Vibrations et Ondes

Cours Partie : Vibrations

Chapitre I:
Introduction aux équations de Lagrange

I- Introduction aux équations de Lagrange

I-1- Introduction

Une vibration est un mouvement autour de la position d'équilibre. Elle est caractérisée par une équation de mouvement de type d'équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A(t) \qquad \text{(I-1)}$$

avec :

y : Le déplacement (m)

$\dot{y}$: La vitesse (m/s)

$\ddot{y}$: L'accélération (m/s^2)

δ : Le coefficient d'amortissement

ω_0 : La pulsation libre (rad/s)

A(t) : Le second membre.

La méthode de résolution de l'équation différentielle (I-1) est schématisée sur l'organigramme de la figure I-1. Pour résoudre une équation du second ordre avec second membre, on suit la méthode suivante :

Premièrement on cherche la solution homogène $y_H(t)$ lorsque le second membre A(t)=0. Pour cela, on considère que la solution a une forme exponentielle $y(t) = e^{st}$. L'équation différentielle homogène est transformée en une équation caractéristique de deuxième degré d'une variable s qui nous permettra de déterminer les solutions s_1, s_2 par le calcul du discriminant$\Delta = b^2 - 4ac$. Il existe trois solutions homogènes selon les cas de Δ illustré sur l'organigramme. Deuxièmement, on cherche la solution particulière $y_p(t)$ lorsque le second membre $A(t)\neq 0$. Dans l'organigramme, on constate deux cas d'excitations :

- Une excitation constante
- Une excitation sinusoïdale.

La solution particulière $y_p(t)$ est déterminée selon la règle suivante :

« **La solution particulière suit la forme générale du second membre de l'équation différentielle** ».

Enfin, la solution générale de l'équation différentielle du second ordre avec second membre est donnée par la somme des deux solutions homogène et particulière.

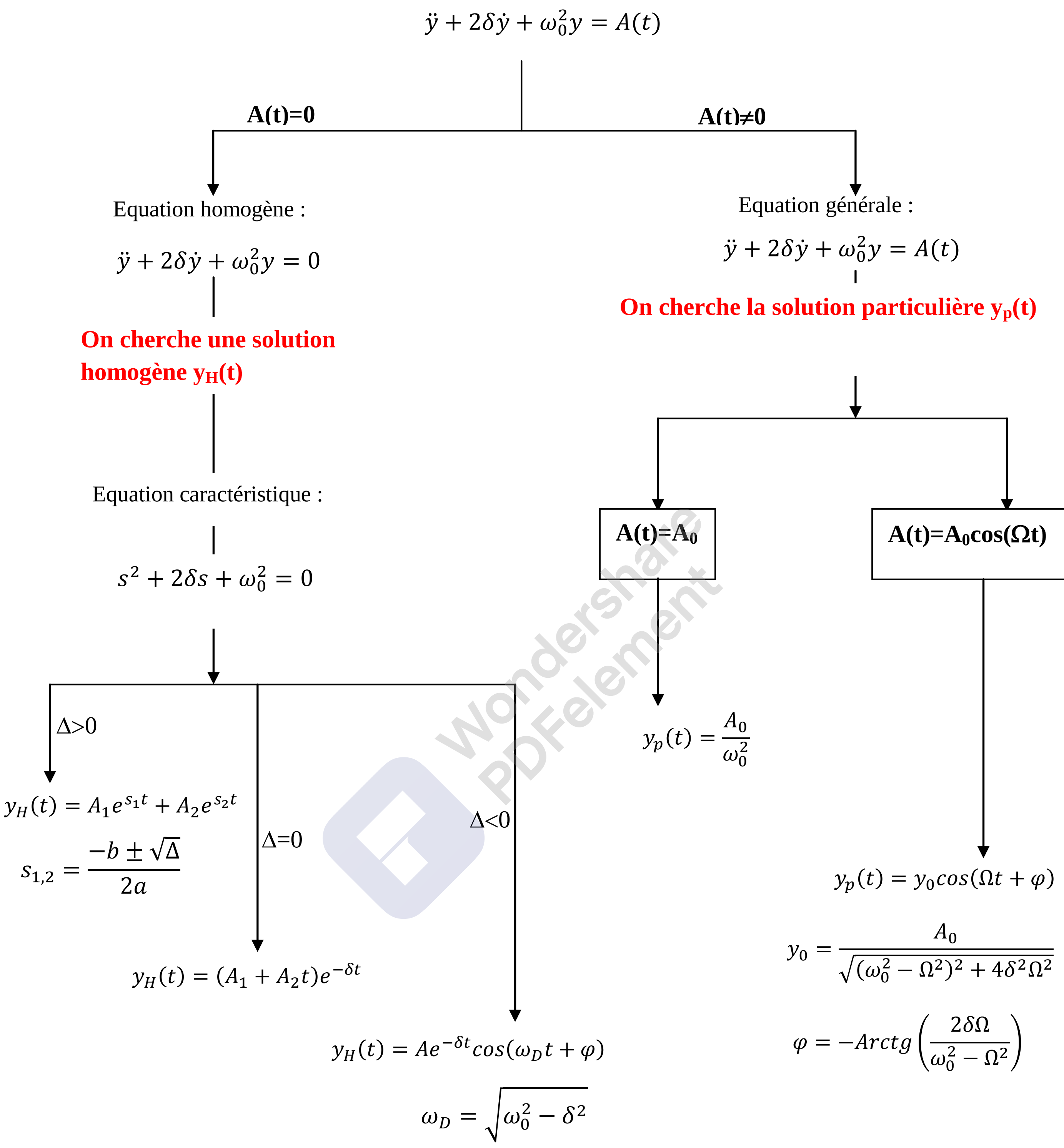

Fig. I-1. Organigramme de la solution d'une équation différentielle du second ordre

I-2- Caractéristiques d'une oscillation sinusoïdale harmonique

Une vibration est sinusoïdale lorsqu'une masse attachée au bout d'un ressort est écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée. Une vibration est périodique lorsque les mouvements se reproduisent globalement identiques à eux-mêmes à des périodes de temps mesurables. Elle est de la forme :

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{(I-2)}$$

ou bien :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{(I-3)}$$

avec :

φ est le déphasage par rapport à l'origine des temps.

A est l'amplitude maximale du signal (m).

L'amplitude d'une fonction sinusoïdale est une mesure de sa hauteur par rapport à sa médiane.

ω_0 est la pulsation libre (rad/s)

La pulsation est une grandeur proportionnelle à la fréquence d'un phénomène périodique.

$$\omega = 2\pi f \quad \text{(I-4)}$$

f est la fréquence (Hz)

La fréquence est le nombre de cycles par seconde, et qui est l'inverse de la période T.

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{(I-5)}$$

T est la période (s)

La période est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de la masse en mouvement au même endroit comme le montre la figure I-2.

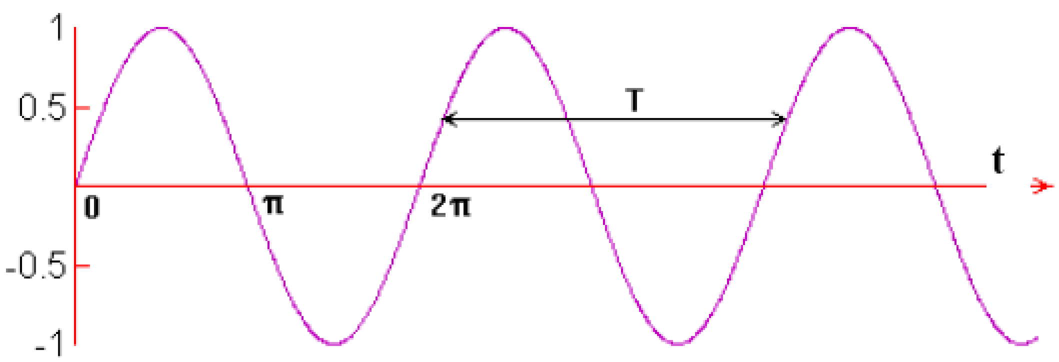

Fig. I-2. Définition de la période T

I-3- Equation de Lagrange pour une particule

L'équation de Lagrange est donnée par la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=F_{ext,q} \qquad \text{(I-6)}$$

avec :

L est le lagrangien définit par :

$$L= E_c\text{-}E_p=T\text{-}U \qquad \text{(I-7)}$$

avec :

E_c, T est l'énergie cinétique du système.

E_p, U est l'énergie potentielle du système.

q est la coordonnée généralisée qui caractérise le mouvement vibratoire.

$F_{ext,q}$: Les forces extérieures généralisées.

Le degré de liberté est égal au nombre de coordonnées (N) moins (-) le nombre de liaisons (R).

$$d=N-R \qquad \text{(I-8)}$$

Pour un système **conservatif**, la force appliquée dérive d'un potentiel et l'équation (I-6) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \qquad \text{(I-9)}$$

Dans le cas d'une force de frottement dépendant de la vitesse ($\vec{f}=-\alpha\vec{v}$), l'équation (I-6) devienne :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=-\alpha\dot{q} \qquad \text{(I-10)}$$

L'équation (I-10) se généralise à l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=0 \qquad \text{(I-11)}$$

D est la fonction de dissipation donnée par : $D = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$. Elle est liée à la force de frottement par : $f_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$.

Dans le cas d'une force extérieure dépendant du temps, l'équation (I-11) s'écrit comme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q} \qquad \text{(I-12)}$$

Et pour un système à plusieurs degrés de liberté,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{ext,q_i} \qquad \text{(I-13)}$$

Chapitre II:
Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

II- Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

II-1- Oscillateur linéaire

Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad \text{(II-1)}$$

II-2- Conditions d'équilibre

Les deux conditions qui définissent le mouvement vibratoire sont :

La condition d'équilibre :

$$\left.\frac{\partial E_p}{\partial q}\right]_{q=0} = 0 \qquad \text{(II-2)}$$

Et la condition de stabilité est donnée par :

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\right]_{q=0} > 0 \qquad \text{(II-3)}$$

La figure II-1 illustre la variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de déplacement x. Dans un mouvement vibratoire, l'énergie totale est constante. L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle. Quand l'énergie cinétique diminue, l'énergie potentielle augmente et vis versa. Cette propriété est appelée conservation de l'énergie totale du système.

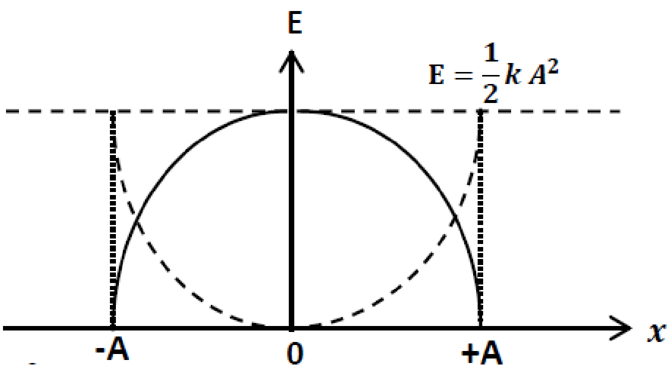

Fig. II-1. Variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x

II-3- Equation différentielle

L'équation de Lagrange pour les oscillations libres d'un système conservatif est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \qquad \text{(II-4)}$$

La solution de l'équation (II-1) est donnée par :

$$q(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \qquad \text{(II-5)}$$

Pour calculer les constantes A et φ, il nous faut les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0)=q_0 \\ \dot{q}(t=0)=\dot{q}_0 \end{cases} \qquad \text{(II-6)}$$

En remplaçant l'équation (II-5) et sa dérivée dans l'équation (II-6), on aboutit :

$$\begin{cases} A\cos\varphi=q_0 \\ -A\omega_0\sin\varphi=\dot{q}_0 \end{cases} \qquad \text{(II-7)}$$

Pour calculer la constante A, on met les équations (II-7) au carré puis on les additionne terme par terme, on aboutit :

$$1=\left(\frac{q_0}{A}\right)^2+\left(\frac{\dot{q}_0}{Aw_0}\right)^2 \Rightarrow A^2\omega_0^2=q_0^2\omega_0^2+\dot{q}_0^2$$

Et enfin,

$$A=\sqrt{\frac{q_0^2\omega_0^2+\dot{q}_0^2}{\omega_0^2}} \qquad \text{(II-8)}$$

Et le déphasage,

$$tg\varphi=-\frac{\dot{q}_0}{q_0\omega_0} \Rightarrow \varphi=-Arctg\left(\frac{\dot{q}_0}{q_0\omega_0}\right) \qquad \text{(II-9)}$$

II-4- Oscillations libres amorties à un degré de liberté

Dans les oscillations amorties, les forces de frottement sont prisent en considération. Les frottements sont visqueux et dépend de la vitesse.

II-4-1- Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange des oscillations amorties est citée ci-dessus dans l'équation (I-10) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{(II-10)}$$

On définit la fonction de dissipation par :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2 \Longrightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \alpha\dot{q} \quad \text{(II-11)}$$

La forme de l'équation différentielle est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{(II-12)}$$

Avec :

δ est le coefficient d'amortissement.

ω_0 est la pulsation libre.

II-4-2- Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle (II-12) dépend de la valeur de δ par rapport à w_0. On distingue trois régimes : le régime apériodique, le régime critique et le régime pseudo périodique.

Le régime est apériodique (fortement amorti) si $\delta>\omega_0$, et la solution est de la forme :

$$q(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{(II-13)}$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure II-2 représente la solution q(t) en fonction du temps dans le cas particulier ou $q(0)=q_0$ et $\dot{q}(0)=0$. La solution q(t) varie exponentiellement vers zéro.

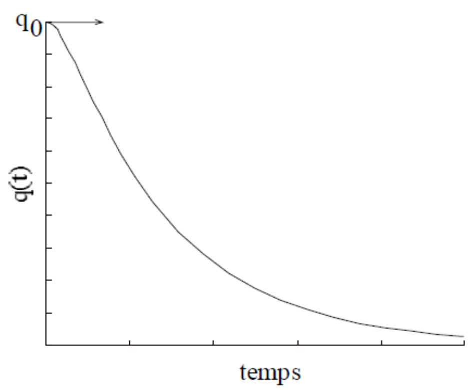

Fig. II-2. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime fortement amorti (sur amorti)

Si $\delta=\omega_0$ le régime est critique (Figure II-3), et la solution est de la forme :

$$q(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t} \tag{II-15}$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration calculées à partir des conditions initiales. La figure II-3 montre la variation de la solution q(t) en fonction du temps. q(t) est une fonction qui tend vers zéro sans oscillation lorsque le temps augmente.

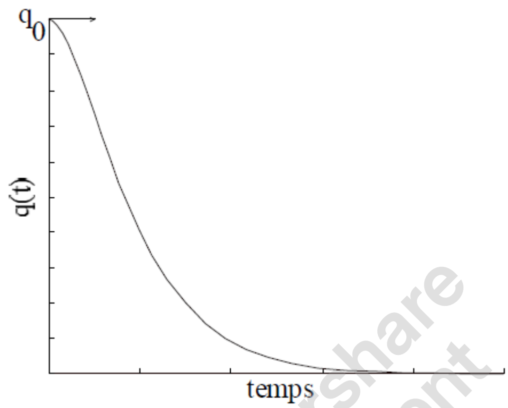

Fig. II-3. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime critique

Si $\delta<\omega_0$ le régime est pseudopériodique (Figure II-4), et la solution est de la forme :

$$q(t) = Ae^{-\delta t}cos(\omega_D t + \varphi) \tag{II-14}$$

A, φ sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. ω_D est la pseudo pulsation définie par : $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

La figure II-4 illustre la variationde q(t) en fonction du temps. On remarque que q(t) est envloppée par deux fonctions exponentielles. Le lieu des maxima est obtenu en résolvant $\dot{q}(t)$=0. Les maxima de q(t) sont séparés par des intervalles réguliers égaux à T_A. T_A est appelé la pseudo-période. On remarque que la diminution de l'amplitude des oscillations au cours du temps, l'un des effets de l'amortissement est l'augmentation de la période des oscillations. Pour des systèmes faiblement amortis ($\delta \ll \omega_0$), on peut remarquer que $\omega_D \approx \omega_0$ et que la pseudo période est peu différente de la période propre : $T_A \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

.

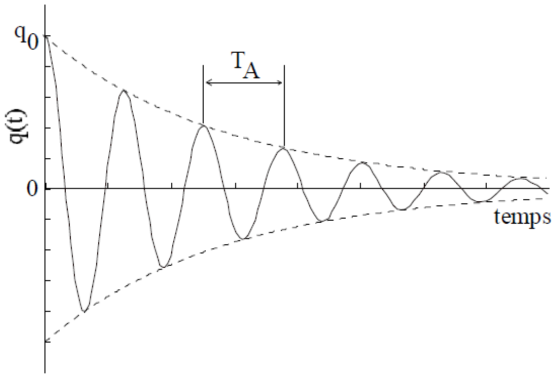

Fig. II-4. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime faiblement amorti (sous amorti)

II-4-3- Décrément logarithmique

La figure II-5 représente la définition du décrément logarithmique. Il est défini par le logarithme du rapport des deux amplitudes successives des oscillations amorties :

$$D = ln\frac{A(t_1)}{A(t_2)} = ln\frac{A(t_1)}{A(t_1+T_a)} = -ln\frac{A(t_1+T_a)}{A(t_1)} \qquad \text{(II-16)}$$

En remplaçant les formules des amplitudes, on obtient à :

$$D = \delta T_a \qquad \text{(II-17)}$$

ou

δ est le coefficient d'amortissement.

T_a est le pseudo période. Elle est donnée par :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_D} \qquad \text{(II-18)}$$

avec :

w_D est la pseudo pulsation, elle est égale à :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad \text{(II-19)}$$

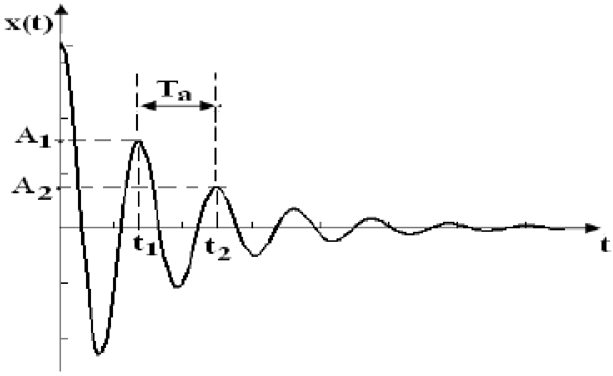

Fig. II-5. Définition du décrément logarithmique

II-5- Analogie électromécanique

L'analogie entre le système mécanique masse-ressort et le système électrique RLC est regroupée dans le tableau suivant :

Systèmes mécaniques		**Système électrique**
Translation	**Rotation**	**Circuit RLC**
Déplacement : x	Angle : θ	Charge : q
Vitesse : $\dot{x}$	Vitesse angulaire : $\dot{\theta}$	Courant : $\dot{q}$
Accélération : $\ddot{x}$	Accélération angulaire : $\ddot{\theta}$	Variation de courant : $\ddot{q}$
Constante de raideur : k	Constante de torsion : C	Inverse de la capacité : 1/c
Masse : m	Moment d'inertie : I	Inductance : L
Coefficient d'amortissement : δ	Coefficient d'amortissement : δ	Résistance : R
Energie cinétique : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$	Energie magnétique : $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$
Energie potentielle : $\frac{1}{2}kx^2$	$-mgh$	Energie électrique : $\frac{1}{2c}q^2$

Tableau. II-1. Analogie électromécanique

II-6- Raideur équivalente

Les raideurs sont liées soit en série ou en parallèle.

II-6-1- Raideur en parallèle

La figure II-6 schématise l'association en parallèle de deux ressorts.

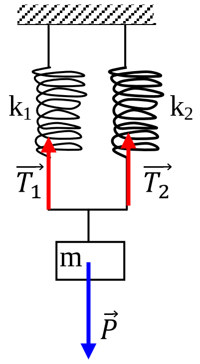

Fig. II-6. Association en parallèle des raideurs

L'équilibre des forces conduit à :

$k_1.x+k_2.x=k_{eq}.x \Rightarrow k_{eq}=k_1+k_2$ est la raideur équivalente.

II-6-2- Raideur en série

La figure II-7 schématise l'association en série de deux ressorts.

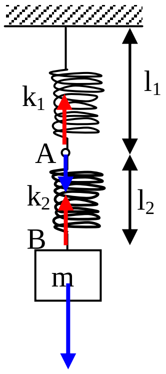

Fig. II-7. Association en série des raideurs

L'équilibre des forces conduit aux relations suivantes :

$k_1.x_1=k_{eq}.x \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{k_{eq}}{k_1}x$

$k_2.x_2=k_{eq}.x \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{k_{eq}}{k_2}x$

L'élongation totale : $x=x_1+x_2$

$x=\left(\frac{k_{eq}}{k_1}+\frac{k_{eq}}{k_2}\right)x \Longrightarrow \frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ est la raideur équivalente

Chapitre III:
Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

III- Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

III-1- Equation différentielle

L'équation différentielle des oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext} \qquad \text{(III-1)}$$

F_{ext} : la force généralisée à une force extérieure

L'équation différentielle du mouvement vibratoire forcé est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \qquad \text{(III-2)}$$

III-2- Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle du mouvement des oscillations forcées est une équation différentielle du second ordre avec un second membre. La solution de l'équation (II-2) est donnée par :

$$q(t) = q_H(t) + q_p(t) \qquad \text{(III-3)}$$

$q_H(t)$: est la solution homogène

$q_p(t)$: est la solution particulière

Les trois cas de solution homogène comme sont citées avant sont proportionnels à un terme exponentiel :

$$q_H(t) \sim e^{-\delta t} \qquad \text{(III-4)}$$

Après un intervalle de temps t supérieur à (3/δ) ou (4/δ), le terme $e^{-\delta t} \to 0$ et $q_H(t) \to 0$. Dans ce cas, la solution générale tend vers la solution particulière. Ce régime est appelé le régime permanent.

$$q(t) \to q_p(t) \qquad \text{(III-5)}$$

Quand la solution homogène est non négligeable et non nulle, le régime est dit transitoire.

III-2-1- Cas d'une excitation sinusoïdale

L'excitation sinusoïdale est de la forme :

$$A(t) = A_0 cos(\Omega t)$$

L'équation du mouvement (III-2) devienne :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A_0 cos(\Omega t) \quad \text{(III-6)}$$

La méthode des nombres complexes permet de calculer aisément la solution stationnaire. La solution particulière complexe est :

$$q(t) = \underline{q} e^{i\Omega t} \quad \text{(III-7)}$$

$\underline{q}$ est l'amplitude complexe.

$$\underline{q} = q_0 e^{i\varphi} \quad \text{(III-8)}$$

L'excitation A(t) sous forme complexe est égale :

$$A(t) = A_0 e^{i\Omega t} \quad \text{(III-9)}$$

q(t) est une solution de l'équation différentielle si $\dot{q}(t)$ et $\ddot{q}(t)$ vérifient l'équation (III-2).

$$-q_0\Omega^2 e^{i(\Omega t+\varphi)} + 2\delta\left(i\Omega q_0 e^{i(\Omega t+\varphi)}\right) + w_0^2 q_0 e^{i(\Omega t+\varphi)} = A_0 e^{i\Omega t}$$

$$q_0[(w_0^2 - \Omega^2) + 2i\delta\Omega]e^{i\varphi} = A_0$$

On obtient l'amplitude complexe :

$$\underline{q} = \frac{A_0}{(\omega_0^2-\Omega^2)+2i\delta\Omega} \quad \text{(III-10)}$$

Et on multipliant par le conjugué du dénominateur, on trouve :

$$q_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}} \quad \text{(III-11)}$$

Et

$$\varphi = -arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right) \quad \text{(III-12)}$$

III-2-2- Cas d'une excitation périodique

La fonction A(t) étant périodique, de période T, son développement de Fourier est :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t) \quad \text{(III-13)}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t) \quad \text{(III-14)}$$

La réponse permanente peut être calculée par :

$$q(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n cos(n\omega t+\varphi)+b_n sin(n\omega t+\varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}} \quad \text{(III-15)}$$

III-3- Pulsation de résonnance

Pour calculer la pulsation de résonnance, la dérivée de q_0 est égale à zéro.

$$\frac{dq_0}{d\Omega} = 0 \Longrightarrow \frac{-2A_0\left[-\Omega\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)+2\delta^2\Omega\right]}{\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2\right]^{3/2}} = 0 \quad \text{(III-16)}$$

$$\Longrightarrow \Omega[(\omega_0^2 - \Omega^2) - 2\delta^2] = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{cases} \quad \text{(III-17)}$$

La pulsation de résonnance est donnée par :

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad \text{(III-18)}$$

En remplaçant Ω_R dans l'amplitude, on obtient :

$$q_0(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \quad \text{(III-19)}$$

Pour les faibles amortissements :

$$q_0(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\omega_0} \quad \text{(III-20)}$$

La figure III-1 représente la variation de l'amplitude q_0 (à gauche) et le déphasage φ (à droite). Pour l'amplitude on remarque qu'il existe un maximum à la pulsation Ω_R seulement si l'amortissement est faible pour que $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$

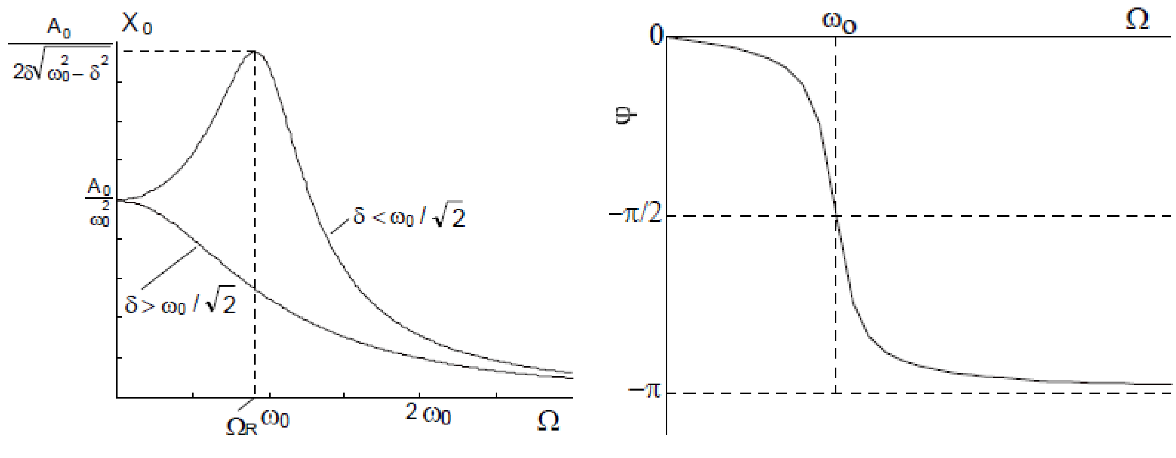

Fig. III-1. Amplitude et le déphasage en fonction de Ω

III-4- Bande Passante

On définit bande passante, la bande de pulsation pour les quelles l'amplitude est égale à $\frac{q_{0(\Omega_R)}}{\sqrt{2}}$. Elle est donnée par :

$$B = \Omega_1 - \Omega_2 = 2\delta \qquad \text{(III-21)}$$

III-5- Coefficient de Qualité

Il est définit par le rapport de la pulsation propre à la largeur de la bande passante B.

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\delta} \qquad \text{(III-22)}$$

III-6- Impédance mécanique

On appelle impédance mécanique d'entrée du système mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force *F* et de la vitesse *v*.

$$Z = \frac{F}{v} \qquad \text{(III-23)}$$

III-6-1- Amortisseur

La force de frottement$F = \alpha v$, on déduit l'impédance complexe d'un amortisseur :

$$Z_\alpha = \alpha \qquad \text{(III-24)}$$

III-6-2- Masse

D'après la 2ième loi de Newton, la force F s'écrit :

$F = m\frac{dv}{dt}$

On en déduit l'impédance complexe d'une masse :

$$Z_m = im\Omega = m\Omega e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(III-25)}$$

III-6-3- Ressort

La force : $F = kx$

Et l'impédance d'un ressort est donné par :

$$Z_k = \frac{k}{i\Omega} = -i\frac{k}{\Omega} \qquad \text{(III-26)}$$

Chapitre IV:
Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

IV- Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

IV-1- Introduction

Les systèmes à deux degrés de liberté sont constitués de deux systèmes à un degré de liberté couplé. Dans les systèmes à deux degrés de liberté, il y a deux coordonnées qui caractérisent le mouvement vibratoire. Il existe trois types de couplage : par élasticité, inertiel et visqueux.

IV-2- Types de couplage

IV-2-1- Couplage par élasticité

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un ressort (capacité).

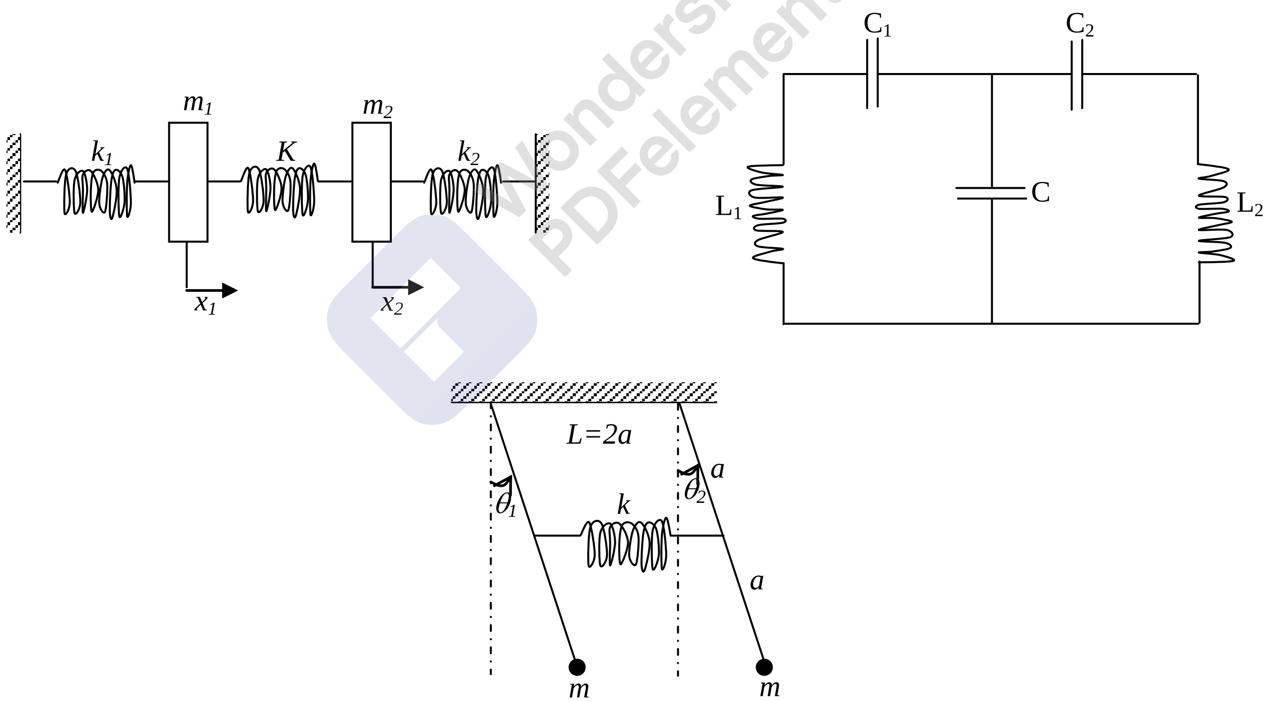

Fig. IV-1. Différents systèmes mécanique et électrique couplés par élasticité

IV-2-2- Couplage inertiel

Le couplage entre les deux systèmes est à travers une masse (bobine).

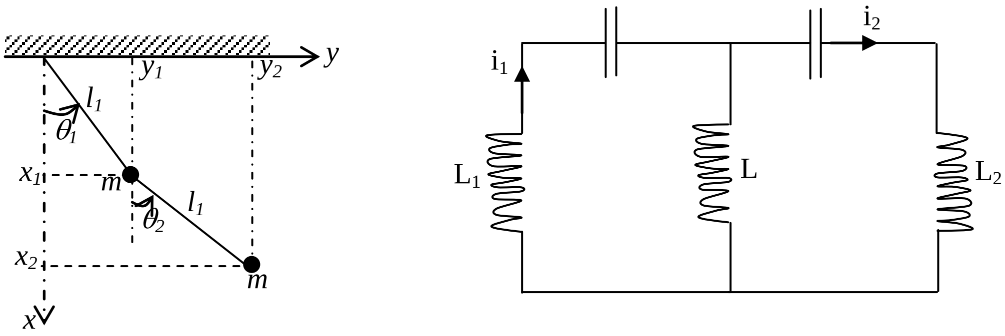

Fig. IV-2. Systèmes mécanique et électrique couplés par inertie

IV-3-3- Couplage visqueux

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un amortisseur (résistance).

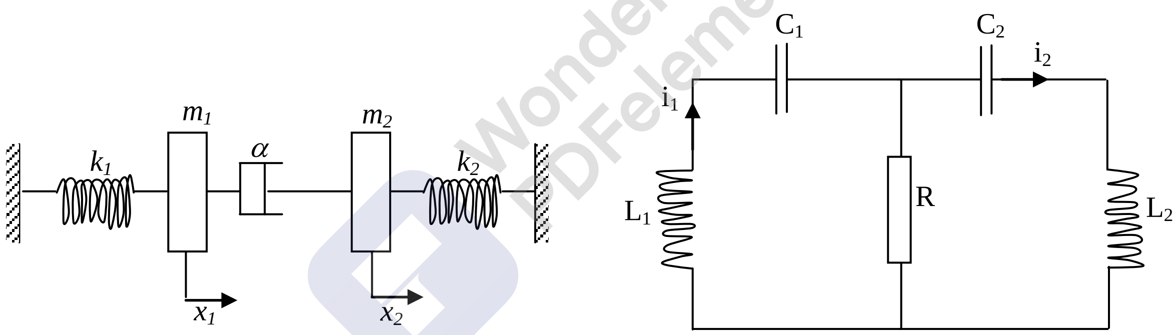

Fig. IV-3. Couplage visqueux des différents systèmes mécanique et électriques

IV-3- Equations différentielles

Pour étudier les oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire de décrire le mouvement par deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \qquad \text{(IV-1)}$$

q_1 et q_2 sont les deux coordonnées généralisées qui caractérisent le système à deux degrés de liberté.

Chapitre V:
Oscillations forcées des systèmes à deux degrés des liberté

V- Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

V-1- Equations de Lagrange

Les équations différentielles du mouvement oscillatoire forcé des systèmes à deux degrés de liberté sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = F_{q_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = F_{q_2} \end{cases} \qquad \text{(V-1)}$$

F_{q1}, F_{q2} sont respectivement les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées q_1 et q_2.