un système d'axes  $(O, x_1, x_2, x_3)$  et soit un repère d'inertie  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

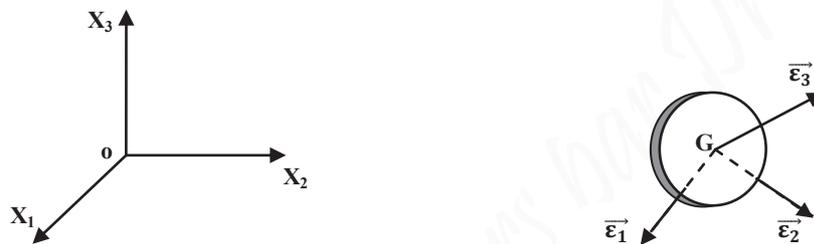


Fig.4-7/ Représentation d'un disque plein lié à un repère d'inertie dans un système d'axes

$\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont dans le plan du disque,  $\vec{e}_3$  sur l'axe de symétrie.

On a donc le tenseur qui sera diagonal par rapport à ce repère.

On applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

Si on exprime de façon matricielle, le moment cinétique :

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

On a :  $\vec{L}_G = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3$

La dérivée de  $\vec{L}_G$  par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_1 \dot{\omega}_1 \vec{e}_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \vec{e}_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \vec{e}_3 + I_1 \omega_1 \dot{\vec{e}}_1 + I_2 \omega_2 \dot{\vec{e}}_2 + I_3 \omega_3 \dot{\vec{e}}_3$$

On utilise les formules de poisson pour calculer la dérivée de  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  :

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_1 = \omega \wedge \vec{e}_1 \\ \dot{\vec{e}}_2 = \omega \wedge \vec{e}_2 \\ \dot{\vec{e}}_3 = \omega \wedge \vec{e}_3 \end{cases}$$

Le développement de ces trois relations donne :

$$\begin{aligned}\vec{\dot{\epsilon}}_1 &= \boldsymbol{\omega} \wedge \vec{\epsilon}_1 = (\omega_1 \vec{\epsilon}_1 + \omega_2 \vec{\epsilon}_2 + \omega_3 \vec{\epsilon}_3) \wedge \vec{\epsilon}_1 \\ \Rightarrow \vec{\dot{\epsilon}}_1 &= \omega_1 (\vec{\epsilon}_1 \wedge \vec{\epsilon}_1) + \omega_2 (\vec{\epsilon}_2 \wedge \vec{\epsilon}_1) + \omega_3 (\vec{\epsilon}_3 \wedge \vec{\epsilon}_1) \\ &\Rightarrow \vec{\dot{\epsilon}}_1 = -\omega_2 \vec{\epsilon}_3 + \omega_3 \vec{\epsilon}_2\end{aligned}$$

De la même façon on trouve :

$$\begin{aligned}\vec{\dot{\epsilon}}_2 &= -\omega_3 \vec{\epsilon}_1 + \omega_1 \vec{\epsilon}_3 \\ \vec{\dot{\epsilon}}_3 &= -\omega_1 \vec{\epsilon}_2 + \omega_2 \vec{\epsilon}_1\end{aligned}$$

On remplace les termes trouvés dans les résultats de la dérivée de  $\vec{L}_G$  par rapport à  $t$  :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_G}{dt} &= I_1 \dot{\omega}_1 \vec{\epsilon}_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \vec{\epsilon}_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \vec{\epsilon}_3 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \vec{\epsilon}_1 + (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_3 \vec{\epsilon}_2 \\ &\quad + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 \vec{\epsilon}_3\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

On peut projeter les moments extérieurs en  $G$ , pour obtenir les composantes  $M_1, M_2, M_3$  :

$$\vec{M}_G^{\text{ext}} = M_1 \vec{\epsilon}_1 + M_2 \vec{\epsilon}_2 + M_3 \vec{\epsilon}_3$$

Si on regroupe les termes on aura trois équations de mouvement connues comme étant les équations d'Euler :

$$M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3$$

$$M_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_3$$

$$M_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1$$

#### 4-7 Approche Lagrangienne et angles d'Euler

Les angles d'Euler sont les trois angles introduits par Leonard Euler (1707-1783) pour décrire l'orientation d'un solide.

Le système fixe est indiqué en bleu ( $x, y, z$ ), le système mobile en rouge ( $X, Y, Z$ ) et la ligne des nœuds en vert ( $N$ ).

Les angles d'Euler sont notés  $\alpha, \beta, \gamma$ .

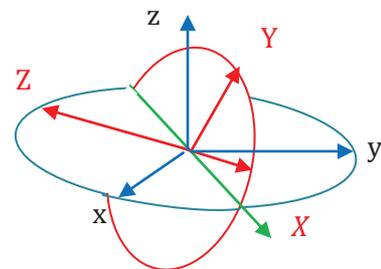


Fig.4-5/ Les angles d'Euler

#### 4-7/a Les rotations d'Euler :

Ce sont les trois rotations obtenues en changeant un des trois angles d'Euler et en gardant les deux autres constants. Ces trois rotations sont la précession, la nutation et la rotation propre. On passe du référentiel  $(\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  au référentiel lié au solide  $(\mathbf{o}, \mathbf{\hat{x}}, \mathbf{\hat{y}}, \mathbf{\hat{z}})$  par trois rotations successives. (Figure 6)

- La précession  $\psi$ , autour de l'axe  $\mathbf{Oz}$ , fait passer de  $(\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  au référentiel  $(\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z})$  (en bleu).
- La nutation  $\theta$ , autour de  $\mathbf{Ou}$  ou ligne de nœuds, fait passer de  $(\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z})$  à  $(\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{\hat{z}})$  (en vert).
- La rotation propre  $\varphi$ , ou giration, autour de l'axe  $\mathbf{O\hat{z}}$ , fait passer de  $(\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{\hat{z}})$  au référentiel lié au solide  $(\mathbf{o}, \mathbf{\hat{x}}, \mathbf{\hat{y}}, \mathbf{\hat{z}})$  (en rouge)

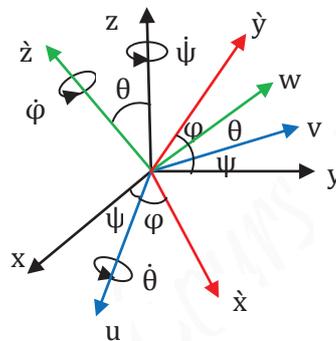


Fig.4-6/ Les rotations d'Euler

On peut également passer du référentiel fixe  $(\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  au référentiel lié au solide  $(\mathbf{o}, \mathbf{\hat{x}}, \mathbf{\hat{y}}, \mathbf{\hat{z}})$  par les trois rotations successives suivantes, ayant toutes leurs axes fixes dans le référentiel initial : (Figure 5)

- Une rotation d'angle  $\varphi$  d'axe  $\mathbf{Oz}$ .
- Une rotation d'angle  $\theta$  d'axe  $\mathbf{Ox}$ .
- Une rotation d'angle  $\psi$  d'axe  $\mathbf{Oz}$ .

#### 4-8 Toupie symétrique

La toupie est un jouet destiné à tourner sur lui-même le plus longtemps possible, en équilibre sur sa pointe.

##### 4-8/a Etude d'une Toupie symétrique

Dans un repère fixe de l'espace (Galiléen) la position et la vitesse de la toupie sont définies à l'aide des angles d'Euler et leurs dérivées temporelles.

Soit le repère orthonormé défini par  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$  ou les vecteurs  $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$  sont des vecteurs unitaires portés par les axes orthogonaux  $\mathbf{Ox}, \mathbf{Oy}, \mathbf{Oz}$  et définissant une base orthonormée du repère fixe où l'on va déterminer le mouvement de la toupie.

Lors du mouvement de la toupie, le repère  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$  est transformé en  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$  à chaque instant puisque le point  $\mathbf{o}$  est resté fixe par hypothèse.

Cette transformation est combinaison de trois rotations décrites par les angles d'Euler (Figure 6)

- Rotation d'un angle  $(\psi)$  autour de la verticale  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{k}})$  dans le plan  $(\mathbf{Oxy})$  ramenant l'axe  $(\mathbf{Ox})$  et donc le vecteur  $\vec{\mathbf{i}}$  sur l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{i}})$ , et l'axe  $(\mathbf{Oy})$  c'est-à-dire  $(\vec{\mathbf{j}})$  sur l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{j}})$ .
- Rotation d'un angle  $(\theta)$  autour de l'horizontale  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{i}})$  dans le plan  $(\mathbf{Oyz})$  ramenant l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{j}})$ , sur l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{j}})$  et l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{k}})$  sur l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_3)$ .
- Rotation d'un angle  $(\varphi)$  autour de l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_3)$  dans le plan  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$  ramenant l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{i}})$ , sur l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1)$  et l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{j}})$  sur l'axe  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_2)$ .

#### 4-8/b Vitesse angulaire instantanée ( $\vec{\Omega}$ )

Nous avons :

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{\mathbf{k}} + \dot{\theta}\vec{\mathbf{i}} + \dot{\varphi}\vec{\mathbf{e}}_3$$

Il est possible d'exprimer  $\vec{\Omega}$  dans le repère  $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$  pour cela, on a les rotations de passage :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{i}} &= \cos\psi\vec{\mathbf{i}} + \sin\psi\vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{e}}_3 &= -\sin\theta\vec{\mathbf{j}} + \cos\theta\vec{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{j}} &= -\sin\psi\vec{\mathbf{i}} + \cos\psi\vec{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\vec{\mathbf{e}}_3 = \sin\psi\sin\theta\vec{\mathbf{i}} - \cos\psi\sin\theta\vec{\mathbf{j}} + \cos\theta\vec{\mathbf{k}}$$

Le remplacement des expressions de  $\vec{\mathbf{i}}$  et de  $\vec{\mathbf{e}}_3$  dans  $\vec{\Omega}$  fournit finalement : relation (3)

$$\vec{\Omega} = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta)\vec{\mathbf{i}} + (\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta)\vec{\mathbf{j}} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\vec{\mathbf{k}}$$

#### 4-8/c Tenseur moment d'inertie ( $\mathbf{I}$ )

Dans notre cas le tenseur d'inertie est de la forme :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

La toupie étant symétrique dans une rotation autour de  $\mathbf{o}\vec{e}_3$ , on a  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$ .

Donc : relation (4)

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}$$

#### 4-8/d Energie cinétique

Nous avons:

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2} \mathbf{I} \Omega^2$$

On peut écrire : puisque  $\mathbf{I}$  est un tenseur et  $\Omega$  est une matrice  $1 \times 1$  on a :

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2} \Omega^T [\mathbf{I}] \Omega$$

Où  $\Omega^T$  est la transposée du vecteur vitesse angulaire, c'est-à-dire ce vecteur écrit sous forme d'une matrice ligne :

$$\Omega^T = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$

D'après les relations (1) et (2) il vient :

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2} [\mathbf{I}_1(\omega_1 + \omega_2) + \mathbf{I}_1(\omega_1)]$$

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2} [\mathbf{I}_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \mathbf{I}_3(\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2]$$

## Chapitre5/ Mécanique Lagrangienne des milieux continus

### 5-1 Le passage à la limite continue (cas simple : corde élastique en 1D)

#### 5-1/a Milieu continu

Si l'on regarde la matière de très près (échelle nanoscopique), la matière est granulaire, faite de molécules mais à l'œil nu (donc en se plaçant à notre échelle), un objet solide semble continu, c'est-à-dire que ses propriétés semblent varier progressivement sans à coups.

Le milieu continu peut être :

- Homogène : ses propriétés sont les mêmes en tout point.
- Isotrope : ses propriétés ne dépendent pas du repère dans lequel elles sont observées ou mesurées.

Pour nous aider à comprendre le passage à la limite continue, commençons par un cas plus simple : une corde continue de longueur  $l$  tendue à ses deux extrémités le long de l'axe des  $x$ . Supposons que nous discrétisons cette corde en la représentant comme une suite de  $N$  masses  $m$ .

Les interactions sont présumées ici de type harmonique (ce qui est souvent vrai au voisinage de la position d'équilibre) et nous les modéliserons en imaginant les masses reliées entre elles par des ressorts de constante  $k$ .

Les ressorts sont de masses négligeables.

A chaque masse  $m_i$ , on définit une coordonnée généralisée  $q_i(t)$  qui décrit le déplacement de  $m_i$  par rapport à sa position d'équilibre.

Par extension, on assigne les indices  $i = 0$  et  $i = N+1$  aux deux extrémités de la corde. A l'équilibre, la distance entre deux masses est simplement  $a = \frac{l}{N+1}$

Formulation Lagrangienne :

$$L = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2 \right]$$

$N$  équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m \ddot{q}_i$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -k(q_i - q_{i-1} - q_{i+1} + q_i) = k(q_{i+1} + q_{i-1} - 2q_i)$$

d'où

$$m \ddot{q}_i - k(q_{i+1} + q_{i-1} - 2q_i) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_i - \frac{k}{m} (q_{i+1} + q_{i-1} - 2q_i) = 0 \rightarrow (6^*) \text{ à démontrer}$$

**Démonstration (6\*)**

Soit  $\mathbf{x}_{i+1}$  et  $\mathbf{x}_i$  on a: **(1)**

$$(\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_i)^2 = \mathbf{x}_{i+1}^2 + \mathbf{x}_i^2 - 2\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{i+1}$$

On pose :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{a}$$

On remplace dans **(1)** : **(2)**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1}^2 + \mathbf{x}_i^2 - 2\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{i+1} &= (\mathbf{x}_i + \mathbf{a})^2 + \mathbf{x}_i^2 - 2\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i + \mathbf{a}) \\ \Rightarrow \mathbf{x}_{i+1}^2 + \mathbf{x}_i^2 - 2\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i^2 + \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{x}_i\mathbf{a} + \mathbf{x}_i^2 - 2\mathbf{x}_i^2 - 2\mathbf{x}_i\mathbf{a} \end{aligned}$$

On dérive **(2)** par rapport a  $\mathbf{x}_i$  on obtient :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}_i + 2\mathbf{a} + 2\mathbf{x}_i - 4\mathbf{x}_i - 2\mathbf{a} &= 4\mathbf{x}_i + 2\mathbf{a} - 2\mathbf{x}_i - 2\mathbf{x}_i - 2\mathbf{a} \\ &= 4\mathbf{x}_i - 2(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) - 2(\mathbf{x}_i + \mathbf{a}) \\ &= 4\mathbf{x}_i - 2\mathbf{x}_{i-1} - 2\mathbf{x}_{i+1} \\ &= 2(2\mathbf{x}_i - 2\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}) \end{aligned}$$

La limite continue consiste à faire tendre  $\mathbf{N} \rightarrow \infty$  dans cette limite la distance entre deux masses  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$  et  $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{a}} \rightarrow \boldsymbol{\mu}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  étant la masse linéique de la corde et la séparation entre les masses se confondant, celle-ci semblent se toucher.

De plus l'indice  $\mathbf{i}$ , qui indique la position de la masse, doit être remplacé par un paramètre continu soit la position  $\mathbf{x}$  de la masse  $\mathbf{m}$ .

$\mathbf{q}_i(\mathbf{t}) = \Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  lorsque  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$ .

D'autre part :

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{\mathbf{a}} = \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\Phi(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{t}) - \Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{t})}{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$$

En reprenant l'équation de Lagrange pour la masse  $\mathbf{i}$  et faisant  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{t}^2} &= \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \ddot{\mathbf{q}}_i = \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} (\mathbf{q}_{i+1} + \mathbf{q}_{i-1} - 2\mathbf{q}_i) \\ &= \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{a}^2 \mathbf{k}}{\mathbf{m}} \frac{(\Phi(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{t}) + \Phi(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{t}) - 2\Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}))}{\mathbf{a}^2} \\ &= \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{a}^2 \mathbf{k}}{\mathbf{m}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}^2} \\ &= \lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{a} \mathbf{k}}{\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}^2} \end{aligned}$$

Physiquement, la loi expérimentale de Hooke établit un lien entre la force exercée et l'allongement relatif d'un objet :

$$\mathbf{F} = \left( \frac{EA_0}{L_0} \right) \Delta L = \mathbf{K} \Delta L$$

$\mathbf{E}$  : est le module de Young.

$A_0$  : la section efficace de l'objet.

$\Delta L$  : changement de longueur.

$L_0$  : la longueur originale.

Identifiant  $a = L_0$  :  $\lim_{a \rightarrow 0} a\mathbf{K} = EA_0$ ,  $\left( \mathbf{K} = \frac{EA_0}{a}, a\mathbf{K} = EA_0 \right)$

On obtient l'équation suivante pour la corde qu'on note  $(\mathbf{Eq}_c)$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{EA_0}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$$

Avec  $c$  : vitesse de phase  $c = \sqrt{\frac{EA_0}{\mu}}$

Le passage à la limite continue s'est effectué en prenant :

- $\mathbf{N} \rightarrow \infty$  nombre de coordonnées généralisées.
- $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{x}$  paramètre désignant la position.
- $\mathbf{q}_i(\mathbf{t}) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  coordonnées généralisées.
- $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$  distance entre deux masses.

### 5-1/b Retour au lagrangien

Ce que l'on voudrait avoir, c'est une nouvelle façon d'écrire le lagrangien d'un système continu de telle sorte que l'on puisse trouver une équation analogue à  $(\mathbf{Eq}_c)$  sans avoir à refaire, à chaque fois, explicitement le passage à la limite. Reprenons le cas de la corde pour laquelle le lagrangien s'écrit

$$L = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} m \mathbf{q}_i^2 - \frac{1}{2} k (\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i)^2 \right]$$

Au vu de la méthode employée plus haut, on est tentés de mettre le lagrangien du système continu sous la forme suivante

$$\begin{aligned} L &= \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N a \left[ \frac{1}{2} \frac{m}{a} \mathbf{q}_i^2 - \frac{1}{2} a k \left( \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{a} \right)^2 \right] \\ &= \int d\mathbf{x} \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{EA_0}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

c'est à dire  $L(\partial \Phi / \partial t, \partial \Phi / \partial \mathbf{x})$ . Si cette conjecture est correcte, alors nous devrions pouvoir retrouver l'équation  $(\mathbf{Eq}_c)$  directement, à partir des équations d'Euler-Lagrange. Mais ces dernières ne s'appliquent qu'à des systèmes discrets. Il nous faut donc trouver leur équivalent pour des systèmes continus.

Dans l'expression du lagrangien  $L$  de la corde interviennent les dérivées de  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ . Il faut bien réaliser qu'ici  $x$  n'est pas une coordonnée associée à la corde elle-même :  $x$  décrit une position sur la corde relative à notre mode de mesure (c'est un indice dans le cas discret), au même titre que le temps  $t$  est relatif à notre horloge. Ainsi,  $x$  et  $t$  sont deux « paramètres » continus relatifs à notre description de l'espace-temps et non des « variables » décrivant la corde. La variable décrivant la corde, autrement dit la vraie coordonnée généralisée, reste  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ . Par définition, on appelle « champ » toute grandeur définie sur l'espace-temps. Ainsi,  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  est le champ (scalaire) de déplacement de la corde 1D. Pour cette raison, les équations de Lagrange continues sont appelées les équations du champ.

Si l'on avait permis des déplacements de la corde dans les trois directions d'espace, on aurait tout simplement un champ  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$  ainsi qu'une généralisation de l'équation (Eqc), c'est à dire

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{EA_0}{\mu} \sum_i^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \Phi(\mathbf{x}_i, t) = 0$$

où  $x_i$  vaut pour  $x, y, z$ .

## 5-2 Formulation lagrangienne des milieux continus

On suppose que tout système continu, c'est à dire ayant une infinité de degrés de liberté, peut être décrit

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L} dx dy dz$$

où  $\mathcal{L}$  est appelée la densité de lagrangien. Le volume d'intégration est arbitraire : il doit contenir le système étudié mais peut être étendu à l'infini (il suffit de faire tendre  $\mathcal{L} \rightarrow 0$  en dehors du système).

Il faut (de nouveau) bien réaliser que les variables  $x, y$  et  $z$  ne sont que des paramètres permettant d'identifier une région de l'espace et non des variables décrivant le système lui-même. Celui-ci est donc vu comme étant « plongé » dans un continuum (l'espace-temps).

Le système physique est supposé entièrement décrit par un nombre fini  $n$  de champs  $\Phi_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

On suppose que la densité de lagrangien peut s'écrire comme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t \right)$$

et non en fonction des dérivées d'ordre supérieur de  $\Phi$ . Cette hypothèse est très importante car elle a de profondes conséquences. Concrètement, elle impose directement la forme des équations du champ (voir ci dessous), « philosophiquement » elle signifie que les champs interagissent seulement localement : en effet, pour calculer une dérivée d'ordre deux, par exemple, il faut aller chercher deux points de part et d'autre du point où l'on veut la calculer alors qu'il n'en faut qu'un seul pour une dérivée d'ordre un. Cette hypothèse ne peut se justifier par elle-même : il faut vérifier expérimentalement que les équations ainsi obtenues fournissent bien une description correcte des phénomènes.

Le fait que les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  ne jouent que le rôle d'indexation de l'espace-temps et non celui de description du système lui-même introduit une subtilité. Soit  $x_\mu$  une coordonnée quelconque de l'espace temps,

si par exemple  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, x_\mu)$  alors on a

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}$$

### 5-2/a Equation de Lagrange du champ

On part du principe de Hamilton, principe fondamental de la physique. Il stipule que Les équations du champ découlent du principe de moindre action (ou pour être plus précis le principe d'action extrémale c'est à dire tels que  $\delta S = 0$ ). Il sert alors à déterminer les trajectoires (cas discret) ou configurations de champs (milieu continu) qui sont réalisées dans la nature. Définissant l'action comme

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L} dt = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dx dy dz$$

La variation fonctionnelle de  $S$  s'écrit donc

$$\delta S = \delta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dx dy dz = \int \int \delta \mathcal{L} dt dv$$

où l'on a  $\int dt \int dv \delta \mathcal{L} = \int dv \int dt \delta \mathcal{L}$  puisque les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  sont indépendantes. Par ailleurs, on a

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_t} \delta \Phi_t + \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{x_\mu}} \delta \Phi_{x_\mu}$$

avec

$$\begin{cases} \Phi_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \Phi_{x_\mu} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \end{cases}$$

et  $x_1=x$ ,  $x_2=y$ ,  $x_3=z$ .

L'intégration de chacun de ces termes sur le volume d'espace-temps. Ainsi, le deuxième terme s'écrit

$$\int dt \int dv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_t} \delta \Phi_t = \int dv \int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_t} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial t}$$

En intégrant le résultat par partie on trouve

$$\int dv \int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_t} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial t} = \int dv \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_t} \delta \Phi \right]_{t_1}^{t_2} - \int dt \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_t} \right) \delta \Phi \right\}$$

où l'on a intégré par parties à la deuxième ligne. Le premier terme de droite est nul car  $\delta \Phi = 0$  aux bornes. Faisant le même travail sur la variable  $x$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int dt \int dv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_x} \delta \Phi_x &= \int dt \int dy \int dz \int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_x} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x} \\ &= \int dt \int dy \int dz \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_x} \delta \Phi \right]_{x_1}^{x_2} - \int dx \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_x} \right) \delta \Phi \right\} \end{aligned}$$

Le calcul est identique pour les variables  $y$  et  $z$ . Rassemblant ces résultats on obtient

$$\delta S = \int dt \int dv \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_t} \right) - \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{x_\mu}} \right) \right\} \delta \Phi = 0$$

Ceci devant être vérifié quelle que soit la variation  $\delta \Phi$ , cela implique

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_t} \right) + \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{x_\mu}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}$$

Cette équation est l'équation de Lagrange pour un système décrit par un champ continu  $\Phi$

## Chapitre 6/ Théorème de Liouville

### 6-1 Définition

Le théorème de Liouville s'énonce comme suit :

La fonction de distribution est constante le long de n'importe quelle trajectoire de l'espace des phases.

Ou encore : Le volume d'une région de l'espace des phases reste constant lorsqu'on suit cette région dans le temps cela revient à dire que le volume  $V$  de l'espace des phases est invariant par rapport au temps :

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

### 6-2 Equation de Liouville

L'équation de Liouville décrit l'évolution temporelle de la densité de probabilité  $\rho$  dans l'espace des phases. Cette densité de probabilité est définie comme la probabilité pour que l'état du système soit représenté par un point à l'intérieur du volume  $V$  considéré.

En mécanique classique on utilise les coordonnées généralisées  $(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ ,  $N$  est la dimension du système.

La densité de probabilité est définie par la probabilité  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{P}) d^N \mathbf{q} d^N \mathbf{P}$ , de rencontrer l'état du système dans le volume infinitésimal  $d^N \mathbf{q} d^N \mathbf{P}$ .

Lorsqu'on calcule l'évolution temporelle de cette densité de probabilité  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  on obtient :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial P_i} \dot{P}_i \right] = 0$$

On peut utiliser les équations canoniques de Hamilton en les remplaçant dans l'équation précédente :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

On obtient le résultat :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t) = -\{\rho(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t), H\} = \{H, \rho(\mathbf{P}, \mathbf{q}, t)\}$$

#### Démonstration

On part du fait que  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  soit une grandeur qui se conserve lors de son déplacement dans l'espace des phases, on peut donc écrire son équation de conservation locale, c'est-à-dire pour tout élément de volume élémentaire dans l'espace des phases on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (\text{div}(\rho \vec{v}) = (\overrightarrow{\text{grad}} \rho) \vec{v} + \rho (\text{div} \vec{v}))$$

Soit encore en développant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{grad}} \rho) \vec{v} + \rho (\text{div} \vec{v}) = 0$$

$\vec{v}$  : vitesse ou changement de  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  par rapport aux composantes de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{q}$  dans l'espace des phases c'est-à-dire :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{P}_1 \\ \vdots \\ \dot{P}_n \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{div} \vec{v} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial P_i} \right]; \left( \vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right)$$

La démonstration repose sur le fait que  $\text{div} \vec{v} = 0$  en utilisant les équations canoniques de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Il vient :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial P_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial P_i \partial q_i} \right] = 0$$

Il reste :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{grad}} \rho) \vec{v} = 0$$

On aura finalement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial P_i} \dot{P}_i \right] = \frac{d\rho}{dt} = 0$$