



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran
Mohamed BOUDIAF

FACULTE D'ARCHITECTURE ET DE GENIE CIVIL

Polycopié Génie – Civil

Calcul des Eléments en Béton Armé

Aux Etats Limites

Cours & Applications - Partie 1-

D^r HOUACHINE Houari Roh Eddine

2016/2017

Remerciements & dédicaces

بعد بسم الله الرحمن الرحيم و الصلاة على المصطفى الحبيب سيدنا محمد صلى الله عليه و سلم

*Je remercie **Dieu** le tout puissant pour*

m'avoir donné la force et la volonté

de réaliser ce modeste polycopié

Mes vifs remerciements et gratitude à Monsieur KHELAFI Hamid; Professeur de l'Université Ahmed DRAIA, Adrar; Faculté des Sciences et Technologie; Département des Sciences de la Technologie et Monsieur TEHAMI Mohamed; Professeur de l'Université des Sciences et de la Technologie Mohamed BOUDIAF; Faculté d'Architecture; Département de Génie Civil, pour l'honneur qu'ils m'ont attribué en acceptant d'expertiser ce polycopié.

Aussi je remercie Monsieur BENMENNI Mouloud; Maître-Assistant de l'Université des Sciences et de la Technologie Mohamed BOUDIAF; Faculté d'Architecture; Département de Génie Civil et Monsieur le Professeur KHELAFI Hamid de m'avoir enseigné le module de Béton Armé pendant mes études de graduation (1992-1993), et aussi pour la documentation de base qu'ils m'ont attribué.

Je dédie ce modeste travail à mon regretté père, à mes deux mères, à mon épouse et mes enfants et à toute personne qui souhaite améliorer ses connaissances en béton armé.

Avant-propos

Etablir un lien entre la conception des constructions et la science des matériaux, entre la théorie et l'expérimental a constitué une des préoccupations essentielles de ces dernières années. Ce rapprochement a permis des progrès importants pour une meilleure compréhension du comportement mécanique et rhéologique des matériaux, aussi une amélioration de leurs propriétés et pour un choix plus rationnel en vue des applications.

Avant de s'orienter vers l'utilisation de codes de calcul, qui proposent systématiquement des solutions, l'ingénieur ou le cadre universitaire devrait avoir assimilé les méthodes classiques de résolution et les lois de comportement sur lesquelles elles s'appuient. Ceci lui permettra de choisir la méthode qu'il faut utiliser pour résoudre son problème et d'être capable d'argumenter et de commenter ses résultats pour pouvoir les mettre en vigueur.

Le présent polycopié présente un guide qui s'applique au calcul du béton armé selon les règles B.A.E.L.91 modifié 99 et DTU associés en premier lieu, et certaines règles préconisées par l'EC2 en deuxième lieu. L'objectif du présent polycopié est de présenter les méthodes de calcul des éléments de base des constructions en béton armé. Chaque chapitre abordé fait l'objet d'un bref rappel théorique, puis de l'exposé des formules de calcul, finalisé par des exemples d'illustration.

Ce polycopié s'adresse à toute personne qui souhaite améliorer ses connaissances en béton armé, en particulier aux étudiants du second cycle. L'exposé des principes et des méthodes nécessite l'apprentissage ultérieur de la résistance des matériaux et des structures.

Six chapitres sont développés au cours de ce polycopié.

Le premier chapitre : Béton Armé – Généralités.

Le deuxième chapitre : Prescriptions réglementaires.

Le troisième chapitre : Association Acier-Béton

Le quatrième chapitre : Dimensionnement des sections soumises aux actions centrées
traction simple – tirants.

Le cinquième chapitre : Dimensionnement des sections soumises aux actions centrées
compression simple.

Le sixième chapitre : Calcul des sections soumises à la flexion simple.

Chapitre 1

BETON ARME – GENERALITES

1 BETON DE GRANULATS NORMAUX

1.1 Définition :

Un béton de granulats normaux est un béton dont la masse volumique, après séchage au four à 105°C, est supérieur à 2000 kg/m³ et inférieur à 2800 kg/m³ [3].

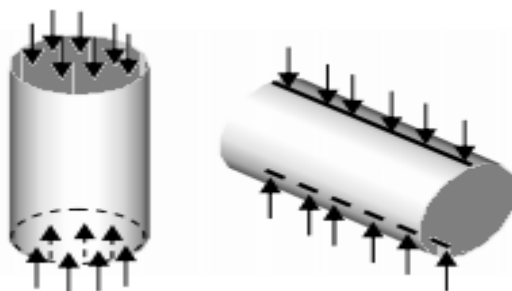
Le béton est un mélange de liant (ciment) + eau + agrégats (sable-gravier), dosé de façon à obtenir au moment de la mise en œuvre une consistance convenable, et après durcissement les qualités requises. Les qualités en fonction desquelles est orientée l'étude de la composition du béton sont :

- a- La résistance mécanique, essentiellement à la compression, et pour certain usages spéciaux à la traction.
- b- Résistance aux agents agressifs.
- c- Déformation instantanée.
- d- Déformation différée.
- e- Maniabilité.

1.2 Caractéristiques mécaniques du béton [1-3-5]:

Le béton est caractérisé par une bonne résistance à la compression f_{cj} et une résistance médiocre en traction f_{tj} . Un module de Young qui prend deux valeurs selon que l'on considère des déformations instantanées E_{ij} ou des déformations à long terme (déformations différées) E_{vj} .

1.2.1 Essais de laboratoire : Expérimentalement la résistance à la compression se mesure le plus souvent sur des éprouvettes cylindriques de diamètre 16cm et de hauteur 32cm (159,6x320 mm²) [7]. La résistance à la traction s'obtient soit par essai de traction par fendage (dit essai Brésilien) soit par un essai de flexion sur éprouvette prismatique.



a) Essai de compression

b) essai de traction

Fig.1.1 Essais de compression et de traction sur éprouvettes 16x32 cm²

1.2.2 Résistance caractéristique à la compression :

La résistance caractéristique à la compression f_{ck} est déterminée après une série d'essais d'écrasement d'éprouvettes cylindriques normalisées âgées de 28 jours. Elle est exprimée en *MPa*.

Cette résistance caractéristique du béton correspond dans la norme à la valeur de la résistance au-dessous de laquelle peuvent se situer au plus 5% de la population de tous les résultats des essais sur éprouvette 16x32. Cette résistance caractéristique est donc bien inférieure à la valeur moyenne des résultats d'essai [1-3].

Cette résistance varie en fonction de l'âge du béton et le règlement donne des lois d'évolution de f_{cj} (résistance en compression à j jours) en fonction de l'âge " j " en jours.

Pour des bétons non traités thermiquement, on admet (BAEL): [1-5]

$J \leq 28$	$f_{c28} \leq 40 \text{ MPa}$	$f_{cj} = j \cdot f_{c28} / (4,76 + 0,83j)$
	$f_{c28} > 40 \text{ MPa}$	$f_{cj} = j \cdot f_{c28} / (1,40 + 0,95j)$
$J = 28 \text{ } f_{cj}$	$f_{c28} \leq 40 \text{ MPa}$	$f_{cj} = f_{c28}$ pour les calculs de résistance
$28 < J \leq 60$		$f_{cj} = j \cdot f_{c28} / (4,76 + 0,83j)$ pour les calculs de déformation
$J > 60$		$f_{cj} = 1,1 \cdot f_{c28}$ pour les calculs de déformation

1.2.3 Résistance caractéristique à la traction [1-5] :

La résistance à la traction du béton à j jours, notée f_{tj} exprimée en *MPa* est définie conventionnellement par la relation

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{cj} \quad \text{si } f_{c28} \leq 60 \text{ MPa}$$

1.2.4 Déformations et modules de déformations longitudinales du béton :

a- Déformations instantanées :

La figure 1.2, présente le diagramme expérimental "contrainte - déformation" du béton à partir d'un essai de compression simple sur éprouvette 16x32. Réglementairement, on applique des coefficients de sécurité sur la résistance du béton et le diagramme qui sera utilisé pour les calculs à l'ELU (Etats Limites Ultimes de Résistance - Etats Limites Ultimes de Stabilité de Forme) sera le diagramme dit "de calcul". La résistance de calcul à la traction sera négligée.

Le béton est un matériau fragile (non ductile), il se déforme peu avant rupture. La loi de comportement fait apparaître une zone élastique (quasiment linéaire) et une zone plastique.

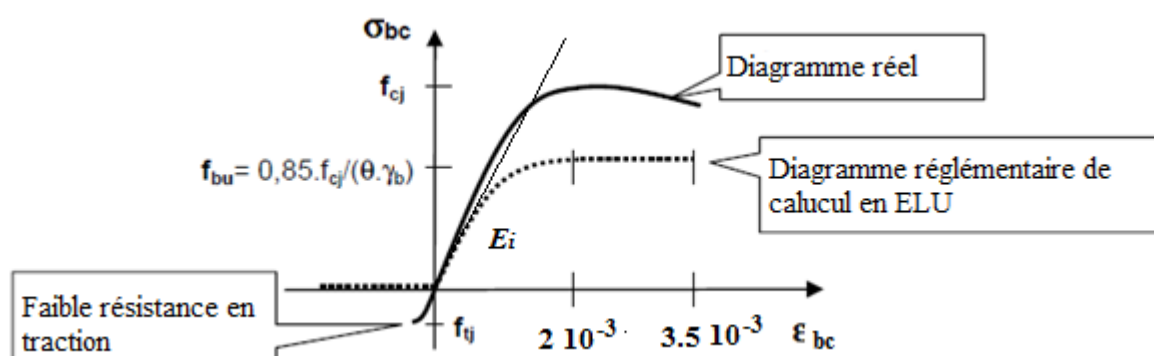


Fig.1.2 Diagramme Contraintes – Déformations
Expérimental et de Calcul [1-3]

$f_{bu} = \frac{0.85 f_{cj}}{\theta \gamma_b}$ est la résistance en compression pour le calcul à l'ELU

$\theta =$ 1 pour les charges appliquées plus de 24h
0.9 pour les charges appliquées entre 1h et 24h
0.85 pour les charges appliquées moins qu'une heure

$\gamma_b =$ 1.5 pour les combinaisons fondamentales
1 pour les combinaisons accidentelles

b- Module de déformations instantanées (ELU) :

Sous des contraintes normales d'une durée d'application inférieure à 24 heures, on admet à l'âge de j jours, un module de déformation instantanée du béton de:

$$E_{ij} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}} \quad \text{Selon les règles BAEL 91 [1-5]}$$

$$E_{ij} = 9500 \sqrt[3]{(f_{cj} + 8)} \quad \text{Selon les règles Eurocode 2 [3]}$$

Le module d'élasticité dépend, non seulement de la classe de résistance du béton, mais aussi des propriétés réelles des granulats utilisés. Les valeurs du tableau suivant sont dressées pour un béton âgé de 28 jours.

Tableau 1.1 : Module de déformation instantanée (ELU)

Classes de résistance du béton	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55
E_i (MPa) [1]	29859	32164	34180	35982	37619	39126
E_i (MPa) [3]	29000	30500	32000	33500	35000	36000

N.B : La classe de résistance du béton CA/B, correspond aux résistances caractéristiques suivantes :

C : classe du béton.

A : résistance caractéristique du béton obtenue par des essais établis sur des éprouvettes cylindriques.

B : résistance caractéristique du béton obtenue par des essais établis sur des éprouvettes prismatiques.

Un tel béton est de classe CA/B. Sa résistance caractéristique est de grandeur A.

c- Déformation différée :

Un élément de béton comprimé admet dès l'application de la charge une déformation instantanée. Si la charge demeure à être appliquée, cette déformation va continuer à croître du fait du fluage (déformation dans le temps sous charge constante) et sera même trois fois plus importante que la déformation instantanée (fig 1.2.).

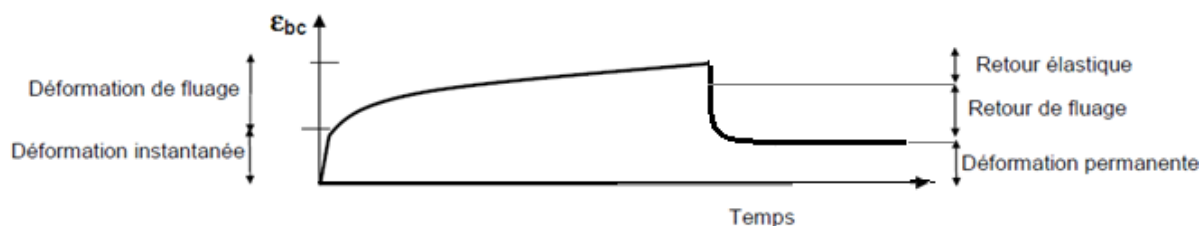


Fig.1.3 Diagramme Contraintes – Déformations à long terme [7]

d- Module de déformations différées (ELS) :

Le module de déformation différée dû aux déformations différées du béton, et qui correspondant à des charges de longue durée d'application (réglementairement plus de 24 heures) est:

$$E_{vj} = 3700 \sqrt[3]{f_{cj}} \quad \text{Selon les règles BAEL 91 [1]}$$

L'Eurocode2 [3] préconise l'expression suivante pour l'évaluation du module de déformation différée :

$$E_{vj} = \left[\frac{E_i}{1 + \psi \varphi(t, t_0)} \right]$$

Avec $\varphi(t, t_0)$ correspond au coefficient de fluage qui dépend de la résistance du béton et du coefficient d'humidité RH d'où l'élément est exposé.

ψ prend la valeur 1 pour le calcul des déformations et contraintes limites de fissuration (ELS).

1.2.5 Coefficient de Poisson :

Il est admis que le coefficient de Poisson, relatif aux déformations élastiques du béton non fissuré (ELS), est égal à $\nu=0.2$ (calcul des déformations). Si le béton tendu est fissuré (ELU), il est admis que le coefficient de Poisson est égal à $\nu=0.0$ (calcul des sollicitations).

1.2.6 Coefficient de dilatation thermique :

Si la dilatation thermique n'a pas de conséquences majeures, il est admis que le coefficient de dilatation thermique est égal à $10 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.

2. ACIER POUR BETON ARME

2.1 Procédés de fabrication des aciers pour béton armé :

Pratiquement la totalité des aciers pour béton armé sont élaborés par la filière électrique. Les billettes obtenues sont laminées à chaud pour obtenir :

- Des ronds lisses ou des barres nervurées (train à barres) qui font généralement l'objet d'une trempe et d'un autorevenu à la sortie du laminoir.
- Du fil machine à haute adhérence livré sous forme de couronnes (train à fil) ; ce fil machine peut être alors repris et étiré à froid avant de subir un trancanage (enroulement des spires de façon ordonnée sur une couronne).
- Du fil machine lisse, utilisé comme demi-produit pour la fabrication de fil à haute adhérence (présentant des empreintes ou des verrous), par laminage à froid (galets usinés), le produit peut être livré en produit déroulé (barres droites).

2.2 Caractéristiques mécaniques des aciers [1-3-4] :

Les caractéristiques d'un acier sont déterminées après une série d'essais de traction directe. Elles sont valables pour les aciers en barres, en treillis soudés et les files livrés en couronnes.

Les caractéristiques mécaniques servant de base aux calculs des éléments de béton armé sont:

2.1.1 Module d'élasticité de l'acier :

A partir d'un essai de traction (Fig 2.1), le module d'élasticité de l'acier est pris égal à

$$E_s = 200\,000\text{ MPa} = 2 \times 10^5 \text{ MPa}.$$

Cette valeur est la même en traction et en compression.

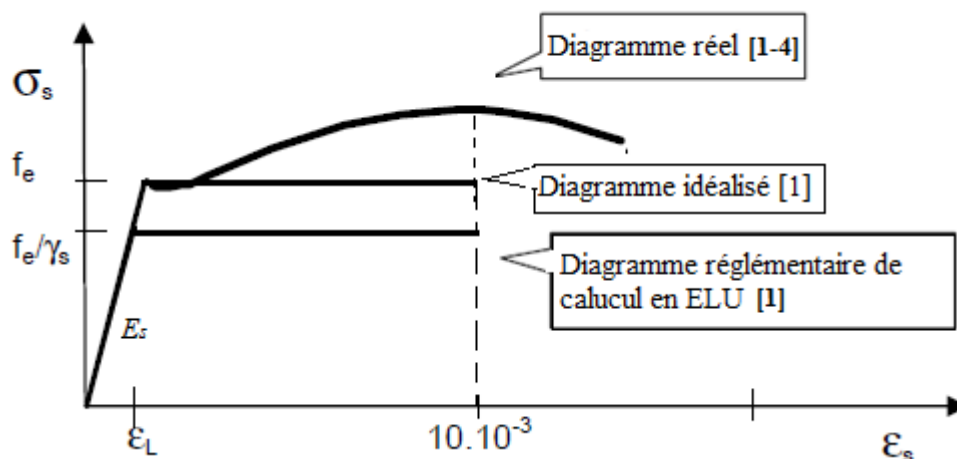


Fig.1.3 Diagramme expérimental Contraintes – Déformations en traction simple de l'acier [1-4]

2.1.2 Limite d'élasticité garantie des aciers :

Les armatures pour béton armé sont constituées par des aciers qui se distinguent par leur nuances qui correspondent à leur limite élastique garantie d'une part, et d'autre part par leur état de surface lisse ou à haute adhérence. Le tableau 1.2 présente les différents types d'acier pour béton armé.

Tableau 1.2 Limite d'élasticité garantie des aciers pour béton armé.

Barres lisses NF A 35-015		Ø	
Nuance FeE		215	235
Limite d'élasticité (MPa)		215	235
Résistance à la traction (MPa)		330/410	410/490
Allongement à la rupture en %		22	25
Barres a haute adhérence NF A 35-016 NF A 35-019		HA	
Nuance FeE		400	500
Limite d'élasticité (MPa)		400	500
Résistance à la traction (MPa)		480	550
Allongement à la rupture en %		14	12
Treillis soudés NF A 35-015		TS	
Nuance FeE		500	
Limite d'élasticité (MPa)		500	
Résistance à la traction (MPa)		550	
Allongement à la rupture en %		8	

2.1.3 Coefficient de dilatation thermique :

Il est admis que le coefficient de dilatation thermique est égal à $10^{-5}/^{\circ}C$. Ce coefficient est le même que celui du béton.

CHAPITRE 2

PRESCRIPTIONS REGLEMENTAIRES

1. DEFINITION DES ETATS LIMITES [1-6]

Un état limite est un état pour lequel une condition requise d'une construction (ou d'un de ses éléments) est strictement satisfaite et cesserait de l'être en cas de variation défavorable d'une des actions appliquées.

2. ETAT LIMITE ULTIME & ETAT LIMITE DE SERVICE

La théorie des états limites considère 2 états limites

2.1. Etat limite ultime (ELU)

Le dépassement de cet état conduit à la ruine de la structure. Au-delà de l'état limite ultime, la résistance des matériaux béton et acier est atteinte, la sécurité n'est plus garantie et la structure risque de s'effondrer. Cet état est caractérisé par :

- Etat limite de l'équilibre statique.
- Etat limite de résistance de l'un des matériaux.
- Etat limite de stabilité de forme (flambement).

2.2. Etat limite de service (ELS)

Les conditions de bon fonctionnement de la structure ont été atteintes. La durabilité de la structure est remise en cause. Cet état est caractérisé par :

- Etat limite d'ouverture de fissures : risque d'ouverture de fissures (contraintes admissibles).
- Etat limite de compression du béton : volontairement la contrainte de compression est limitée à une valeur raisonnable.
- Etat limite de déformation : flèche maximale.

L'état limite de service atteint remet en cause l'aptitude au service de la structure (fissures, fuites, désordres divers). En revanche, la sécurité (c'est à dire sa résistance) n'est pas remise en cause.

3. ACTIONS CARACTERISTIQUES

Ce sont les différentes actions auxquelles sera soumise la construction ; elles sont classées en trois catégories en fonction de leur fréquence d'apparition.

Les états limites distinguent principalement 3 types d'actions caractéristiques : les actions permanentes, les actions variables et les actions accidentelles.

Les valeurs attribuées à ces diverses actions sont des valeurs caractéristiques : c'est à dire qu'elles tiennent compte du caractère aléatoire de la valeur des actions (en d'autres termes, il n'est pas possible de déterminer avec précision la valeur de telle ou telle action). Elles sont donc issues d'un calcul probabiliste et acceptent le risque que dans 5% ou 10% des cas la valeur réelle de ces actions dépasse (cas défavorable) la valeur caractéristique retenue.

3.1. Les actions permanentes (Gi)

Les actions permanentes ont une intensité constante ou très peu variable dans le temps. Elles sont désignées par la lettre G. Elles comportent :

- Poids propre de la structure : calculé d'après les dimensions prévues aux dessins d'exécution, la masse volumique du béton armé étant pris égale à $2,5 \text{ t/m}^3$.
- Les charges des superstructures, des équipements fixes.
- Les efforts dus à des poussées des terres ou à des liquides dont le niveau est peu variable
- Aux déformations imposées à la construction (précontraintes).

3.2. Les actions variables (Qi)

Les actions variables ont une intensité qui varie fréquemment et de façon importante dans le temps. Elles sont désignées par la lettre Q. Elles comportent :

- Charges d'exploitation (ratio d'utilisateurs, de véhicules,...etc.) classées par durée d'application (provisoire, longue durée)
- Charges climatiques (neige et vent)
- Effets thermiques

3.3. Les actions accidentelles (Fa)

Sont des actions de courtes durées. Elles comportent : séisme – action de chocs - action de feu -...etc. Elles ne sont à considérer que si des documents d'ordre public ou le marché le prévoient.

4. SITUATIONS, COMBINAISONS & SOLLICITATIONS DE CALCUL

4.1. Situations

Les états limites distinguent principalement 2 types de situation :

4.1.1 Situation durable :

La durée d'application est du même ordre que la durée de vie de la construction.

4.1.2 Situation temporelle :

La durée d'application est beaucoup plus faible que la durée de vie de la construction, on trouve :

- Situations transitoires.
- Situations accidentelles.

4.2. Combinaisons de calcul :

Pour une situation donnée, il convient de rechercher les combinaisons d'action les plus dangereuses. Car la sécurité une fois assurée pour celle-ci le sera pour toutes les autres.

Trois types de combinaisons sont à envisager :

- Combinaisons fondamentales (ELU).
- Combinaisons accidentelles (ELU).
- Combinaisons rares (ELS).

4.3. Sollicitations de calcul :

Pour une combinaison d'action donnée, on calcul les sollicitations, c.-à-d., le moment de flexion, le moment de torsion, l'effort normal et l'effort tranchant à l'aide des méthodes de la résistance des matériaux, ou d'autres méthodes.

4.3.1 Sollicitations de calcul vis-à-vis ELU (résistance et de stabilité de forme) :

a- Combinaison fondamentale : C.F

$$1.35G_{max} + G_{min} + \gamma_{Q1}Q_1 + \Sigma 1.3\psi_{0i}Q_i$$

Avec :

- G_{max} : ensemble (somme) des actions permanentes défavorables.
- G_{min} : ensemble (somme) des actions permanentes favorables.
- Q_1 : action variable dite de base.
- Q_i : autres actions variables dites d'accompagnement avec leur coefficient ψ_{0i}

b- Combinaison accidentelle : C.A

$$G_{max} + G_{min} + F_{AC} + \psi_{11}Q_1 + \Sigma \psi_{2i}Q_i$$

Avec :

- F_{AC} : valeur nominale de l'action accidentelle.
- $\Psi_{11}Q_1$: valeur fréquente d'une action variable.
- $\Psi_{2i}Q_i$: valeur quasi permanente d'une action variable.

4.3.2 Sollicitations de calcul vis-à-vis des états-limites de service (ELS) :

Elles résultent de la combinaison d'action suivante dite combinaison rare :

$$G_{max} + G_{min} + Q_1 + \sum \Psi_{0i} Q_i$$

Tableau 2.1. Coefficients Ψ_{0i} , Ψ_{11} , Ψ_{2i} selon les règles BAEL[1-6]

		CF ELS	C.A	
NATURE DES CHARGES		Ψ_{0i}	Ψ_{11}	Ψ_{2i}
Charges d'exploitation	Archives	0.90	0.90	0.80
	Parcs de stationnement	0.90	0.75	0.65
	Salles de réunions			
	- à places assises	0.77	0.65	0.4
	- à places debout	0.77	0.75	0.25
	Salles d'exposition – Halles divers	0.77	0.65	0.25
	Autres locaux	0.77	0.75	0.65
Charges climatiques	Vent (W)	0.77	0.20	0
	Neige (Sn) - altitude $\leq$ à 500 m	0.77	0.15	0
	- altitude $>$ à 500m	0.77	0.30	0.1
	Variation de températures	0.6	0.5	0

5. ETATS LIMITES ULTIMES DE RESISTANCE ELUR

5.1. Hypothèses fondamentales de calcul

H1 : Conservation des sections planes : (hypothèse de Navier : petites déformations) les sections droites restent planes après déformation.

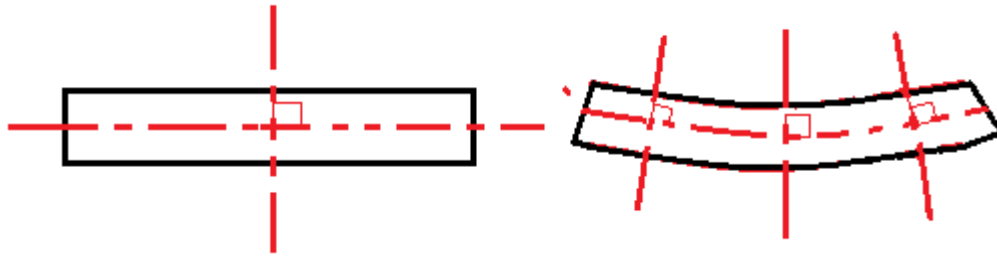


Fig 2.1 Conservation des sections planes.

H2 : Résistance à la traction du béton est négligée à cause de la fissuration.

H3 : Compatibilité des déformations acier-béton : il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures d'acier et le béton $\varepsilon_b = \varepsilon_a$.

H4 : Raccourcissement ultime du béton est limité à :

$\varepsilon_{bu} = 3.5\text{‰}$ en flexion simple, $\varepsilon_{bu} = 2\text{‰}$ en compression simple

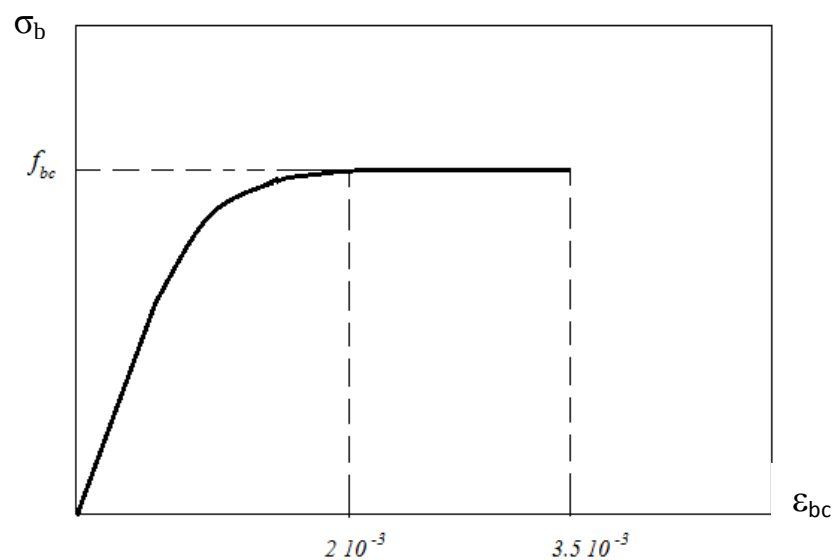


Fig 2.2 Diagramme contraintes-déformation béton en compression simple

H5 : Allongement ultime de l'acier est limité à : $\varepsilon_{au} = 10\text{‰}$ en traction et en compression

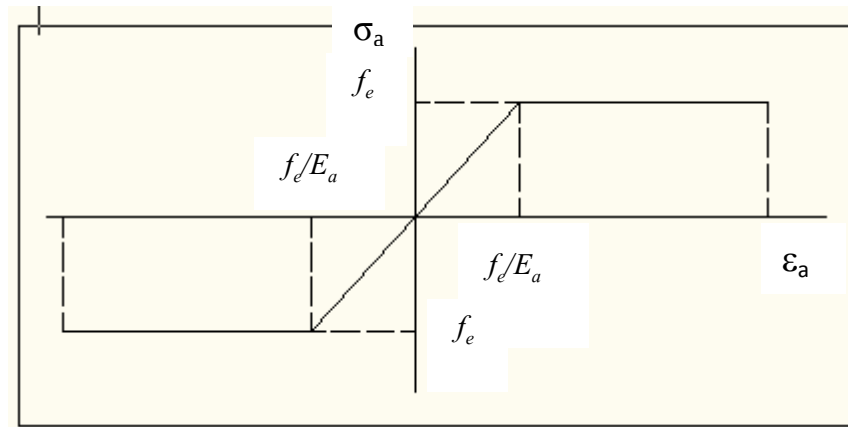


Fig 2.3 Diagramme contraintes-déformation acier
traction-compression

H6 : Diagramme des 03 pivots

5.2. Règles des 3 pivots

Les positions que peut prendre le diagramme des déformations d'une section droite passent obligatoirement par l'un des 03 pivots A-B-C (figure 2.4).

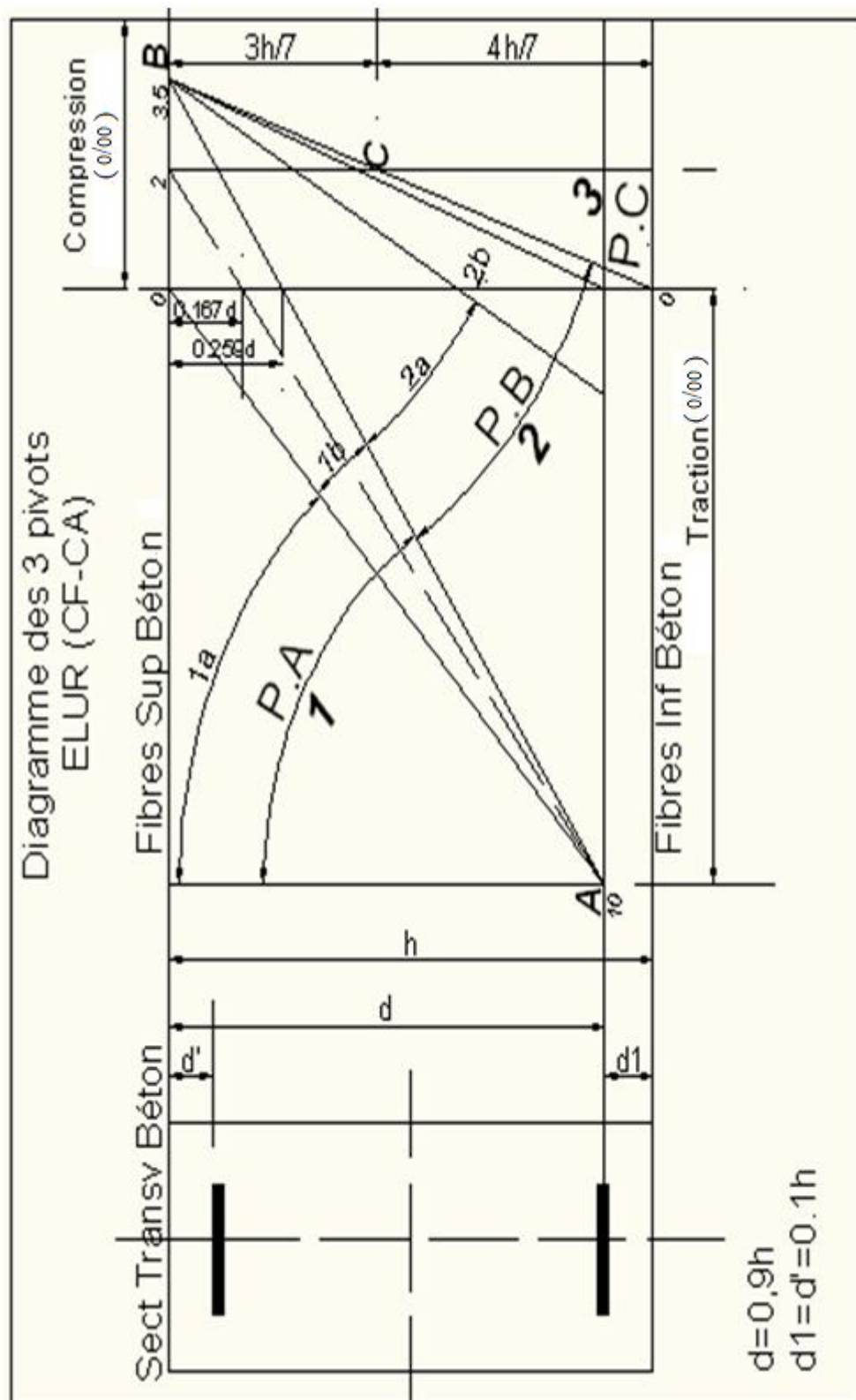


Fig 2.4. Diagramme des 03 pivots

Le problème consiste à trouver les positions limites du diagramme des déformations d'une section, de sorte qu'aucune des déformations limites ne soit dépassée. La section étant sollicitée à l'état limite ultime, selon les différents types de sollicitations, normales qui sont : la traction pure, la traction excentrée, la flexion simple, la flexion composée et la compression pure.

PIVOT A

Région 1 : caractérisée par un Allongement Ultime de l'Acier situé du côté le plus tendu, égal à 10 ‰.

Région 1a : caractérisée par

- Section entièrement tendue
- Axe neutre en dehors de la section
- Traction pure ou traction + flexion

Région 1b : caractérisée par

- Section partiellement comprimée (partiellement tendue)
- Axe neutre à l'intérieur de la section
- Flexion simple ou composée

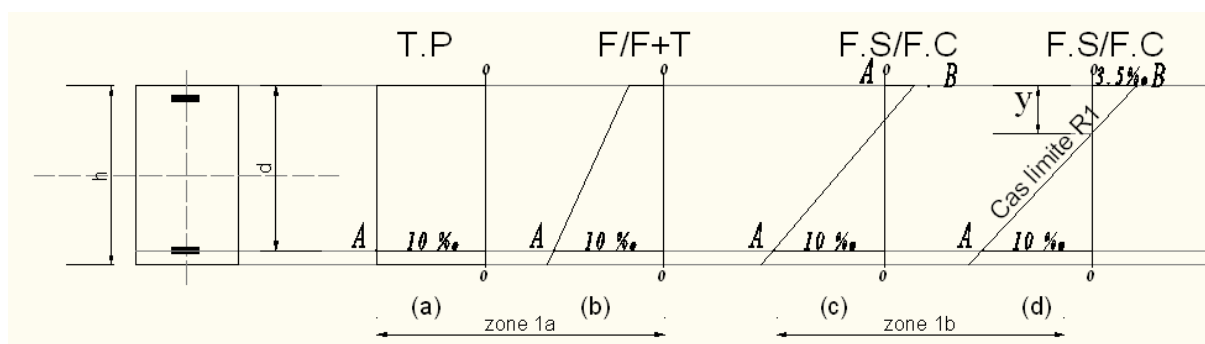


Fig 2.5. Pivot A – déformations limites.

Région 1a :

a : Traction simple (pure) : tous les allongements sont égaux à 10 ‰.

b : Section entièrement tendue (effort de traction avec faible excentricité)

Région 1b :

c : Flexion simple ou composée. Le béton n'atteint pas son raccourcissement ultime 3.5 ‰.

d : flexion simple ou composée. Le béton atteint son raccourcissement ultime 3.5 ‰. C'est un cas limite pour la région1 (Pivot A).

Définition des cas limites Région1 et Région2 (Pivot A et Pivot B) :

$$\Delta \equiv \frac{3.510^{-3}}{1010^{-3}} = \frac{y}{d-y}$$

$$13.5y - 3.5d = 0$$

$$\rightarrow y = 0.2593d$$

si $y \leq 0.2593d \rightarrow \text{Pivot A (Région 1)}$

si $y > 0.2593d \rightarrow \text{Pivot B (Région 2)}$

PIVOT B

Région 2 : caractérisée par un raccourcissement du béton ultime comprimé à 3.5 ‰.

- La section est partiellement comprimée
- L'axe neutre à l'intérieur de la section
- Flexion simple ou composée

Région 2a : L'allongement de l'acier est compris entre 10 ‰ et ε_{sl} (valeur qui correspond à la résistance de l'acier considéré).

Région 2b : L'allongement de l'acier est compris entre ε_{sl} et 0.

Région 2c : Tous les aciers subissent un raccourcissement. Une faible partie de la section en béton reste tendue.

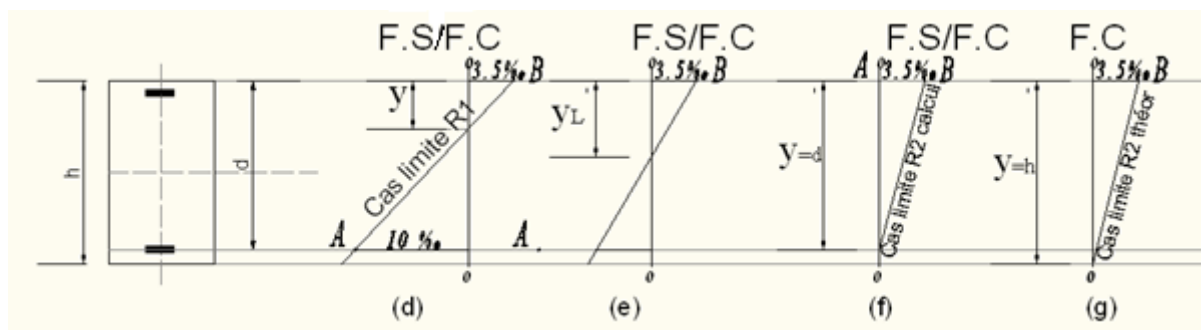


Fig 2.6. Pivot B – déformations limites.

d : Même chose que pour le pivot A (Région 1)

e : Flexion simple ou flexion composée quand le béton atteint son raccourcissement ultime et

l'allongement de l'acier est inférieur à $\varepsilon_s = \varepsilon_{sl}$

f : Flexion simple ou flexion composée, avec un allongement dans l'acier nul (contraintes dans les armatures nulles)

g : Flexion composée avec effort de compression quand le béton atteint son raccourcissement ultime 3.5 ‰ et la fibre la plus tendue à un raccourcissement nul. C'est un cas limite pour le pivot B (Région 2).

Définition des cas limites Région2 et Région 3 (Pivot B et PivotC) :

si $y \leq d \rightarrow \text{Pivot B (Région 2)}$

si $y > d \rightarrow \text{Pivot C (Région 3)}$

PIVOT C

Région 3 : caractérisée par un raccourcissement ultime du béton égale à 2‰.

- La section est entièrement comprimée
- L'axe neutre en dehors de la section
- Flexion avec compression ou compression simple.

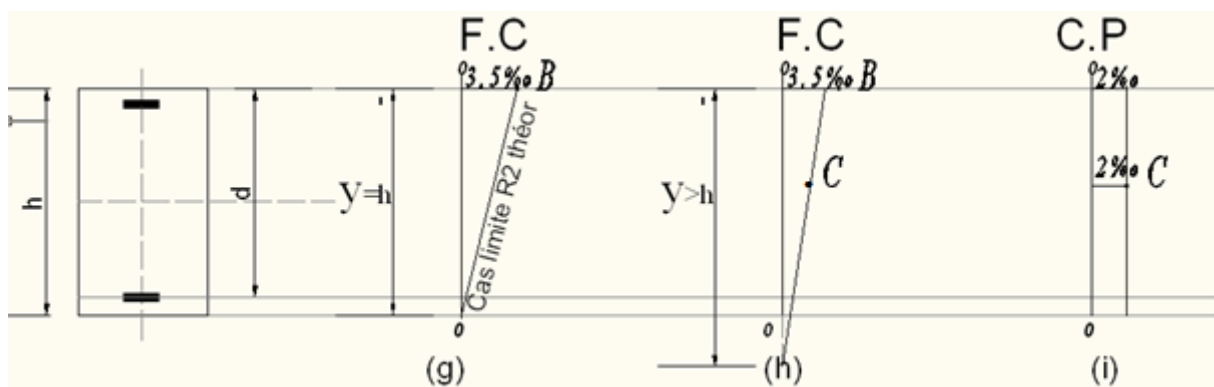


Fig 2.7. Pivot C – déformations limites.

g : Même chose que le pivot B (Région 2)

h : Flexion composée avec effort de compression. L'axe neutre en dehors de la section $\varepsilon_{bc} < \varepsilon_{bcu} = 3.5\%$.

i : Compression simple ($\varepsilon_{bc} = 2\%$ sur toute la hauteur de la section h).

Pour les cas h et i, les droites de déformation passent par le point C ($y \geq h$).

5.3. Diagramme déformations-contraintes béton

5.3.1 Diagramme caractéristique

Le diagramme caractéristique d'un béton représente la relation entre la déformation et la contrainte de ce béton quand celui-ci est soumis à une contrainte uniaxiale. Le diagramme a généralement la forme ci-dessous (figure 2.8). Il permet de définir le module d'élasticité longitudinal sécant.

5.2.2 Diagramme idéalisé (pour le calcul des sections) : Parabole-réctangle

Ce diagramme est une modélisation mathématique du diagramme caractéristique. Il est composé d'un arc de parabole et d'un segment de droite. Ce diagramme permet de nombreuses définitions et de nombreuses formulations simples.

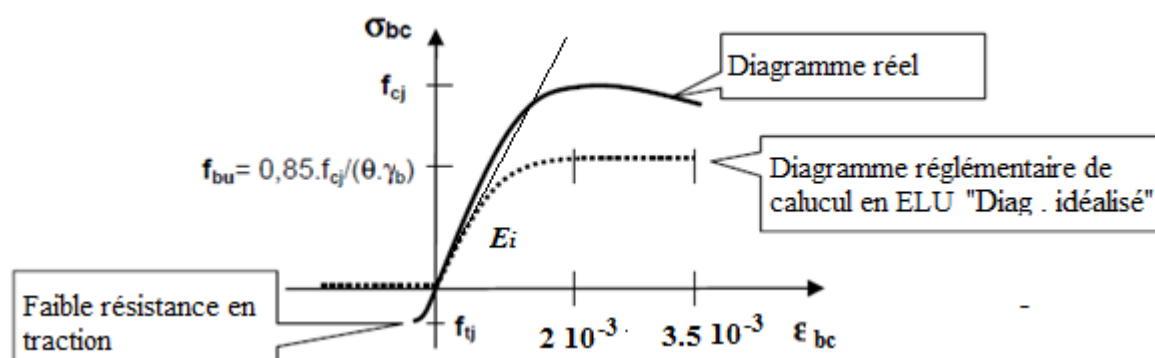


Fig 2.8. Diagramme idéalisé contraintes-déformation du béton en compression [1-4].

La résistance ultime du béton en compression à ELU σ_{bcu} est :

Si : $2 \cdot 10^{-3} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5 \cdot 10^{-3}$:

$$\sigma_{bcu} = \frac{0.85}{\theta} \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

Si

$0 \leq \varepsilon_{bc} < 2 \cdot 10^{-3}$:

$$\sigma_{bcu} = \frac{0.85}{\theta} \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \left[1 - \left(\frac{2 \cdot 10^{-3} - \varepsilon_{bc}}{2 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \right]$$

Avec :

$\theta = 1$ pour les charges appliquées plus de 24 heures

$\theta = 0.9$ pour les charges appliquées entre 1 heure et 24 heures

$\theta = 0.85$ pour les charges appliquées moins qu'une heure

γ_b : coefficient de sécurité : = 1.5 pour C.F (charges : permanente + variable) en situation durable ou transitoire.

= 1.15 pour C.A ((charges : permanente + accidentelle + variable) en situation accidentelle.

NOTA :

Quand la section n'est pas entièrement comprimée (c-à-d région 1 (A) ou région 2 (B)), on peut utiliser dans les calculs un diagramme simplifié rectangulaire équivalent défini comme suit :

- Sur une distance $0.2y$ à partir de l'axe neutre, la contrainte de résistance dans le béton est nulle.

- Sur la distance $0.8y$, restante la contrainte de résistance vaut :

a) $0.85 (f_{cj}/\theta\gamma_b)$, pour les zones comprimées dont la largeur est croissante (ou constante) vers les fibres les plus comprimées.

b) $0.80 (f_{cj} / \theta \gamma_b)$, pour les zones comprimée dont la largeur est décroissante (ou constante) vers les fibres les plus comprimées.

5.4. Diagramme déformations-contraintes acier

5.3.1 Diagramme caractéristique :

Le diagramme caractéristique de l'acier représente la relation entre la déformation et la contrainte de l'acier quand celui-ci est soumis à une contrainte uniaxiale de traction (ou compression). Le diagramme a généralement la forme ci-dessous. Il permet de définir le module d'élasticité longitudinal (partie élastique linéaire).

5.3.2 Diagramme idéalisé (pour le calcul des sections) :

Ce diagramme est une modélisation mathématique du diagramme caractéristique.

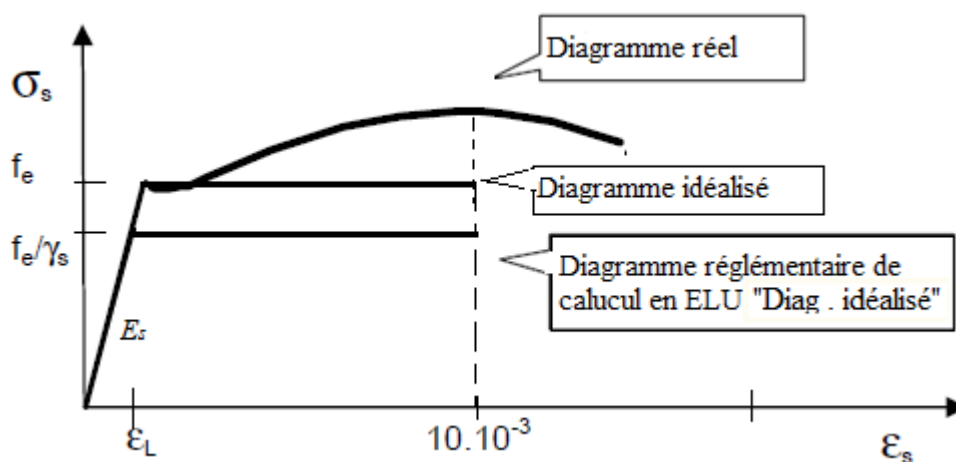


Fig 2.10. Diagramme idéalisé contraintes-déformation acier en traction (compression)[1-4].

La résistance ultime de l'acier à la traction (compression) à ELU σ_s est :

Si : $\varepsilon_{sl} \leq \varepsilon_s \leq 10 \cdot 10^{-3}$:

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Si

$0 \leq \varepsilon_s < \varepsilon_{sl}$:

$$\sigma = \varepsilon_s E_s$$

Avec :

γ_s : coefficient de sécurité : = 1.15 pour C.F (charges : permanente + variable) en situation durable ou transitoire.
=1 pour C.A ((charges : permanente + accidentelle +variable) en situation accidentelle.

6. CONTRAINTES LIMITES EN ETAT LIMITE DE SERVICE (ELS)

VIS –A-VIS DE LA DURABILITE DE LA STRUCTURE

Les vérifications à effectuer portent sur un état limite de compression du béton et un état limite d'ouverture de fissures.

6.1. Hypothèses de calcul

Les calculs sont conduits à partir des hypothèses suivantes, les sollicitations étant obtenues à l'aide de la combinaison d'actions correspondant à l'état limite de service :

H1 : les sections droites restent planes après déformations.

H2 : il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures d'acier et le béton.

H3 : l'acier et le béton sont considérés comme des matériaux élastiques linéaires et il est fait abstraction du retrait et du fluage du béton.

H4 : le béton tendu est négligé dans le calcul des armatures.

H5 : par convention, le rapport entre les coefficients d'élasticité longitudinale de l'acier et du béton, ou coefficient d'équivalence, est pris égal à $n=E_s/E_b=15$.

H6 : on ne déduit pas l'aire d'acier de l'aire de béton comprimé.

6.2. Etat-limite de compression du béton

La contrainte de compression du béton doit être au plus égale à :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0.6 f_{cj}$$

6.3 Etat-limite d'ouverture des fissures

Il existe trois types de fissuration :

- a- Fissuration peu nuisible (peu préjudiciable) : Exemple, pour les éléments intérieurs d'un bâtiment.

Dans ce cas la contrainte limite de l'acier est :

$$\bar{\sigma}_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

γ_s : coefficient de sécurité : = 1.15

- b- Fissuration préjudiciable : Exemple, pour les éléments extérieurs d'un bâtiment soumis aux conditions climatiques normales et aux intempéries.

Dans ce cas la contrainte limite de l'acier est :

$$\bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{2}{3} f_e, 110\sqrt{\eta f_{tj}}\right)$$

γ_s : coefficient de sécurité : = 1.15

η : Coefficient de fissuration : = 1.0 pour les R.L

= 1.6 pour les H.A

Le diamètre minimal des armatures transversales pour cette fissuration est 6mm

- c- Fissuration très préjudiciable : lorsque les éléments de la construction sont exposés à un milieu agressif ou doivent assurer une étanchéité. Exemple, ouvrage au bord de la mer, sol agressif, etc.

Dans ce cas la contrainte limite de l'acier est :

$$\bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{1}{2} f_e, 90\sqrt{\eta f_{tj}}\right)$$

Avec

γ_s : coefficient de sécurité : = 1.15

η : Coefficient de fissuration : = 1.0 pour les R.L

= 1.6 pour les H.A

Le diamètre minimal des armatures transversales pour cette fissuration est 8 mm.

CHAPITRE 3

ASSOCIATION ACIER-BETON

1 INTRODUCTION

Le béton armé correspond à un mariage judicieux de matériaux aux caractéristiques complémentaires : l'acier pour sa capacité à résister aux contraintes de traction et le béton pour sa capacité à résister à la compression. Le béton étant lui-même un mélange intelligent de granulats, de ciment et d'eau. Le ciment et l'acier résultent quant à eux de processus de fabrications spécifiques

L'adhérence est un phénomène de liaison tangentielle à l'interface acier béton due au frottement et à l'arc-boutement des bielles de béton. Les règles à respecter sont relatives à l'Etat Limite Ultime.

Supposons une barre scellée dans un massif en béton. Si on exerce un effort d'arrachement suivant l'axe de la barre, on peut avoir trois modes de rupture :

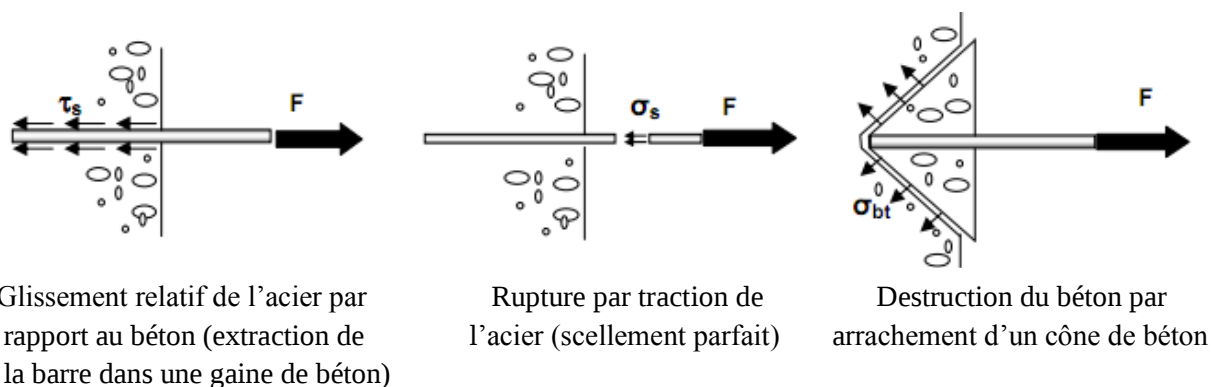


Fig. 3.1 Essai d'arrachement d'une barre scellée dans un massif en béton.

Dans une pièce en béton armé, il existe deux types d'armatures :

- Armatures longitudinales (A_l) : sont établies pour résister aux efforts axiaux (traction-compression), aux moments de flexion et de torsion et aux combinaisons entre ces différentes sollicitations.
- Armatures transversales (A_t) : sont établies pour résister aux efforts transversaux de type effort tranchant.

-

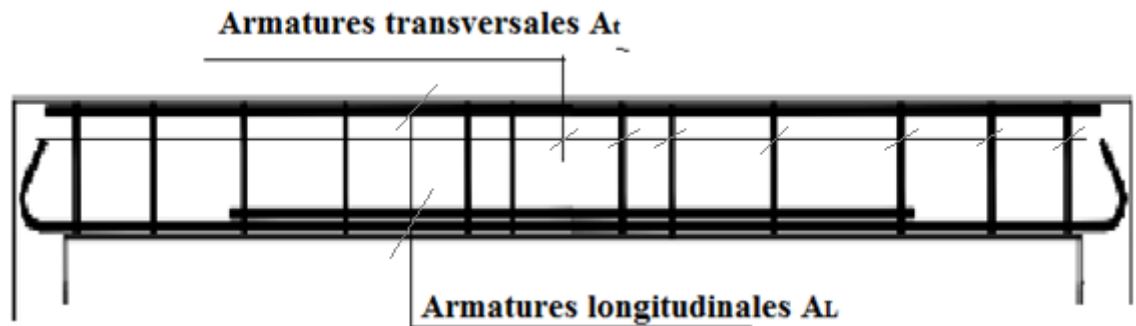


Fig 3.2 Types d'armatures.

2 ANCORAGE DES BARRES [1-6]

Les barres d'armatures doivent être correctement ancrées.

2.1. Ancrages rectilignes (droits)

Les barres rectilignes, de diamètre $\emptyset$ et de limite élastique f_e , sont ancrées sur une longueur L_s dite longueur de scellement droit.

A défaut de calculs, on peut adopter forfaitairement les valeurs suivantes :

$L_s = 40 \emptyset$ pour les aciers FeE400

$L_s = 50 \emptyset$ pour les aciers FeE500 , FeE215 et FeE235.

Dans le cas des barres tendues, il est recommandé d'utiliser un ancrage courbe.

2.2. Ancrages courbes

Si on exerce un effort de traction sur un élément de barre courbe scellé dans le béton, la courbure de la barre donne naissance à un effort de frottement, fonction de la courbure de la barre et du coefficient de frottement acier sur béton, pris égal à 0,4. Cet effet est connu sous le nom "d'effet de courroie".

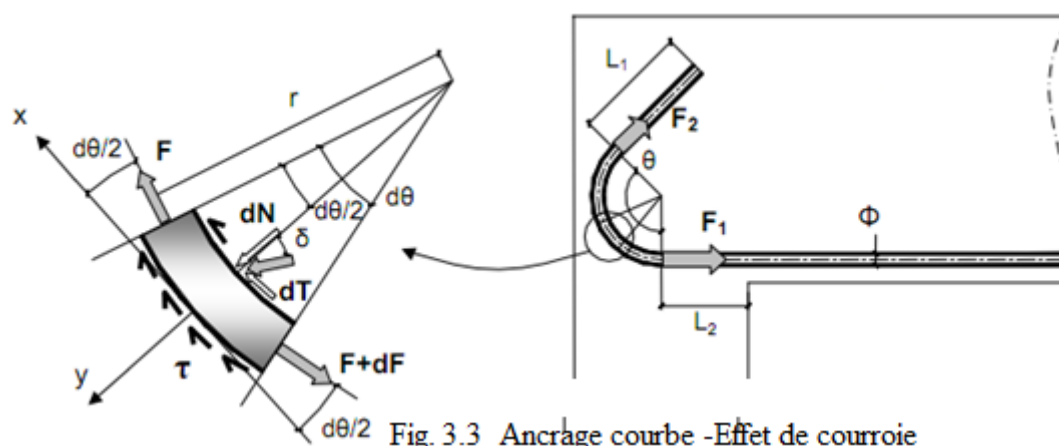


Fig. 3.3 Ancrage courbe - Effet de courroie

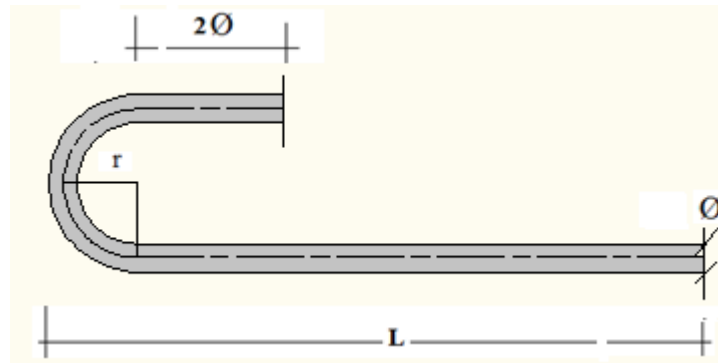
F_1 : effort à l'entrée de la courbure.

F_1 : effort à la sortie de la courbure.

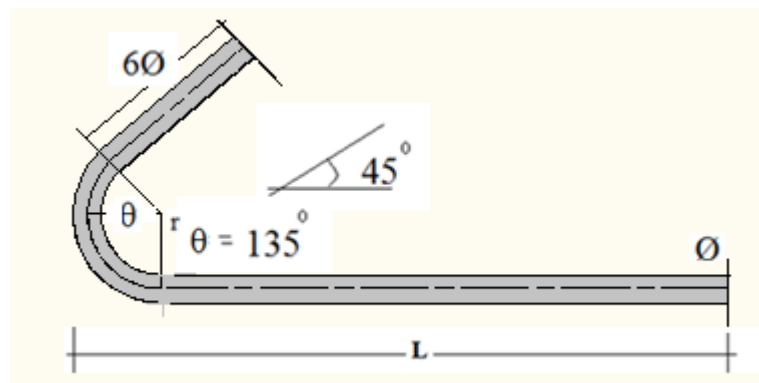
τ : contrainte d'adhérence.

2.2.1 Type d'ancrages : on utilise le plus fréquemment

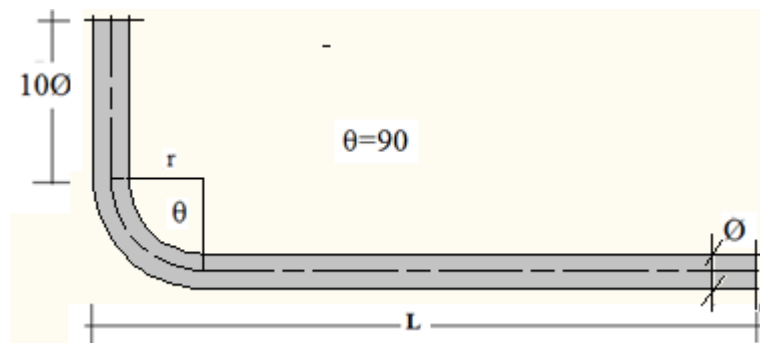
- Crochets normaux :



- Crochets à 45° :



- Retour d'équerre :



Dans tous les cas :

On admet : $L=0.6L_s$ pour les R.L

: $L=0.4L_s$ pour les H.A

L = longueur d'ancrage dans l'appui.

2.2.2. Rayon de courbure :

Pour des raisons de façonnage et de non-écrasement du béton, le rayon de courbure doit satisfaire les conditions suivantes :

$r \geq 3 \phi$ pour les R.L

$r \geq 5.5 \phi$ pour les H.A

Pour une console, ces conditions deviennent :

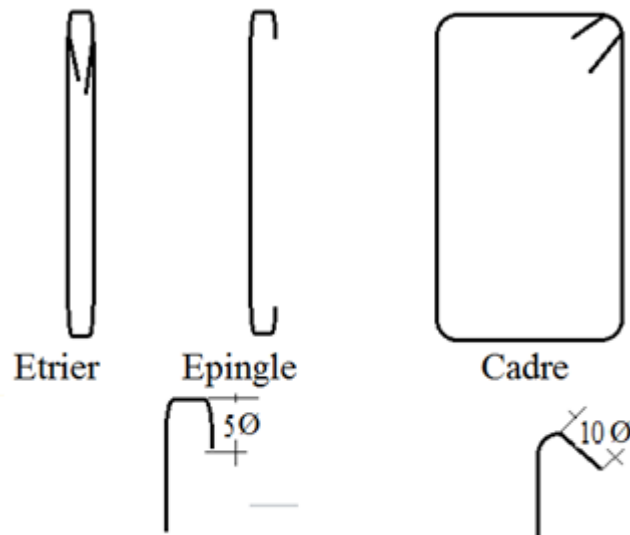
$r \geq 7 \phi$ pour les R.L

$r \geq 11 \phi$ pour les H.A

c) Ancrage des cadres, étriers et épingles :

rayon de courbure : $r \geq 2 \phi$ pour les R.L

$r \geq 3 \phi$ pour les H.A



3. RECOUVREMENTS [1-6]

Les aciers livrés dans le commerce étant de longueur limitée ; il peut être nécessaire, dans une pièce de grande longueur de constituer chaque armature longitudinale au moyen de plusieurs barres constitutives.

Pour rétablir la continuité entre les armatures, on utilise un recouvrement, c-à-d qu'on fait chevaucher les barres sur une longueur L_r dite longueur de recouvrement.

Longueur de recouvrement :



a- Armatures tendues :

Pour les barres rectilignes :

$$C \leq 5 \varnothing : L_r = L_s \quad \text{avec } C : \text{enrobage des aciers.}$$

$$C > 5 \varnothing : L_r = L_s + t$$

Pour les barres munies de crochets :

$$C \leq 5 \varnothing : L_r = 0.6 L_s \quad \text{pour les R.L}$$

$$L_r = 0.4 L_s \quad \text{pour les H.A}$$

$C > 5 \phi$: $L_r = 0.6 L_s + t$ pour les R.L

$L_r = 0.4 L_s + t$ pour les H.A

b- Armatures comprimées :

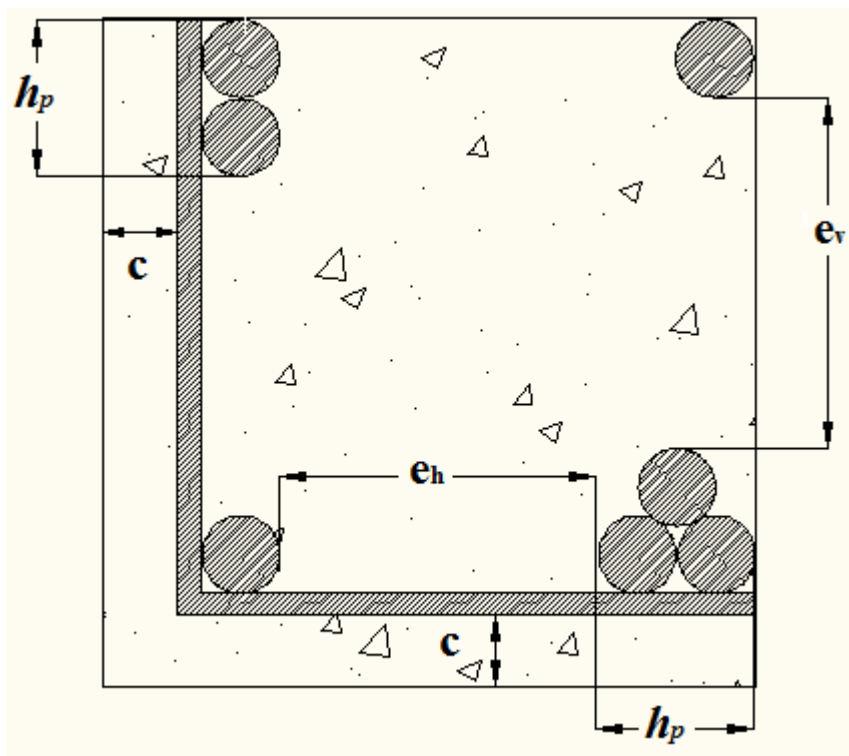
Le recouvrement doit être obligatoirement rectiligne (pas de crochets).

$L'_r = 0.6 L_s$

c- Treillis soudés :

On utilise les règles données au paragraphe « a » ci-dessus.

4. DISPOSITION DES ARMATURES [1-6]



4.1 Enrobage des aciers C :

C'est la distance du nu d'une armature à la paroi la plus proche.

$$C = \max (C_1, C_2, C_g)$$

$$C_1 = \max (\phi \text{ ou } h_p; 1 \text{ cm})$$

$C_2 = 5 \text{ cm}$ fissuration très préjudiciable.

3 cm fissuration préjudiciable.

1 cm fissuration non préjudiciable.

$\emptyset$: diamètre de la barre.

h_p : hauteur du paquet s'il existe.

C_g : plus grosse dimension du granulat utilisé dans le béton.

4.2 Distances entre nus des armatures :

a- Distance horizontale « e_h » :

$$e_h \geq \max (\emptyset \text{ ou } h_p ; 1.5C_g)$$

b- Distance verticale « e_v » :

$$e_v \geq \max (\emptyset \text{ ou } h_p ; 1C_g)$$

Chapitre 4

DIMENSIONNEMENT DES SECTIONS SOUMISES AUX ACTIONS CENTREES

TRACTION SIMPLE – TIRANTS

1. INTRODUCTOIN [1-2-6]

Une pièce en béton armé est sollicitée en traction simple si l'ensemble des forces extérieures agissant à gauche d'une section S se réduit à une force normale unique N (effort normal) perpendiculaire à S, appliquée au centre de gravité de la section et dirigée vers la gauche. Dans un tel élément appelé tirant, le centre de gravité des aciers est confondu avec celui de la section du béton. Et le béton tendu étant négligé.

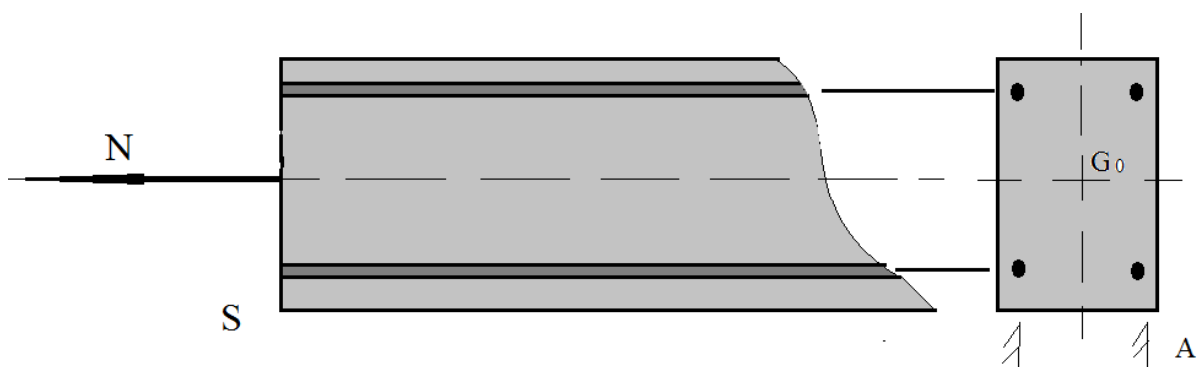


Fig 4.1 Tirant

2. CONDITION DE NON-FRAGILITE

La section du béton « B » n'intervient pas dans les calculs des aciers (armatures), vu que le béton ne travaille pas à la traction ; néanmoins la sollicitation provoquant la fissuration du béton ne doit pas entraîner le dépassement de la limite d'élasticité de l'acier.

$$B f_{t28} \leq A f_e \rightarrow A_{min} = \frac{B f_{t28}}{f_e}$$

Avec :

B : section transversale du béton.

f_{t28} : résistance à la traction $f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28}$

f_e : limite d'élasticité de l'acier (400 ou 500 MPa)

3. DISPOSITIONS PRATIQUES

- le nombre de barres longitudinales $n \geq 4$.
- Espacement des cadres : $t \leq \min(b, h)$.
- Diamètres des cadres : ϕ_t
 - fissuration peu nuisible : $\phi_t = 6\text{mm}$.
 - fissuration préjudiciable : $\phi_t \geq 6\text{mm}$.
 - fissuration très préjudiciable : $\phi_t \geq 8\text{mm}$.

4. CALCUL DES ARMATURES (ELUR)

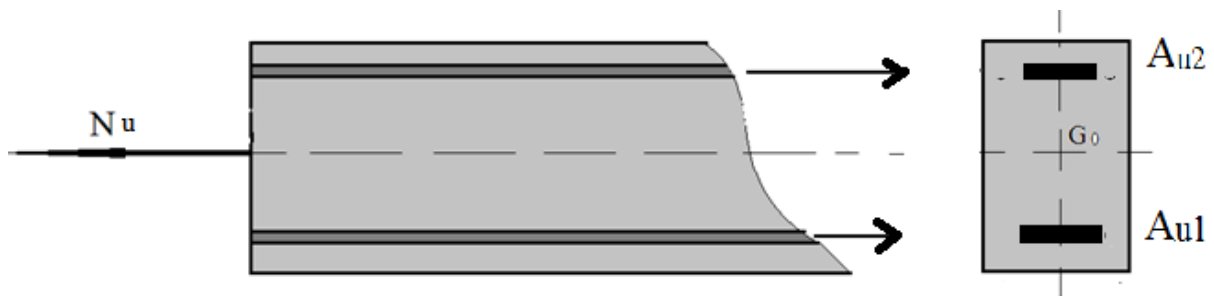


Fig. 4.2 Calcul des armatures à ELUR

Béton tendu négligé.

$$F_{s1} = F_{s2} ; F_s = F_{s1} + F_{s2} = (A_{u1} + A_{u2})\sigma_s = A_u \sigma_s$$

$$\Sigma F = 0 :$$

$$N_u - (F_{s1} + F_{s2}) = N - F_s$$

$$A_u = \frac{N_u}{\sigma_s}$$

D'après le diagramme des 03 pivots :

$$\text{Traction simple : Pivot A} \longrightarrow \varepsilon_s = \varepsilon_{su} = 10\text{‰} \longrightarrow \sigma_s = f_e / \gamma_s$$

5. CAL

CUL DES ARMATURES EN ELS

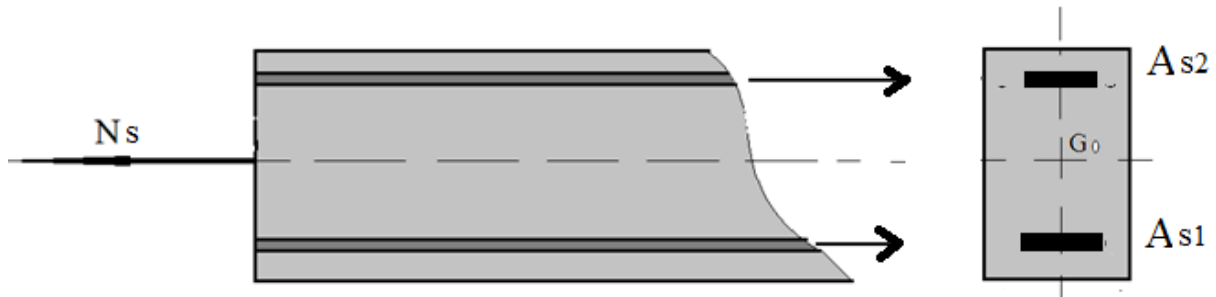


Fig. 4.3 Calcul des armatures à ELS

$$F_{s1} = F_{s2}$$

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = (A_{s1} + A_{s2}) \bar{\sigma}_s = A_s \bar{\sigma}_s$$

$$N_s = F_s = A_s \bar{\sigma}_s$$

$$A_s = \frac{N_s}{\bar{\sigma}_s}$$

$$\bar{\sigma}_s$$

: la contrainte limite de l'acier (domaine élastique), qui dépend du type de fissuration

a- Fissuration peu nuisible (peu préjudiciable)

Dans ce cas la contrainte limite de l'acier est :

$$\bar{\sigma}_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

b- Fissuration préjudiciable:

Dans ce cas la contrainte limite de l'acier est :

$$\bar{\sigma}_s = \min \left(\frac{2}{3} f_e, 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \right)$$

Le diamètre minimal des armatures transversales pour cette fissuration est 6mm

c- Fissuration très préjudiciable :

Dans ce cas la contrainte limite de l'acier est :

$$\bar{\sigma}_s = \min \left(\frac{1}{2} f_e, 90 \sqrt{\eta f_{tj}} \right)$$

Avec : pour toutes les types de fissurations

γ_s : coefficient de sécurité : = 1.15

η : Coefficient de fissuration : = 1.0 pour les R.L

= 1.6 pour les H.A

6. ARMATURE DE CALCUL FINALE

$$A_f = \max(A_u, A_s, A_{\min})$$

EXEMPLE D'APPLICATION

Soit un tirant de section 30x30 cm², sollicité à : $N_g=10$ kN ; $N_q=20$ kN ; $N_w=13$ kN.

Fissuration préjudiciable (exposé aux intempérie)

Acier FeE400 ; $F_{c28}=25$ MPa ; $c_g=25$ mm.

Solution :

Fissuration préjudiciable (ELUR –ELS)

I) ELUR :

a- Combinaison fondamentale : C.F

$$1.35G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q1}Q_1 + \sum 1.3\gamma_{Qi}Q_i$$

$G_{\min}=0$

a) Charge d'exploitation N_q : Action de base.

$$1.35 N_g + 1.5 N_q + 1.3(0.77)N_w$$

$$AN \quad Nu1 = 1.35 \cdot 10 + 1.5 \cdot 20 + 13 = 56.5 \text{ kN}$$

b) Charge due au vent N_w : Action de base

$$1.35 N_g + 1.5 N_w + 1.3(0.77)N_q$$

$$AN \quad Nu2 = 1.35 \cdot 10 + 1.5 \cdot 13 + 20 = 53 \text{ kN}$$

$$Nu = \max(Nu1 ; Nu2) = 56.5 \text{ kN}$$

$$A_{uf} = Nu/\sigma_s = 56500/(100 \cdot 348) = 1.62 \text{ cm}^2$$

II) ELS :

$$G_{max} + G_{min} + Q_1 + \sum \psi_{0i} Q_i$$

a) Charge d'exploitation N_q : Action de base.

$$N_g + N_q + (0.77)N_w$$

$$AN \quad Ns1 = 10 + 20 + (0.77) 13 = 40 \text{ kN}$$

b) Charge due au vent N_w : Action de base

$$N_g + N_w + (0.77)N_q$$

$$AN \quad Ns2 = 10 + 13 + (0.77)20 = 38.4 \text{ kN}$$

$$Ns = \max(Ns1 ; Ns2) = 40 \text{ kN}$$

$$A_{sf} = Ns / \bar{\sigma}_s$$

Fissuration préjudiciable :

$$\bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{2}{3} f_e, 110\sqrt{\eta f_{t28}}\right), \quad \eta = 1.6 \text{ HA}$$

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2.1 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{2}{3} 400, 110\sqrt{1.6 \cdot 2.1}\right) = 201.6 \text{ MPa}$$

$$A_{sf} = 4010^3 / (100 \cdot 201.6) = 1.98 \text{ cm}^2$$

Armature minimale :

$$A_{min} = B \frac{f_{t28}}{f_e} = 4.73 \text{ cm}^2$$

Armature finale

$$A_f = \max(A_u, A_s, A_{min}) = 4.73 \text{ cm}^2$$

Armature appliquée :

$$A_{app} = 4T14 = 6.24 \text{ cm}^2$$

Remarque : les armatures doivent être de diamètre $\geq 12 \text{ mm}$ et symétrique sur la section du béton.

Armature transversale :

Fissuration préjudiciable $\phi_t \geq 6 \text{ mm}$ FeE 215 ou FeE235.

Espacement des cadres : $t_{max}(b ; h) = 30 \text{ cm}$; soit $t = 20 \text{ cm}$

Enrobage des aciers :

$$c = \max(c_1 ; c_2 ; c_g)$$

$$c_1 = \max(\phi_{lmax}; 1\text{cm}) = 1.4\text{cm}$$

Fissuration préjudiciable $c_2 = 3\text{ cm}$

$$c = \max(2 ; 1 ; 2.5) = 3\text{ cm}$$

Espacement horizontal entre les barres longitudinales :

$$e_h = \max(\phi_{max}, 1.5c_g) = 3.75\text{cm}$$

Espacement vertical entre les barres longitudinales :

$$e_v = \max(\phi_{max}, c_g) = 2.5\text{cm}$$

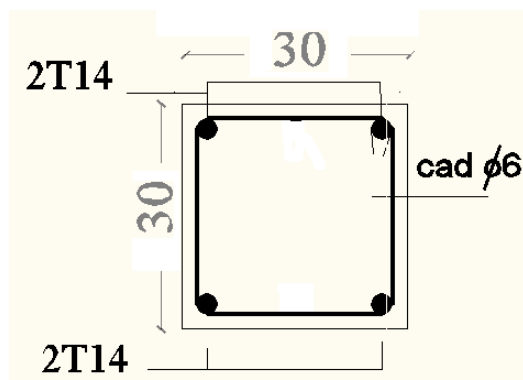


Fig. 4.4 Schéma de ferrailage du tirant.

Chapitre 5

DIMENSIONNEMENT DES SECTIONS SOUMISES AUX ACTIONS CENTREES COMPRESSION SIMPLE

1. INTRODUCTOIN [1-2-6]

Une pièce en béton armé est sollicitée en compression simple lorsque l'ensemble des forces exerçant sur celle-ci peut être réduit par rapport au centre de gravité de la section B' de la pièce à une force unique de compression N' .

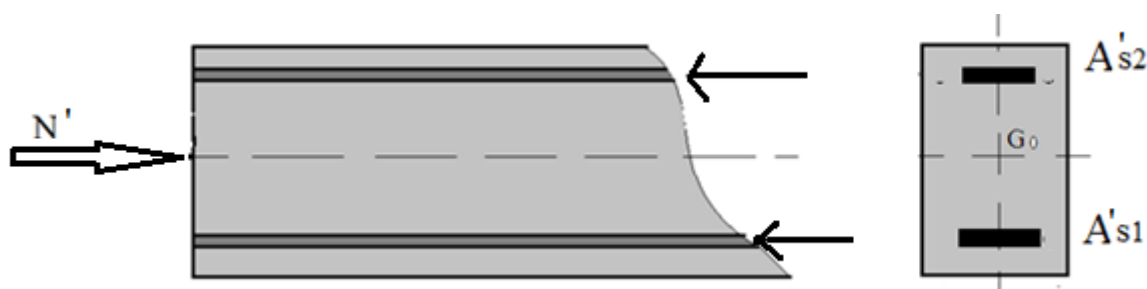


Fig. 5.1 Elément sollicité à la compression simple.

Les éléments structuraux qui peuvent être dominés par ce type de force sont :

- Les poteaux et voiles de bâtiment.
- Piles et culés des ponts.
- Voûtes et coques.

2. DISPOSITIONS PRATIQUES

Les armatures longitudinales doivent être placées de façon symétrique.

La distance entre axe de deux armatures longitudinales soit au plus égale à :

$$z = \min(15\phi_{l_{\min}}, b + 10\text{cm}, 40\text{cm})$$

Les armatures intermédiaires doivent être reliées par des cadres rectangulaires sous losange, étrier ou épingle.

Dans les zones de recouvrement les crochets sont à éviter, car le béton risque de s'éclater

3. CONDITION DE NON-FRAGILITE (Armature minimale) :

a) Armatures longitudinales principales :

- Zone courante :

$$A_{min} = \max \left(210^{-3}bh, 8 \frac{(b+h)}{100} \right)$$

$$A_{max} \leq 510^{-2}bh$$

$$A_{min} \leq A_{app} \leq A_{max}$$

b) Armatures transversales :

Les armatures transversales sont constituées par des barres en ronds lisses R.L ou hautes adhérence H.A selon le calcul de l'effort tranchant.

$$\phi_t \geq \frac{\phi_{lmax}}{3}$$

ϕ_{lmax} : diamètre maximal des armatures longitudinales appliqué.

4. DIMENSIONNEMENT ET CALCUL DES SECTIONS (B',A')

Le dimensionnement de la section du béton B' et le calcul des armatures A' se fait en :

ETAT LIMITE DE STABILITE DE FORME « ELUSTF » (C.F –C.A) :

En se basant sur des règles forfaitaires simples, le calcul des éléments en béton au flambement (instabilité de la section transversale) sera établi sur la base de la formule forfaitaire suivante :

$$N'_u = \alpha \left[\frac{B'_r f_{c28}}{0.9\theta\gamma_b} + A'_u \sigma'_s \right]$$

N'_u : effort de compression centré appliqué.

α : coefficient qui est en fonction de l'élancement λ

Pour $\lambda \leq 50 \quad \longrightarrow \quad \alpha = 0.85 / [1 + 0.2(\lambda/35)^2]$

Pour $50 < \lambda \leq 70 \quad \longrightarrow \quad \alpha = 0.6(50/\lambda)^2$

λ : élancement de l'élément = l/i

i : rayon de giration de la section transversale. $i = \sqrt{\frac{I}{B'}}$

I : moment d'inertie de la section transversale par rapport au centre de gravité de la section dans le sens du flambement considéré.

B' : aire de la section du béton.

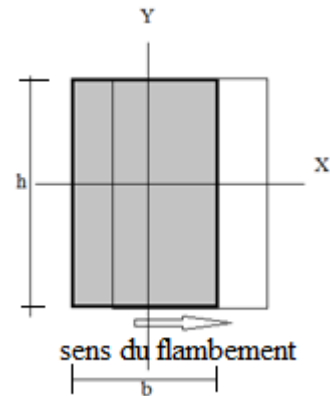
Exemple pour section rectangulaire :

a) Flambement est dans le sens X (parallèle au X)

$$I = \frac{hb^3}{12}, \quad B' = bh$$

$$i = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{3.46}$$

$$\lambda_x = 3.46 \frac{l_{fx}}{b}$$

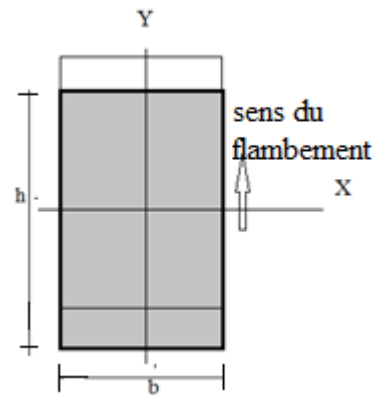


b) Flambement est dans le sens Y (parallèle au Y)

$$I = \frac{h^3b}{12}, \quad B' = bh$$

$$i = \sqrt{\frac{h^3b}{12bh}} = \frac{h}{3.46}$$

$$\lambda_y = 3.46 \frac{l_{fy}}{h}$$



$$\lambda = \max(\lambda_x, \lambda_y)$$

l_f : longueur de flambement : la longueur de flambement telle qu'elle est définie en R.D.M, correspond à la distance entre 2 points d'inflexion de la déformée.

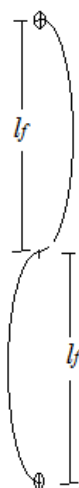


Fig. 5.2 Longueur de flambement.

Suivant les conditions de fixation (aux limites), on pourra avoir les cas suivants :

1) *Cas du poteau isolé :*

Conditions aux limites	Art-Art	Art- Enc	Enc-Enc	Enc dépl-Enc	Enc-libre
Longueur de flambement	l_0	$0.7 l_0$	$0.5 l_0$	l_0	$2 l_0$

2) Cas des bâtiments en BA : Généralement on prend $l_f = l_{fx} = l_{fy}$.

a) Système autostable : Contreventement assuré par les poteaux et les poutres seulement :

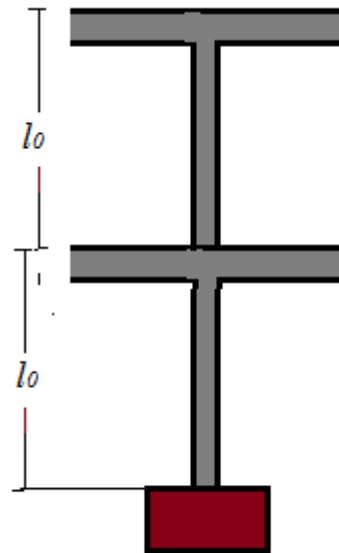
$$l_f = l_0$$

b) Système contreventé par des voiles ou murs porteurs :

- Si le poteau est à ses extrémités :

- soit encastré dans un massif (exp : fondation)

- soit assemblé à des poutres de plancher ayant au moins la même raideur que les poteaux dans le sens du flambement considéré (X ou Y) et les traversant de part en part.



Dans ces cas suscités

$$l_f = 0.7 l_0$$

B'_r (section réduite) : les règles BAEL pénalisent les poteaux de faible section, sensibles aux imperfections d'exécutions. Pour cela ces règles prévoient une section réduite pour le calcul des sections et effort ultime maximal.

$$B'_r = (h-2cm)(b-2cm) \text{ au lieu de } B' = hb$$

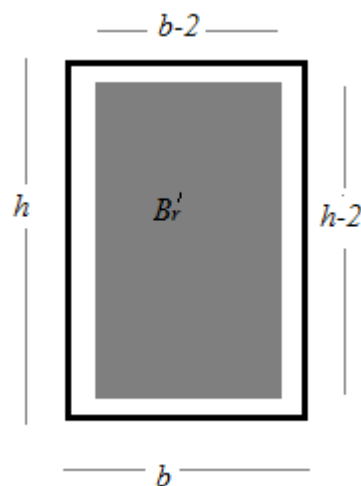


Fig. 5.3 Section réduite B'_r .

Avec :

$\theta = 1$ pour les charges appliquées plus de 24 heures

$\theta = 0.9$ pour les charges appliquées entre 1 heure et 24 heures

$\theta = 0.85$ pour les charges appliquées moins qu'une heure

γ_b : coefficient de sécurité : = 1.5 pour C.F (charges : permanente + variable) en situation durable ou transitoire.

=1.15 pour C.A ((charges : permanente + accidentelle + variable) en situation accidentelle.

σ_s' : compression simple : Pivot C (région 3) $\varepsilon_s' = 2 \cdot 10^{-3} \longrightarrow \sigma_s' = \sigma_2'$

Si $\varepsilon_{sl} \leq \varepsilon_s \leq 10 \cdot 10^{-3}$:

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Si $0 \leq \varepsilon_s < \varepsilon_{sl}$:

$$\sigma = \varepsilon_s E_s$$

EXEMPLE D'APPLICATION

Soit un poteau soumis à $N_u' = 980 \text{ kN}$, de section $40 \times 20 \text{ cm}^2$. $L_f = 3.0 \text{ m}$; $FeE400$; $\gamma_s = 1.15$; $f_{c28} = 25 \text{ MPA}$; $\theta = 1$; fissuration peu nuisible ; $c_g = 25 \text{ mm}$.

Solution:

ELUSTF :

$$N_u' = \alpha \left[\frac{B_r' f_{c28}}{0.9 \theta \gamma_b} + A_u' \sigma_s' \right]$$

$$A_u' N_u' = \left[\frac{N_u'}{\alpha} - \frac{B_r' f_{c28}}{0.9 \theta \gamma_b} \right] \frac{1}{\sigma_s'}$$

$$B_r' = (40 - 2)(20 - 2) = 684 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_s' = \sigma_2' = (\varepsilon_s' = 2.0/1000), \quad \varepsilon_{sl}' = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = 1.739/1000 \leq 2.0/1000$$

$$\sigma_s' = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1.15} = 348 \text{ MPa}$$

$$\lambda = \lambda_{\max} = 3.46 \frac{l_f}{b} = 51.9$$

$$50 < \lambda \leq 70 \rightarrow \alpha = 0.6 \left(\frac{50}{\lambda} \right)^2 = 0.56$$

$$A' = \left[\frac{98010^3}{0.56} - \frac{64810^2 \cdot 25}{0.9151} \right] \frac{1}{348} = 1390 \text{ mm}^2$$

$$A' = 13.90 \text{ cm}^2$$

Armature minimale:

$$A_{\min} = \max \left(210^{-3} b h, 8 \frac{(b + h)}{100} \right) = 4.8 \text{ cm}^2$$

$$A_{\max} \leq 510^{-2} b h = 40 \text{ cm}^2$$

Armature finale :

$$A_f = \max(A', A_{\min}) = 13.90 < 40 \text{ cm}^2$$

Armature appliquée : Soit $A_{app} = 4T20 + 2T14 = 15.64 \text{ cm}^2$

Armature transversale :

$$\phi_t \geq \frac{\phi_{l\max}}{3} = \frac{20}{3} = 6.7 \rightarrow 8 \text{ mm}$$

Espacement :

$$t_{\max} = \min(151.4, 30, 40) = 21 \text{ cm}$$

soit $t = 20 \text{ cm}$ ou 15 cm

Enrobage des aciers :

$$c = \max(c_1 ; c_2 ; c_g)$$

$$c_1 = \max(\phi_{l\max}; 1 \text{ cm}) = 2 \text{ cm}$$

fissuration peu nuisible $c_2 = 1 \text{ cm}$

$$c = \max(2 ; 1 ; 2.5) = 2.5 \text{ cm}$$

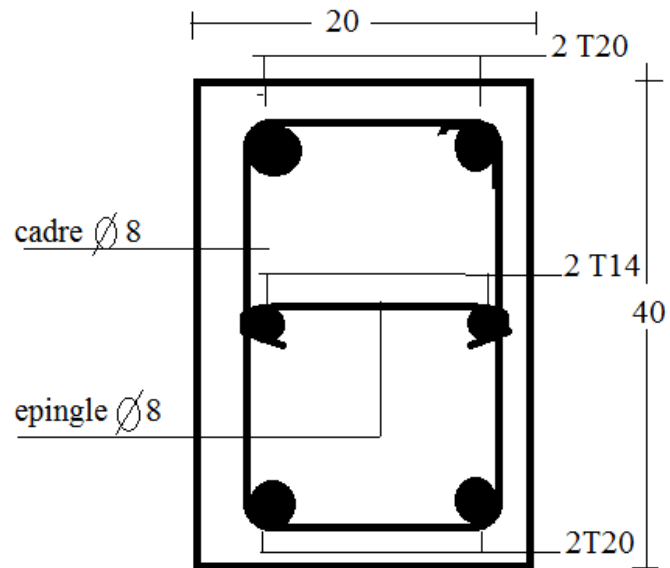


Fig. 5.4 Schéma de ferrailage du poteau.

Chapitre 6

CALCUL DES SECTIONS SOUMISES A LA FLEXION SIMPLE

6-I. SECTION RECTANGULAIRE [1-2-6]

1. DEFINITION GENERALE

Pour une pièce (poutre) soumise à la flexion simple, les efforts internes à gauche d'une section droite S peuvent être réduits à :

- Un moment fléchissant M_f
- Un effort tranchant V

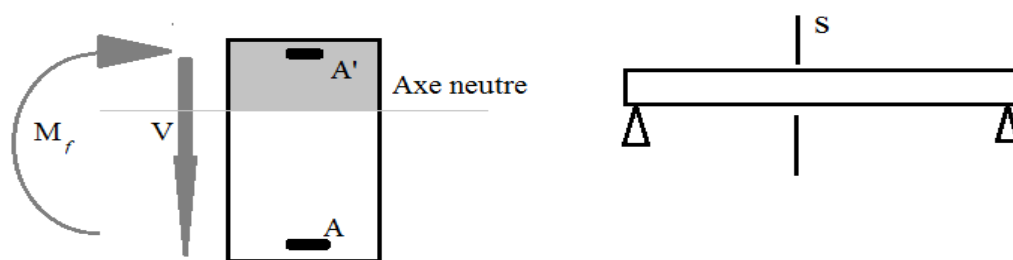


Fig. 6.1 Types de sollicitations dues à la flexion simple

Dans ce chapitre nous étudierons uniquement les effets du moment fléchissant M_f .

2. ETAT LIMITE ULTIME DE RESISTANCE

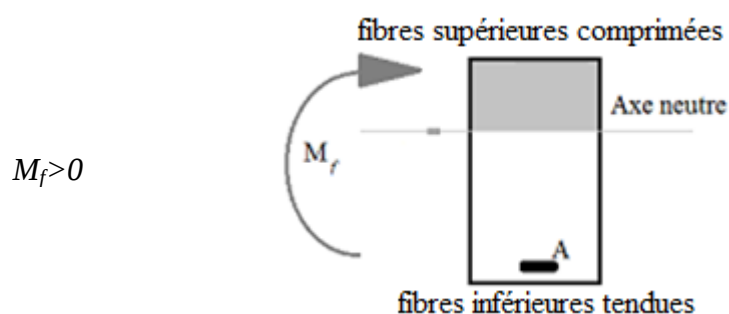
D'après le diagramme des 3 pivots :

Flexion simple : Pivot A région 1b.

Pivot b régions 2a,2b.

2.1 Section rectangulaire sans armatures comprimées

Par hypothèse :



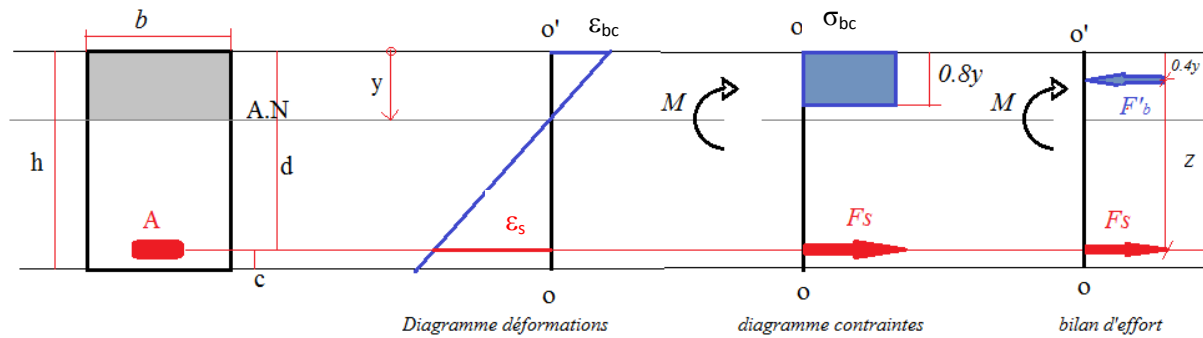


Fig.6.2 Bilan de déformation, contraintes et efforts à l'ELUR.

2.1.1 Notations :

$d=0.9h$: hauteur utile.

$c=0.1h$: distance entre c.d.g des armatures tendues et la fibre la plus tendue.

y : distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée.

A : section totale des armatures tendues.

$$\sigma_{bcu} = \frac{0.85}{\theta} \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \quad : \text{contrainte de béton dans la zone comprimée}$$

σ_s : contrainte de traction dans les armatures tendues.

2.1.2 Equations d'équilibre :

$$\sum F = 0, \sum M = 0$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow F'_b = F_s$$

$$F_s = A\sigma_s, F'_b = 0.8by\sigma_{bc} \Rightarrow 0.8by\sigma_{bc} - A\sigma_s = 0.$$

$$\sum M = 0$$

$$a) \sum M / F_s = 0 \Rightarrow M - F_s z = 0 \Rightarrow M - A\sigma_s z = 0$$

$$b) \sum M / F'_b = 0 \Rightarrow M - F'_b z = 0 \Rightarrow M - 0.8by\sigma_{bc} z = 0$$

$$z = d - 0.4y \Rightarrow M - 0.8by\sigma_{bc} (d - 0.4y) = 0$$

Posons.

$$y = \alpha d, \quad z = \beta d \quad \mu = \frac{M}{\sigma_{bc} b d^2}$$

Flexion simple $\rightarrow$ régions 1b, 2a, 2b

$$\Rightarrow 0 \leq y \leq d \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$z = d - 0.4y \Rightarrow z = d(1 - 0.4\alpha)$$

avec,

$$z = \beta d \Rightarrow \beta = 1 - 0.4\alpha$$

Alors,

$$M - 0.8by\sigma_{bc}(d - 0.4y) = 0$$

$$M - 0.8by\sigma_{bc}d(1 - 0.4\alpha) = 0$$

$$M - 0.8b\sigma_{bc}\alpha d^2(1 - 0.4\alpha) = 0$$

$$\frac{M}{b\sigma_{bc}bd^2} - 0.8\alpha(1 - 0.4\alpha) = 0$$

comme $\mu = \frac{M}{b\sigma_{bc}bd^2} \Rightarrow \mu = 0.8\alpha(1 - 0.4\alpha)$

$$\mu - 0.8\alpha + 0.32\alpha^2 = 0$$

comme $0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha$ racine positive

$$\alpha = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2\mu})$$

Remarque $\alpha \uparrow \mu \uparrow$

2.1.3 Moments de référence de la section (M_{AB} - M_{BC})

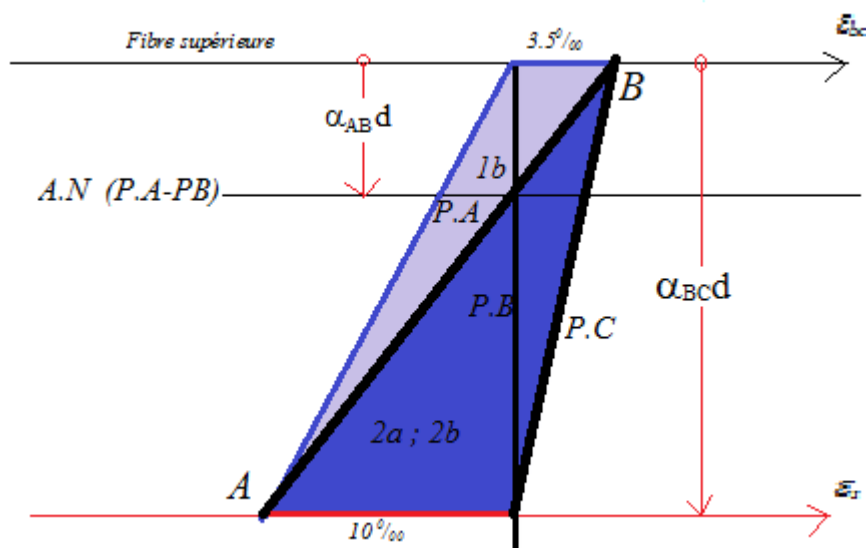


Fig.6.3 Moments de référence à l' ELUR.

M_{AB} : moment ultime qui représente la frontière entre pivot A et pivot B ; et qui provoque :

- Acier $\varepsilon_s = \varepsilon_{su} = 10 \text{‰}$
- Béton $\varepsilon_{bc} = \varepsilon_{bcu} = 3.5 \text{‰}$

M_{BC} : moment ultime qui représente la frontière entre pivot B et pivot C ; et qui provoque :

- Acier $\varepsilon_s = 0.002$ ($y=d$)
- Béton $\varepsilon_{bc} = \varepsilon_{bcu} = 0.0035$

a) Pour $M=M_{AB}$: moment ultime qui représente la frontière entre pivot A et pivot B

$$\text{On a} \quad \mu = \frac{M}{b\sigma_{bc}bd^2} \Rightarrow M = \mu\sigma_{bc}bd^2$$

$$1) \text{ pour } M = M_{AB} \Rightarrow \mu_{AB} = \frac{M_{AB}}{b\sigma_{bc}bd^2} \Rightarrow M_{AB} = \mu_{AB}\sigma_{bc}bd^2$$

on a

$$\mu = 0.8\alpha(1-0.4\alpha) \Rightarrow \mu_{AB} = 0.8\alpha_{AB}(1-0.4\alpha_{AB})$$

$$\Delta \equiv \Delta \Rightarrow \frac{3.5}{10} = \frac{\alpha_{AB}d}{d(1-\alpha_{AB})} \Rightarrow \alpha_{AB} = 0.2593, \mu_{AB} = 0.186$$

$$M_{AB} = 0.186\sigma_{bc}bd^2$$

$$\begin{array}{l} \text{si} \quad 0 \leq y \leq \alpha_{AB}d = 0.2593d \\ c-a-d \quad 0 \leq \mu \leq 0.186 \\ c-a-d \quad M \leq M_{AB} \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{On est dans le Pivot A} \end{array} \right.$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon_s = 0.002, \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

b)- Pour $M=M_{BC}$: moment limite entre régions 2 et 3 (P.B – P.C)

Cas limite pour le calcul des sections $y=d$ $\alpha_{BC}=1$

$$\mu = 0.8\alpha(1-0.4\alpha) \Rightarrow \mu_{BC} = 0.8\alpha_{BC}(1-0.4\alpha_{BC})$$

$$\alpha_{BC} = 1, \mu_{BC} = 0.48$$

$$M_{BC} = 0.48\sigma_{bc}bd^2$$

$$\begin{array}{l} \text{si} \quad 0.2593d \leq y \leq d \\ c-a-d \quad 0.186 \leq \mu \leq 0.48 \\ c-a-d \quad M \leq M_{BC} \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{On est dans le Pivot B} \end{array} \right.$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon_{bc} = 0.0035, \varepsilon_s < 0.002$$

c)- Pour $M > M_{BC}$ moment limite région 3 :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si} \quad y > d \\ c - a - d \quad \mu > 0.48 \\ c - a - d \quad M > M_{Bc} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{On est dans le Pivot C} \\ \text{Cas de flexion composée} \end{array}$$

2.1.4 Allongements relatifs de l'acier :

$$a) - \text{Pour} \quad \mu \leq \mu_{AB} \Rightarrow \text{Pivot A}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_s = 10^0 /_{00} \quad \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$b) - \text{Pour} \quad \mu_{AB} < \mu \leq \mu_{AB} \Rightarrow \text{Pivot B}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{bc} = 3.5^0 /_{00}$$

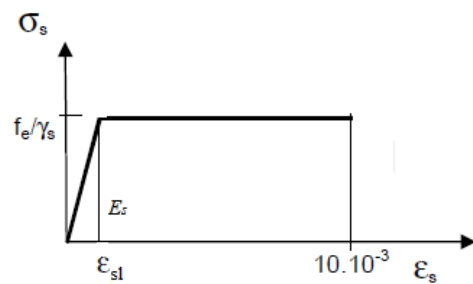
$$\Delta \equiv \Delta \quad \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{bc}} = \frac{d - y}{y} = \frac{d(1 - \alpha)}{\alpha d} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{bc} \frac{1 - \alpha}{\alpha} = 3.5^0 /_{00} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

Remarque $\alpha \uparrow \quad \varepsilon_s \downarrow$

$$\text{si} \quad \varepsilon_s < \varepsilon_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s E_s$$

$$\text{si} \quad \varepsilon_s \geq \varepsilon_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$



2.1.5 Moment résistant M_l :

Le moment résistant, est le moment obtenu lorsque l'allongement des armatures tendues est égal à :

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Donc le moment résistant « M_l » est le moment limite entre région 2a et 2b.

On a $M = \mu \sigma_{bc} b d^2 \Rightarrow M_l = \mu_l \sigma_{bc} b d^2$

$$\mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l)$$

$$\Delta \equiv \Delta \Rightarrow \frac{3.5^0 /_{00}}{\varepsilon_{sl}} = \frac{\alpha_l d}{d(1 - \alpha_l)} \Rightarrow \varepsilon_{sl} = 3.5^0 /_{00} \frac{(1 - \alpha_l)}{\alpha_l}$$

$$\alpha_l = \frac{3.5}{1000 \varepsilon_{sl} + 3.5}$$

avec $\varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s}$ et $\beta_l = 1 - 0.4 \alpha_l$

Alors :

si $\left. \begin{array}{l} M \leq M_l \\ \mu \leq \mu_l \end{array} \right] \Rightarrow$ Les armatures comprimées ne sont pas nécessaires, car les armatures tendues travaillent à leur capacité ultime et le béton comprimé résiste seul aux contraintes de compression : $A' = 0$

si $\left. \begin{array}{l} M > M_l \\ \mu > \mu_l \end{array} \right] \Rightarrow$ Les armatures tendues ne travaillent pas à leur capacité ultime $\sigma_s = f_e / \gamma_s$. Donc pour faire travailler les armatures tendues à leur capacité ultime ($\varepsilon_s = \varepsilon_{sl}$; $\sigma_s = f_e / \gamma_s$), il y'a lieu de prévoir des armatures comprimées A' . Donc A' est nécessaire.

2.1.6 Calcul de l'armature tendue A_u

$$\sum M /_{F_b} = 0 \Rightarrow M - F_s z$$

$$M = F_s z = \sigma_s A_u d (1 - 0.4 \alpha) = \sigma_s A_u d \beta$$

$$A_u = \frac{M}{\sigma_s \beta d}$$

2.1.6 Condition de non-fragilité :

$$A_{min} = 0.23 b d \frac{f_{t28}}{f_e}$$

2.1.7 Récapitulatif : Organigramme de calcul à ELUR d'une section rectangulaire sans armature comprimée

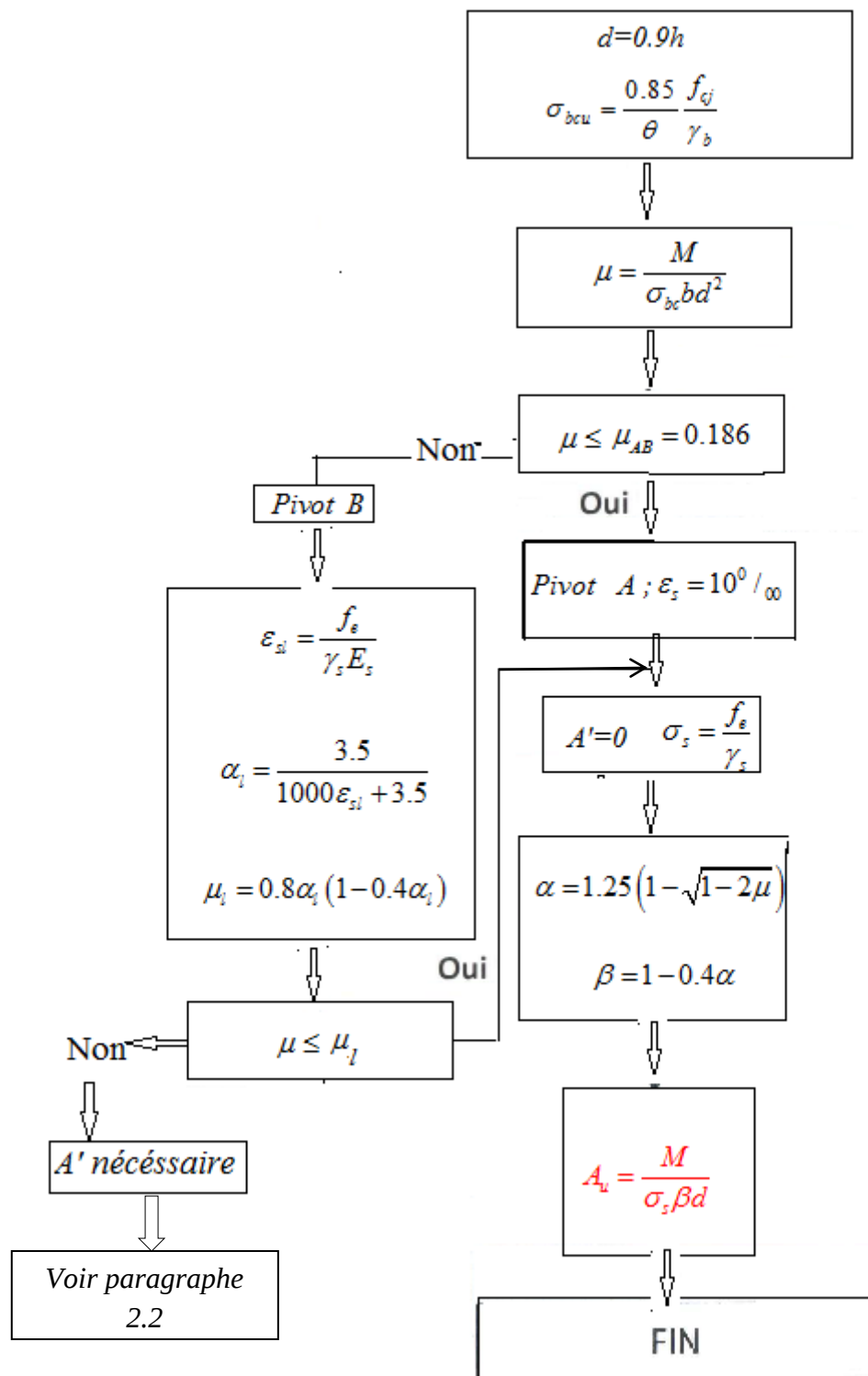
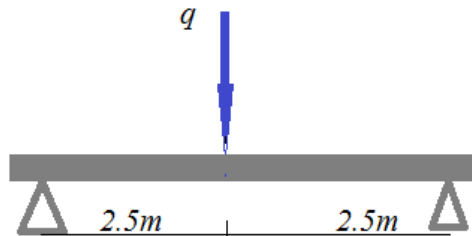


Fig.6.4 Organigramme de calcul d'une section rectangulaire sans armature comprimée à l'ELUR.

EXEMPLE D'APPLICATION

Soit une poutre en béton armé de section $30 \times 60 \text{ cm}^2$ sollicitée à une charge concentrée d'exploitation $q=200 \text{ kN}$, avec ; FeE400 ; $f_{c28}=25\text{MPa}$.

Calculer la section des armatures tendues à l' ELUR.



$$g = 0.3 \times 0.6 \times 25 = 4.5 \text{ kN / ml}$$

$$Mg = \frac{gl^2}{8} = 14.06 \text{ kNm}$$

$$Mq = q \frac{l}{4} = 250 \text{ kNm}$$

$$C.F \quad , M_u = 1.35Mg + 1.5Mq = 394 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{bc} = \frac{0.85 f_{c28}}{\theta \gamma_b}, \quad \theta = 1, \quad \gamma_b = 1.5, \Rightarrow \sigma_{bc} = 14.2 \text{ MPa}$$

$$\mu = \frac{M_u}{\sigma_{bc} b d^2} = 0.317$$

$$\mu_{AB} = 0.186 \leq \mu = 0.317 \leq 0.48 \Rightarrow \text{Pivot } B$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{bc} = 3.5^0 /_{00}$$

Vérification de l'existence des armatures comprimées :

$$\varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = 1.739^0 /_{00}$$

$$\alpha_l = \frac{3.5}{1000 \varepsilon_{sl} + 3.5} = 0.668$$

$$\mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l) = 0.392$$

$$\mu = 0.317 < \mu_l \quad (\text{région 2a}) \Rightarrow \varepsilon_s > \varepsilon_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 348 \text{ MPa}$$

Donc les armatures comprimées ne sont pas nécessaires : $A' = 0$

$$\alpha = 1.25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu} \right) = 0.494$$

$$\beta = 1 - 0.4\alpha = 0.802$$

$$A_u = \frac{M}{\sigma_s \beta d} = 26.14 \text{ cm}^2$$

Armature minimale :

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2.1 \text{ MPa}$$

$$A_{\min} = 0.23 b d \frac{f_{t28}}{f_e} = 1.94 \text{ cm}^2$$

Armature finale :

$$A_f = \max(A_u, A_{\min}) = 26.14 \text{ cm}^2$$

Armature appliquée (Sous réserve de l'armature à ELS : voir paragraphe 3)

Soit

$$A_{\text{app}} = 3 \times 3T20 = 9T20 = 28.26 \text{ cm}^2$$

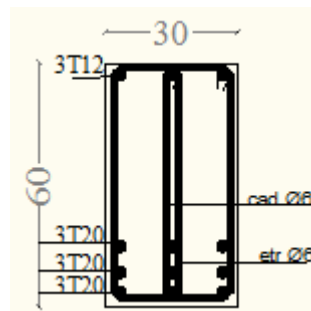
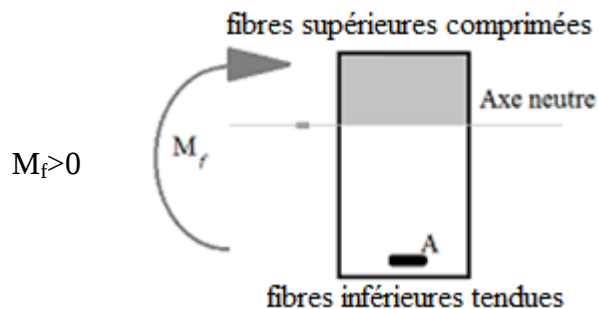


Fig.6.5 Schéma de ferrailage de la poutre.

2.2 Section rectangulaire avec armatures comprimées

Par hypothèse :



Dans ce cas

$$\left. \begin{array}{l} \mu > \mu_l \\ M > M_l \end{array} \right] \Rightarrow A' \text{ est nécessaire} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Région 2b} \\ \varepsilon_{bc} = 3.5^{0/00} \end{array} \right\}$$

2.2.1 Dispositions pratiques :

Si des armatures comprimées sont disposées en dehors des angles de la section les règles BAEL prévoient des étriers ou des épingles au plus tous les 15 $\emptyset$ ($\emptyset$: diamètre minimal des armatures comprimées).



2.2.2 Bilan d'effort :

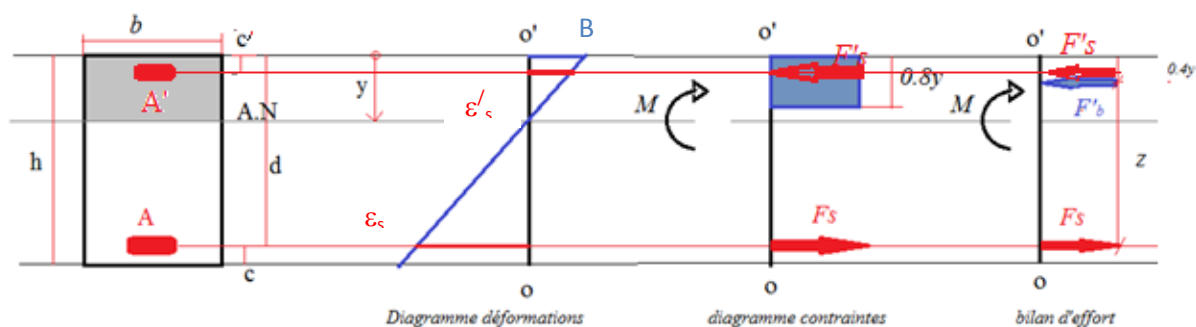


Fig.6.4 Bilan de déformations, contraintes et efforts à l'ELUR.

A' : section totale des armatures comprimées.

C' : distance entre le c.d.g des armatures comprimées et la fibre du béton la plus comprimée.

ε'_s : raccourcissement relatif des armatures comprimées.

F'_s : effort de compression interne dans les armatures comprimées.

2.2.3 Détermination des armatures (A ; A') :

Méthode 1 : Cette méthode consiste à dissocier la section de béton sollicitée au moment fléchissant M en deux sections, à savoir :

- La section de béton équilibre une partie du moment sollicitant qui représente le moment limite M_l , en conséquence ce dernier est équilibré par une partie des armatures tendues A_l .
- Le moment restant $M_2 = M - M_l$ est équilibré par A_2 et A'

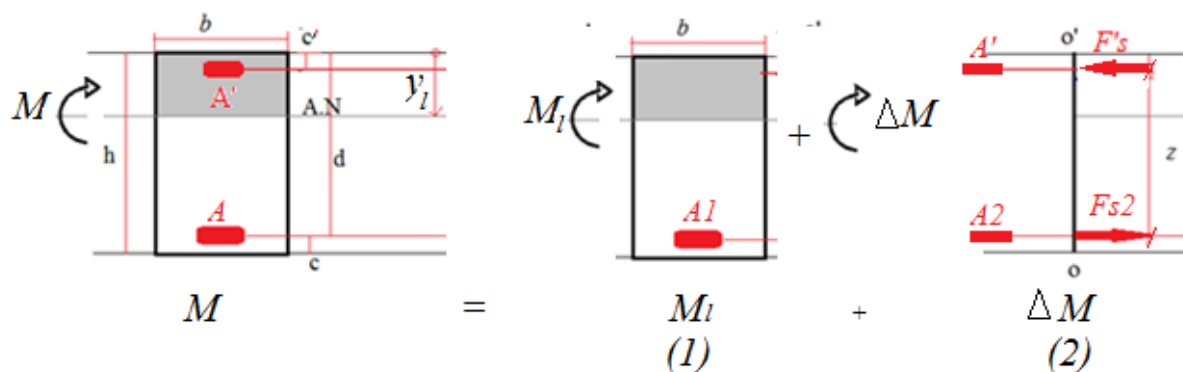


Fig.6.5 Répartition des moments sur les différentes sections (Béton et Armatures) à l'ELUR.

Section 1 :

$$M_l = \mu_l \sigma_{bc} b d^2 \Rightarrow A_1 = \frac{M_l}{\sigma_s \beta_1 d}$$

$$\alpha_l = 1.25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_l} \right), \beta_l = 1 - 0.4\alpha_l$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\text{et } \alpha_l = \frac{3.5}{1000\varepsilon_{sl} + 3.5}$$

Section 2 :

La section restante est sollicitée par : $\Delta M = M - M_l$

$$\sum M / A_2 = 0$$

$$\Delta M - F'_s (d - c') = 0$$

$$\Delta M - A'_s \sigma'_s (d - c') = 0$$

$$A'_s = \frac{\Delta M}{\sigma'_s (d - c')}$$

$$\sigma'_s ?$$

$$\Delta \equiv \Delta \Rightarrow \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{bc}} = \frac{y_l - c'}{y_l} = \frac{\alpha_l d - c'}{\alpha_l d}$$

$$\Rightarrow \varepsilon'_s = \varepsilon_{bc} \frac{\alpha_l d - c'}{\alpha_l d}, \quad \varepsilon_{bc} = 3.5^0 / 00$$

$$\sigma'_s = \begin{cases} \text{si } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \\ \text{si } \varepsilon'_s < \varepsilon_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon'_s E_s \end{cases}$$

$$\sum M / A'_s = 0$$

$$\Delta M - F_{s2} (d - c') = 0$$

$$\Delta M - A_2 \sigma_s (d - c') = 0$$

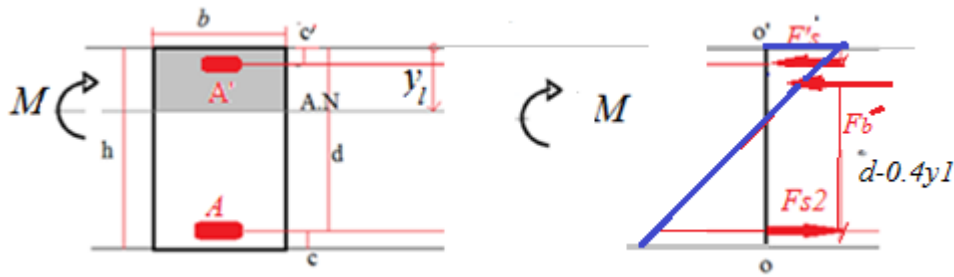
$$A_2 = \frac{\Delta M}{\sigma_s (d - c')}, \text{ avec } \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Armature en ELUR est :

$$A_u = A_1 + A_2$$

$$A' = A'_s$$

Méthode 2 : Le moment fléchissant total M est équilibré par le bilan d'efforts du béton, armature tendue et armature comprimée. L'axe neutre est celui du moment limite M_l ($y=y_l$)



$$\sum F = 0, \quad \sum M = 0$$

$$a - \sum F = 0 \Rightarrow F'_s + F'_b + F_s = 0$$

avec

$$\left. \begin{array}{l} F'_s = A' \sigma'_s \\ F'_b = 0.8 b y_l \sigma_{bc} \\ F_s = A \sigma_s \end{array} \right\} A' \sigma'_s + 0.8 b y_l \sigma_{bc} - A \sigma_s = 0$$

$$b - \sum M /_A = 0 \Rightarrow M - A' \sigma'_s (d - c') - 0.8 b y_l \sigma_{bc} (d - 0.4 y_l) = 0$$

$$\Rightarrow A' = \frac{M - 0.8 b y_l \sigma_{bc} (d - 0.4 y_l)}{\sigma'_s (d - c')}$$

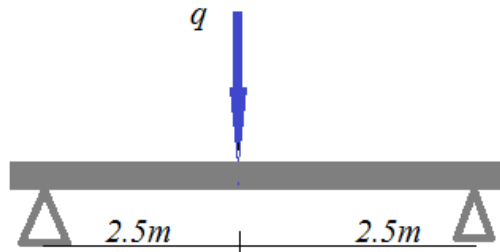
$$\sum F = 0 \Rightarrow \Rightarrow A = \frac{A' \sigma'_s + 0.8 b y_l \sigma_{bc}}{\sigma_s}$$

EXEMPLE D'APPLICATION

Section rectangulaire avec armature comprimée

Soit une poutre en béton armé de section $30 \times 60 \text{ cm}^2$ sollicitée à une charge concentrée d'exploitation $q=264 \text{ kN}$, avec ; FeE400 ; $f_{c28}=25\text{MPa}$, fissuration peu préjudiciable, $C'=4\text{cm}$.

Calculer la section des armatures tendues à l'ELUR.



$$g = 0.3 \times 0.6 \times 25 = 4.5 \text{ kN / ml}$$

$$Mg = \frac{gl^2}{8} = 14.06 \text{ kNm}$$

$$Mq = q \frac{l}{4} = 330 \text{ kNm}$$

$$C.F \quad , M_u = 1.35Mg + 1.5Mq = 514.981 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{bc} = \frac{0.85 f_{c28}}{\theta \gamma_b}, \quad \theta = 1, \quad \gamma_b = 1.5, \Rightarrow \sigma_{bc} = 14.2 \text{ MPa}$$

$$\mu = \frac{M_u}{\sigma_{bc} b d^2} = 0.414$$

$$\mu_{AB} = 0.186 \leq \mu = 0.414 \leq 0.48 \Rightarrow \text{Pivot } B$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{bc} = 3.5^0 /_{00}$$

Vérification de l'existence des armatures comprimées :

$$\varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = 1.739^0 /_{00}$$

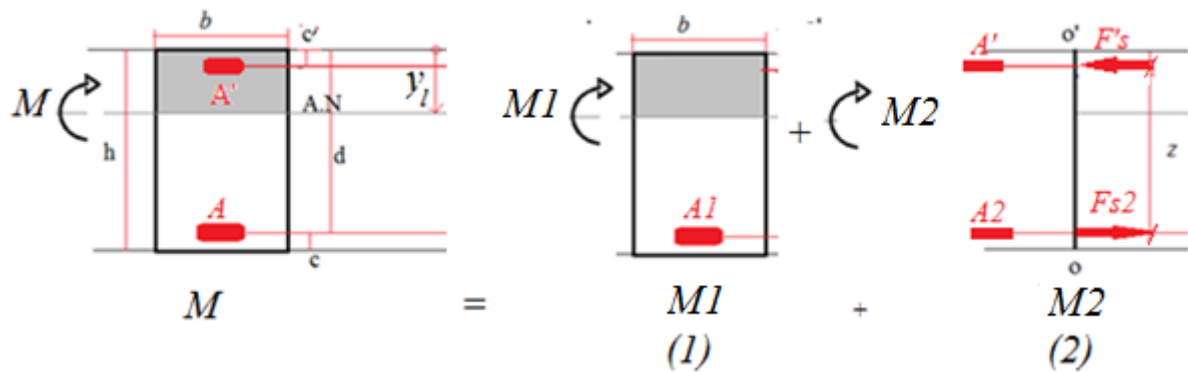
$$\alpha_l = \frac{3.5}{1000 \varepsilon_{sl} + 3.5} = 0.668$$

$$\mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l) = 0.392$$

$$\mu = 0.414 > \mu_l = 0.392 \quad (\text{région 2b}) \Rightarrow$$

Armature comprimée est nécessaire $A' \exists$

Méthode 1 :



$$M_1 = M_l$$

$$M_l = \mu_l \sigma_{bc} b d^2 = 486948.7 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{M_l}{\sigma_s \beta_l d}$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 348 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{M_l}{\sigma_s \beta_l d} = 35.35 \text{ cm}^2$$

Section 2 :

$$M_2 = M - M_l = 28032 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{M_2}{\sigma_s (d - c')}$$

$$\Rightarrow A_2 = 1.55 \text{ cm}^2$$

Armature comprimée :

$$\Rightarrow A' = \frac{M_2}{\sigma'_s (d - c')}$$

$$\sigma'_s = fct(\varepsilon'_s) = ?$$

$$\Delta \equiv \Delta \Rightarrow \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{sl}} = \frac{y_l - c'}{d - y_l} = \varepsilon_{sl} \frac{y_l - c'}{d - y_l}$$

$$y_l = \alpha_l d \Rightarrow \varepsilon'_s = 3.11^0 /_{00}$$

$$\varepsilon'_s > \varepsilon_{sl} = 1.739^0 /_{00} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 348 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow A' = \frac{M_2}{\sigma'_s (d - c')} = 1.6 \text{ cm}^2$$

Armatures à ELUR

$$A_u = A_1 + A_2 = 37 \text{ cm}^2$$

$$A' = A' = 1.6 \text{ cm}^2$$

Armature minimale (armature tendue) :

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2.1 \text{ MPa}$$

$$A_{\min} = 0.23bd \frac{f_{t28}}{f_e} = 1.94 \text{ cm}^2$$

Armature finale :

$$A_f = \max(A_u, A_{\min}) = 37 \text{ cm}^2$$

$$A' = 1.6 \text{ cm}^2$$

Armature appliquée (Sous réserve de l'armature à ELS)

Soit

$$A_{\text{app}} = 3 \times 4 \text{ T}20 = 12 \text{ T}20$$

$$A'_{\text{app}} = 4 \text{ T}12$$

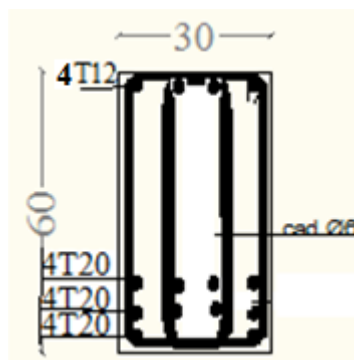
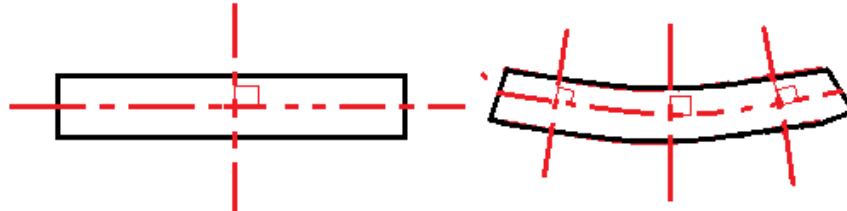


Fig.6.6 Schéma de ferrailage de la poutre.

3. ETAT LIMITE DE SERVICE « ELS »

3.1 Hypothèses de calcul

H1 : Conservation des sections planes : (hypothèse de Navier : petites déformations) les sections droites restent planes après déformation.



H2 : la résistance à la traction du béton est négligée à cause de la fissuration

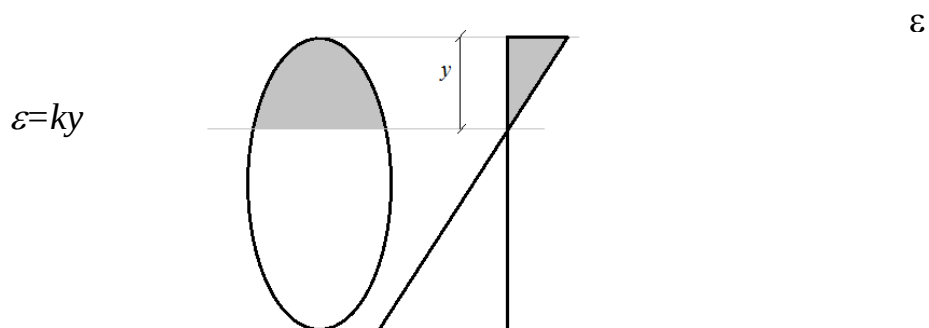
H3 : compatibilité des déformations acier-béton : il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures d'acier et le béton $\varepsilon_b = \varepsilon_a$

H4 : Le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux linéaires et élastiques ;
l'application de la loi de Hook $\sigma = E\varepsilon$

$$\text{Béton : } \sigma_b = E_b \varepsilon_b$$

$$\text{Acier : } \sigma_s = E_s \varepsilon_s$$

Donc les déformations sont proportionnelles à leur distance à l'axe neutre.



H5 : par convention le rapport du module d'élasticité longitudinal de l'acier à celui du béton (rapport appelé coefficient d'équivalence n) a pour valeur :

$$n = \frac{E_s}{E_b} = 15$$

H6 : les aires des aciers ne sont pas déduites de l'aire du béton comprimé dans les calculs.

H7 : un groupe de barres d'acier peut être remplacé par une barre unique, ayant la même section et même centre de gravité que le groupe de barres.

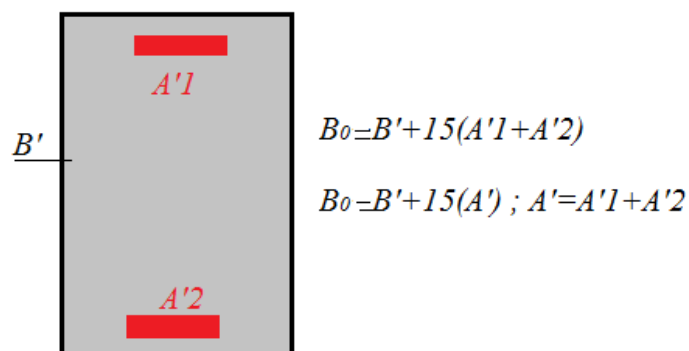
Il résulte de ces hypothèses ce qui suit :

- a- Le diagramme des contraintes et le diagramme des déformations sont constitués par des droites (contraintes proportionnelles aux déformations et la déformation est proportionnelle à la distance à l'axe neutre).
- b- En homogénéisant la section de béton armé, les formules de la RDM sont applicables. Cette homogénéisation s'obtient, on remplace une section d'acier d'aire A par une section de béton d'aire $nA=15A$ ayant même centre de gravité que la section d'acier considérée.

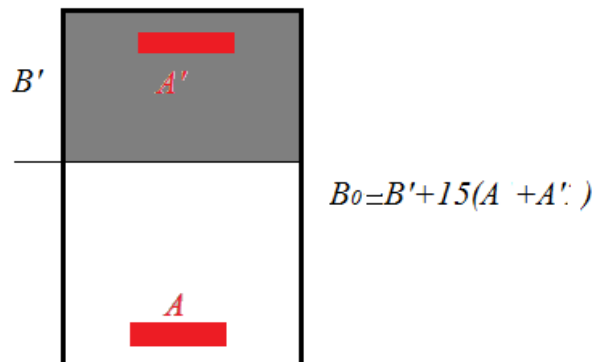
Soit B_0 section du béton homogénéisée.

B' section du béton comprimée

1- Pour une section entièrement comprimée SEC



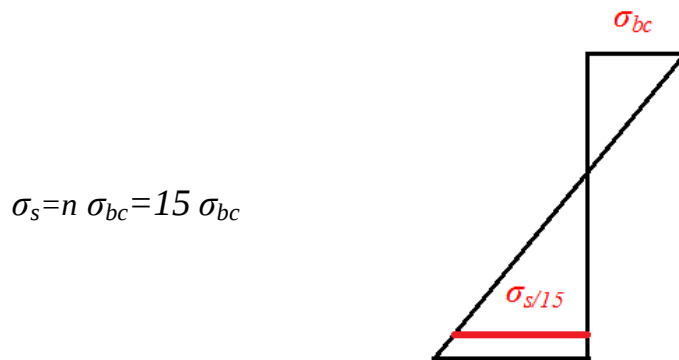
2- Pour une section partiellement comprimée SPC



Pour une section entièrement tendue : la section est homogène car seulement les armatures qui travaillent ($A=\text{constante}$).

c- Contrainte dans l'acier :

La contrainte dans une fibre d'acier égale à 15 fois la contraintes qui existe dans une fibre de béton, ayant même centre de gravité que la fibre d'acier.



3.2 Contraintes admissibles (vérifications à effectuer)

3.2.1 Contrainte admissible dans le béton comprimé :

La limitation de la contrainte du béton est destinée à éviter la formation de fissures parallèles à la direction des contraintes de compression.

$$\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}} \quad \text{avec} \quad \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28}$$

3.2.2 Contraintes maximales dans les armatures tendues : (vérification de la fissuration)

Afin de réduire le risque d'apparition de fissures, et pour diminuer l'importance de leur ouverture on limite les contraintes des armatures tendues à la contrainte limite qui dépend du type de la fissuration, et qui sont :

a- Fissuration peu nuisible (peu préjudiciable)

Dans ce cas la contrainte limite de l'acier est :

$$\bar{\sigma}_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

b- Fissuration préjudiciable :

Dans ce cas la contrainte limite de l'acier est :

$$\bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{2}{3} f_e, 110\sqrt{\eta f_{t28}}\right)$$

Dans ce cas de fissuration, les armatures transversales (cadres-étrier-épingle) doivent avoir un diamètre ≥ 6 mm, et la distance entre les armatures longitudinales a doit être ≤ 4 fois leurs diamètres (si $\phi_1 > 20$ mm).

Le diamètre minimal des armatures transversales pour cette fissuration est 6mm

c- Fissuration très préjudiciable :

Dans ce cas la contrainte limite de l'acier est :

$$\bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{1}{2} f_e, 90\sqrt{\eta f_{t28}}\right)$$

Dans ce cas de fissuration les armatures transversales (cadres-étrier-épingle) doivent avoir un diamètre ≥ 8 mm, et la distance entre les armatures longitudinales a doit être ≤ 3 fois leurs diamètres (si $\phi_1 > 20$ mm).

Avec : pour tous les types de fissurations

γ_s : coefficient de sécurité : = 1.15

η : Coefficient de fissuration : = 1.0 pour les R.L

= 1.6 pour les H.A

3.2.3 Vérification à effectuer :

La première méthode consiste à établir des vérifications des contraintes dans le béton et les armatures.

a- Fissuration peu nuisible :

$$\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28}$$

Cette vérification est inutile pour la S.E.T

b-Fissurations préjudiciable ou très préjudiciable :

$$\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28} ; (\sigma_s, \sigma'_s) \leq \overline{\sigma_s}$$

Ces contraintes dans le béton et les armatures sont obtenues en considérant les armatures appliquées après un calcul en état limite ultime de résistance, tout en vérifiant l'armature minimale.

Dans le cas où les inégalités suscitées sont vérifiées, les armatures calculées à l'ELUR (appliquées) conviennent à l'état limite de service ELS.

Dans le cas contraire, les armatures calculées à l'ELUR (appliquées) ne conviennent pas à l'état limite de service ELS. Il faut recalculer les armatures à l'ELS.

La deuxième méthode consiste à :

- Calculer les armatures à l'ELUR.
- Calculer les armatures à l'ELS
- Calculer l'armature minimale.
- Retenir la section maximale des armatures suscitées.

3.3. Calcul des armatures pour une section rectangulaires :

3.3.1- Section rectangulaire sans armatures comprimées :

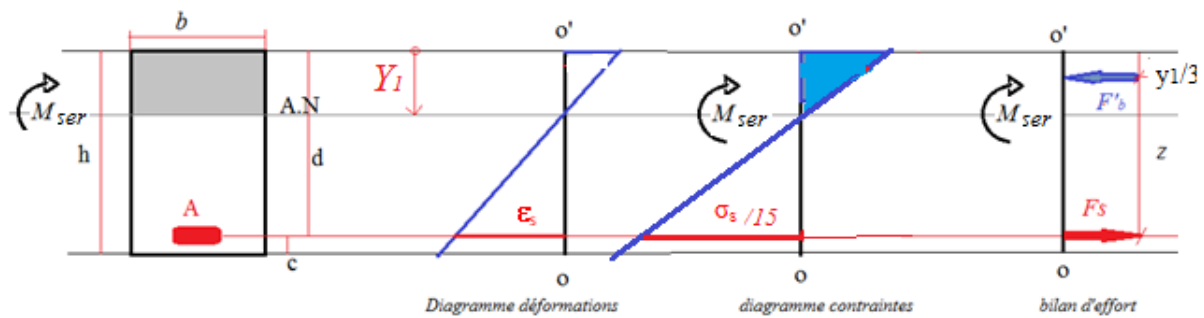


Fig.6.7 Bilan de déformations, contraintes et efforts à l'ELS.

$$F'_b = \frac{1}{2} \sigma_{bc} y_1 b$$

Posons: $k_1 = \frac{\sigma_s}{\sigma_{bc}}, y_1 = \alpha_1 d$

$$\Delta \equiv \Delta \Rightarrow \alpha_1 = \frac{15}{15 + k_1}, z = d - \frac{y_1}{3} = d \left(1 - \frac{\alpha_1}{3} \right)$$

Posons: $z = \beta_1 d \Rightarrow \beta_1 = 1 - \frac{\alpha_1}{3}$

$$\sum M / A = 0$$

$$M_{ser} - F'_b z = 0 \rightarrow M_{ser} - \frac{1}{2} \sigma_{bc} y_1 b \beta_1 d = 0$$

$$M_{ser} = \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \sigma_{bc} b d^2$$

Posons: $\frac{\alpha_1 \beta_1}{2} = \mu'_1 \rightarrow$

$$M_{ser} = \mu'_1 \sigma_{bc} b d^2$$

Pour le moment résistant de la section en béton, il suffit d'avoir une contrainte limite, c'est – à-dire :

$$\sigma_{bc} = \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28}$$

$$A' = 0 \rightarrow$$

$$M_{serR} = \mu'_1 \overline{\sigma_{bc}} b d^2$$

$$\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28}$$

Exprimant M_{ser} en fonction de σ_s :

$$M_{ser} = \mu'_1 \sigma_{bc} b d^2,$$

$$\text{on a } \frac{\sigma_s}{\sigma_{bc}} = k_1 \rightarrow M_{ser} = \frac{\mu'_1}{k_1} \sigma_s b d^2$$

$$\text{Posons: } \mu_1 = \frac{\mu'_1}{k} \rightarrow M_{ser} = \mu_1 \sigma_s b d^2$$

$$\mu_1 = \frac{M_{ser}}{\sigma_s b d^2}$$

$$\sum M / F_b = 0$$

$$M_{ser} - F_s z = 0$$

pour un cas limite $\rightarrow \sigma_s = \overline{\sigma_s}$ (fct de la fissuration)

$$F_s = \overline{\sigma_s} A_{ser}, \text{ avec } z = \beta_1 d \rightarrow$$

$$M_{ser} - \overline{\sigma_s} A_{ser} \beta_1 d = 0 \rightarrow$$

$$A_{ser} = \frac{M_{ser}}{\overline{\sigma_s} \beta_1 d}$$

Détermination des coefficients α_1 , β_1 et k_1 :

$$\sum M / A = 0$$

$$M_{ser} - \frac{1}{2} b y_1 \sigma_{bc} \left(d - \frac{y_1}{3} \right) = 0$$

$$M_{ser} - \frac{1}{2} b \alpha_1 d^2 \sigma_{bc} \left(1 - \frac{\alpha_1}{3} \right) = \frac{1}{6} \alpha_1 d^2 \sigma_{bc} (3 - \alpha_1) = 0$$

Triangles semblables

$$\frac{\sigma_{bc}}{\sigma_s / 15} = \frac{y_1}{d - y_1} \rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\sigma_s}{15} \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right)$$

pour le calcul d'armatures $\rightarrow \sigma_s = \overline{\sigma_s}$ (cas limite)

pour un cas limite $\rightarrow \sigma_s = \overline{\sigma_s}$ (fct de la fissuration)

$$M_{ser} - \frac{1}{90} b d^2 \overline{\sigma_s} \alpha_1^2 \left(\frac{3 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) = 0$$

Après développement

$$\alpha_1^3 - 3\alpha_1^2 - 90\mu_1\alpha_1 + 90\mu_1 = 0$$

Avec

$$\mu_1 = \frac{M_{ser}}{b d^2 \overline{\sigma_s}} \text{ et } 0 \leq \alpha_1 \leq 1$$

Equation de troisième degré : Méthode approchée

$$\alpha_1 = 1 + 2\sqrt{\lambda} \cos\left(240^\circ + \frac{\varphi^0}{3}\right)$$

$$\text{avec } \lambda = 1 + 30\mu_1$$

$$\cos \varphi^0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}$$

$$\text{de la} \Rightarrow \left\{ k_1 = 15 \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \quad , \quad \sigma_{bc} = \frac{\overline{\sigma_s}}{k_1} \right.$$

$$\beta_1 = 1 - \frac{\alpha_1}{3} \quad , \quad A_{ser} = \frac{M_{ser}}{\sigma_s \beta_1 d} \text{ si } \sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}}$$

3.3.2- Section rectangulaire avec armatures comprimées :

$$\left(\text{Si } \sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28} \quad A' \text{ est nécessaire} \right)$$

Les règles BAEL préconisent que le moment équilibré par les armatures comprimées doit être au plus égale à 40% du moment sollicitant (aussi valable pour l'ELUR)

Etapas de calcul : cas limite

$$\sigma_{bc} = \frac{\overline{\sigma_s}}{15} > \overline{\sigma_{bc}}$$

$$\text{cas limite} \quad \begin{cases} \sigma_s = \overline{\sigma_s} \\ \sigma_{bc} = \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28} \end{cases}$$

$$k_1 = \frac{\overline{\sigma_s}}{\sigma_{bc}}, \quad \alpha_1 = \frac{15}{15 + k_1}, \quad \Delta \cong \rightarrow \sigma'_s = \frac{15(y_1 - c')}{y_1} \overline{\sigma_{bc}}$$

Méthode 1 :

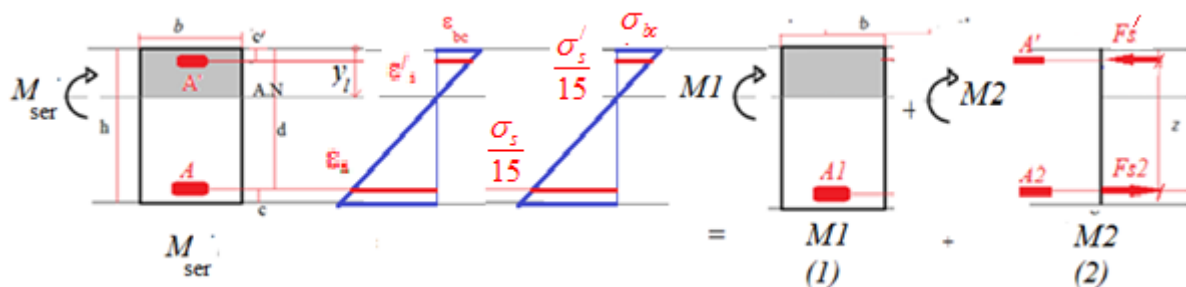


Fig.6.8 Répartition des moments sur les différentes sections (Béton et Armatures) à l'ELS.

Section (1) :

$$M_1 = M_r \text{ (moment résistant)}$$

$$M_r = \mu'_1 \overline{\sigma_{bc}} b d^2, \mu'_1 = \frac{\alpha_1 \beta_1}{2}$$

$$k_1 = \frac{\overline{\sigma_s}}{\overline{\sigma_{bc}}}, \alpha_1 = \frac{15}{15 + k_1}, \beta_1 = 1 - \frac{\alpha_1}{3}$$

Après équilibre

$$A_1 = \frac{M_r}{\overline{\sigma_s} \beta_1 d}$$

Section (2) :

$$M_2 = M_{ser} - M_1 \leq 0.40 M_{ser}$$

$$\sum M / A_2 = 0$$

$$M_2 - F'_s (d - c') = 0$$

$$\Delta M - A' \overline{\sigma'_s} (d - c') = 0$$

$$A' = \frac{\Delta M}{\overline{\sigma'_s} (d - c')}$$

avec

$$\begin{cases} \overline{\sigma'_s} = 15 \frac{y_1 - c'}{y_1} \overline{\sigma_{bc}} \\ y_1 = \alpha_1 d \end{cases}$$

$$\sum M / A' = 0$$

$$\Delta M - F_{s2} (d - c') = 0$$

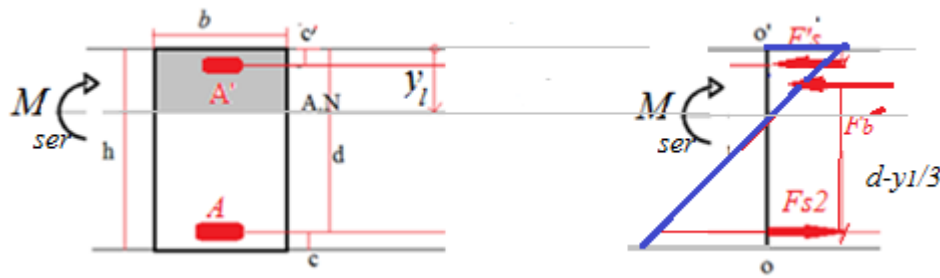
$$\Delta M - A_2 \overline{\sigma_s} (d - c') = 0$$

$$A_2 = \frac{\Delta M}{\overline{\sigma_s} (d - c')}$$

Finalement, les armatures calculées seront :

$$\begin{cases} A_{ser} = A_1 + A_2 \\ A'_{ser} = A' \end{cases}$$

Méthode 2 :



$$\sum F = 0, \quad \sum M = 0$$

$$a - \sum F = 0 \Rightarrow F'_s + F'_b + F_s = 0$$

avec

$$\left[\begin{array}{l} F'_s = A'_{ser} \sigma'_s \\ F'_b = \frac{1}{2} b y_l \overline{\sigma}_{bc} \\ F_s = A_{ser} \overline{\sigma}_s \end{array} \right] \quad A'_{ser} \sigma'_s + \frac{1}{2} b y_l \overline{\sigma}_{bc} - A_{ser} \overline{\sigma}_s = 0$$

$$b - \sum M / A = 0 \Rightarrow M_{ser} - A'_{ser} \sigma'_s (d - c') - \frac{1}{2} b y_l \overline{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{y_l}{3} \right) = 0$$

$$\Rightarrow A'_{ser} = \frac{M_{ser} - \frac{1}{2} b y_l \overline{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{y_l}{3} \right)}{\sigma'_s (d - c')}$$

avec

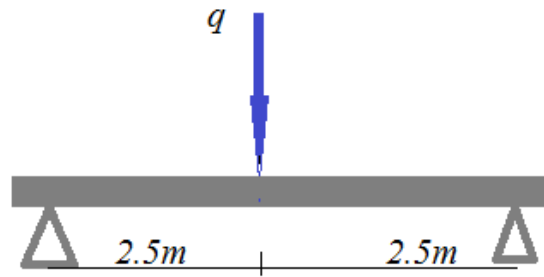
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_s = 15 \frac{y_l - c'}{y_l} \overline{\sigma}_{bc} \\ y_l = \alpha_1 d \end{array} \right.$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow \Rightarrow A_{ser} = \frac{A'_{ser} \sigma'_s + \frac{1}{2} b y_l \overline{\sigma}_{bc}}{\overline{\sigma}_s}$$

EXEMPLE D'APPLICATION

Section rectangulaire avec armature comprimée

Soit une poutre en béton armé de section $30 \times 60 \text{ cm}^2$ $\gamma_b = 25 \text{ kN/m}^3$ sollicitée à une charge concentrée d'exploitation $q = 264 \text{ kN}$, avec ; FeE400 ; $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$; fissuration préjudiciable ; $C' = 4 \text{ cm}$. Calculer la section des armatures.



a) ELUR :

$$g = 0.3 \cdot 0.6 \cdot 25 = 4.5 \text{ kN / ml}$$

$$M_g = \frac{gl^2}{8} = 14.06 \text{ kNm}$$

$$M_q = q \frac{l}{4} = 330 \text{ kNm}$$

$$C.F., M_u = 1.35M_g + 1.5M_q = 514.981 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{bc} = \frac{0.85 f_{c28}}{\theta \gamma_b}, \quad \theta = 1, \quad \gamma_b = 1.5, \Rightarrow \sigma_{bc} = 14.2 \text{ MPa}$$

$$\mu = \frac{M_u}{\sigma_{bc} b d^2} = 0.414$$

$$\mu_{AB} = 0.186 \leq \mu = 0.414 \leq 0.48 \Rightarrow \text{Pivot } B$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{bc} = 3.5^0 /_{00}$$

Vérification de l'existence des armatures comprimées :

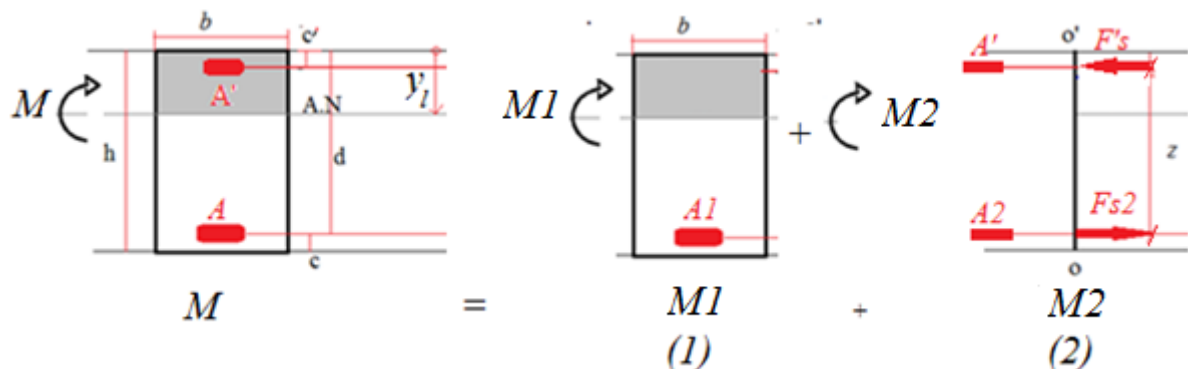
$$\varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = 1.739^0 /_{00}$$

$$\alpha_l = \frac{3.5}{1000 \varepsilon_{sl} + 3.5} = 0.668$$

$$\mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l) = 0.392$$

$$\mu = 0.414 > \mu_l = 0.392 \quad (\text{région 2b}) \Rightarrow$$

Armature comprimée est nécessaire $A' \exists$



$$M_1 = M_l$$

$$M_l = \mu_l \sigma_{bc} b d^2 = 486948.7 Nm$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{M_l}{\sigma_s \beta_l d}$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 348 MPa$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{M_l}{\sigma_s \beta_l d} = 35.35 cm^2$$

Section 2 :

$$M_2 = M - M_l = 28032 Nm$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{M_2}{\sigma_s (d - c')} = 1.55 cm^2$$

Armature comprimée :

$$\Rightarrow A' = \frac{M_2}{\sigma'_s (d - c')}$$

$$\sigma'_s = fct(\varepsilon'_s) = ?$$

$$\Delta \equiv \Delta \Rightarrow \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{sl}} = \frac{y_l - c'}{d - y_l} = \varepsilon_{sl} \frac{y_l - c'}{d - y_l}$$

$$y_l = \alpha_l d \Rightarrow \varepsilon'_s = 3.11^0 /_{00}$$

$$\varepsilon'_s > \varepsilon_{sl} = 1.739^0 /_{00} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 348 MPa$$

$$\Rightarrow A' = \frac{M_2}{\sigma'_s (d - c')} = 1.6 cm^2$$

Armatures à ELUR

$$A_u = A_1 + A_2 = 37 cm^2$$

$$A' = A' = 1.6 cm^2$$

b) ELS

$$Mg = \frac{gl^2}{8} = 14.06 \text{ kNm}$$

$$Mq = q \frac{l}{4} = 330 \text{ kNm}$$

$$\text{ELS}, M_{ser} = Mg + Mq = 344.06 \text{ kNm}$$

$$\mu_1 = \frac{M_{ser}}{\sigma_s b d^2}$$

Fissuration préjudiciable

$$\bar{\sigma}_s = \min \left(\frac{2}{3} f_e, 110 \sqrt{\eta f_{t28}} \right)$$

$$f_{t28} = 2.1 \text{ MPa}, \quad \bar{\sigma}_s = 201.6 \text{ MPa}$$

$$\mu_1 = \frac{M_{ser}}{\sigma_s b d^2} = 0.01951$$

$$\lambda = 1 + 30\mu_1 = 1.585$$

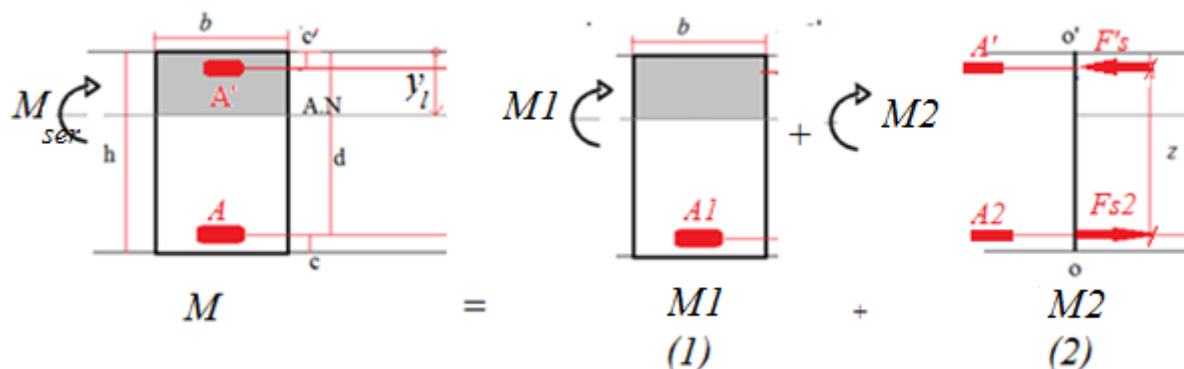
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\lambda^3}} = 0.501 \rightarrow \varphi = 59.93^\circ$$

$$\alpha_1 = 1 + 2\sqrt{\lambda} \cos \left(240 + \frac{\varphi}{3} \right) = 0.562$$

$$k_1 = 15 \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} = 11.7$$

$$\sigma_{bc} = \frac{\bar{\sigma}_s}{k_1} = 17.2 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 0.6 f_{c28} = 15 \text{ MPa}$$

⇒ A' est nécessaire



Section 1 :

$$\sigma_s = \overline{\sigma_s} = 201.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bc} = \overline{\sigma_{bc}} = 15 \text{ MPa}$$

$$k_1 = \frac{\overline{\sigma_s}}{\overline{\sigma_{bc}}} = \frac{201.6}{15} = 13.44 \text{ MPa}$$

$$\alpha_1 = \frac{15}{15 + k_1} = \frac{15}{15 + 13.44} = 0.527$$

$$\beta_1 = 1 - \frac{\alpha_1}{3} = 1 - \frac{0.527}{3} = 0.824$$

$$\mu'_1 = \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} = \frac{0.527 * 0.824}{2} = 0.217$$

$$y_1 = \alpha_1 d = 0.527 * 54 = 28.46 \text{ cm}$$

$$\sigma'_s = 15 \frac{(y_1 - c')}{y_1} \overline{\sigma_{bc}} = 185.46 \text{ MPa}$$

$$M_1 = M_r \text{ (moment résistant)}$$

$$M_r = \mu'_1 \overline{\sigma_{bc}} b d^2 = 0.217 * 30 * 54^2 * 15 = 284747.4 \text{ Nm}$$

$$A_1 = \frac{M_r}{\overline{\sigma_s} \beta_1 d} = \frac{284747.4}{201.6 * 0.824 * 54} = 31.75 \text{ cm}^2$$

Section 2 :

$$M_2 = M_{ser} - M_r = 59312 \text{ Nm} < 0.4 M_{ser} \quad C.V$$

$$\Rightarrow A'_1 = \frac{M_2}{\sigma'_s (d - c')} = \frac{59312}{185.46 * (54 - 4)} = 6.4 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A'_2 = \frac{M_2}{\sigma_s (d - c')} = \frac{59312}{201.6 * (54 - 4)} = 5.9 \text{ cm}^2$$

Armatures à ELS

$$A_{ser} = A_1 + A_2 = 37.75 \text{ cm}^2$$

$$A_{ser}' = A' = 6.4 \text{ cm}^2$$

Armature minimale (armature tendue) :

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2.1 \text{ MPa}$$

$$A_{min} = 0.23 b d \frac{f_{t28}}{f_e} = 1.96 \text{ cm}^2$$

Armature finale :

$$Elur \rightarrow A_u + A'_u = 36.9 + 1.55 = 38.45 \text{ cm}^2$$

$$Els \rightarrow A_{ser} + A'_{ser} = 37.75 + 6.4 = 44.15 \text{ cm}^2$$

$$A_f = \max(A_u + A'_u, A_{ser} + A'_{ser}) = 44.15 \text{ cm}^2$$

Donc ELS est dominant avec :

$$A_{ser} = A_1 + A_2 = 37.7 \text{ cm}^2 > A_{min} = 1.96 \text{ cm}^2$$

$$A'_{ser} = A' = 6.4 \text{ cm}^2$$

Armature appliquée

Soit

$$A_{app} = 3 \times 4T20 = 12T20$$

$$A'_{app} = 2T16 + 2T14$$

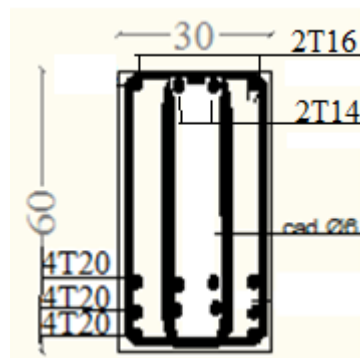


Fig.6.9 Schéma de ferrailage de la poutre.

3.4 Détermination des contraintes:

L'étude est portée sur le cas général d'une section rectangulaire avec armature comprimée A' . Si l'armature comprimée n'est pas nécessaire, A' sera prise égale à 0 et le calcul de σ' sera non nécessaire.

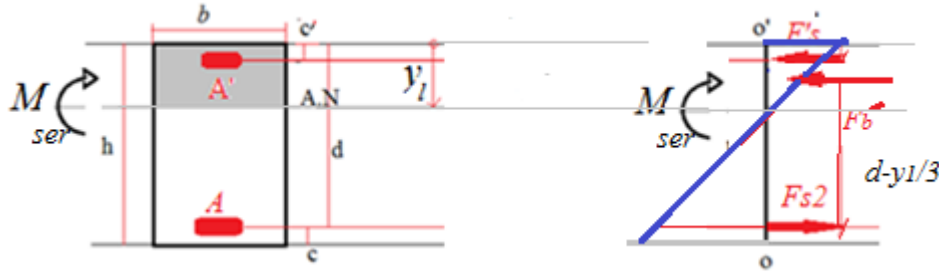


Fig.6.10 Bilan d'efforts à l'ELS.

On a :

$$\sigma_{bc} = E_b \varepsilon_{bc}, \text{ Posons } \varepsilon_{bc} = ky_1$$

$$\sigma_{bc} = E_b ky_1 = Ky_1, \text{ avec } K = kE_b$$

$$\sigma_{bc} = Ky_1$$

$$\Delta \cong \Delta$$

$$\frac{\sigma_{bc}}{\sigma_s/15} = \frac{y_1}{d - y_1}$$

$$\sigma_s y_1 = 15 \sigma_{bc} (d - y_1)$$

$$\sigma_s y_1 = 15 Ky_1 (d - y_1)$$

$$\sigma_s = 15K (d - y_1)$$

$$\Delta \cong \Delta$$

$$\frac{\sigma'_{bc}}{\sigma'_s/15} = \frac{y_1}{y_1 - c'}$$

$$\sigma'_s y_1 = 15 \sigma'_{bc} (y_1 - c')$$

$$\sigma'_s y_1 = 15 Ky_1 (y_1 - c')$$

$$\sigma'_s = 15K (y_1 - c')$$

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = Ky_1 \\ \sigma_s = 15K (d - y_1) ; \text{ avec } [y_1] \text{ cm}, [\sigma] \text{ MPa} \\ \sigma'_s = 15K (y_1 - c') \end{cases}$$

3.4.1 Position de l'axe neutre :

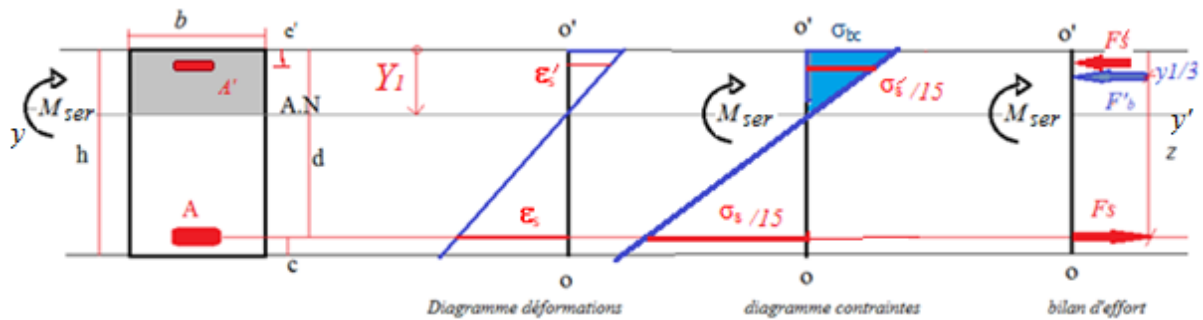


Fig.6.11 Position de l'axe neutre à l'ELS.

$d=0.9h$: hauteur utile.

$c = 0.1h$: distance entre cdg des armatures tendues et la fibre la plus tendue.

$c' = 0.1h$: distance entre cdg des armatures comprimées et la fibre la plus comprimée.

Y_1 : distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée. « la position de l'axe neutre peut être obtenue en écrivant que le moment statique par rapport à l'axe neutre est nul ($S_{yy'}=0$)

A : section totale des armatures tendues.

A' : section totale des armatures comprimées.

F'_b : Effort de compression dans le béton.

F_c : Effort de traction dans les armatures tendues

F'_c : Effort de compression dans les armatures comprimées.

La position de l'axe neutre (A.N) peut être obtenue par le moment statique par rapport à l'axe neutre ($S_{yy'}=0$).

$$S_{yy'} = 0$$

$$by_1 \frac{y_1}{2} + 15A'(y_1 - c') - 15A(d - y_1) = 0$$

$y_1 = \text{racine positive}$

Détermination du coefficient K :

$$\sum M / y_{y'} = 0$$

$$M_{ser} - F'_s(y_1 - c') - F'_b\left(y_1 - \frac{y_1}{3}\right) - F_s(d - y_1) = 0$$

$$M_{ser} - A' \sigma'_s (y_1 - c') - \frac{1}{2} b y_1 \sigma_{bc} \left(y_1 - \frac{y_1}{3} \right) - A \sigma_s (d - y_1) = 0$$

$$\text{avec} \begin{cases} \sigma_{bc} = K y_1 \\ \sigma_s = 15K (d - y_1) \\ \sigma'_s = 15K (y_1 - c') \end{cases}$$

$$M_{ser} - A' 15K (y_1 - c')^2 - \frac{1}{3} b K y_1^3 - A 15K (d - y_1)^2 = 0$$

$$\frac{M_{ser}}{K} = \frac{1}{3} b y_1^3 + 15A (d - y_1)^2 + 15A' (y_1 - c')^2$$

$$\frac{M_{ser}}{K} = I_{yy'} \Rightarrow K = \frac{M_{ser}}{I_{yy'}}$$

$$[M_{ser}] = Nm, [I_{yy'}] = cm^4$$

Pour que les armatures appliquées conviennent à l'ELS, il faut avoir :

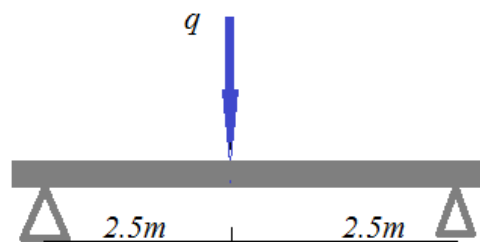
$$\begin{cases} 1) \sigma_{bc} = K y_1 \leq \overline{\sigma_{bc}} \\ 2) \sigma_s = 15K (d - y_1) \leq \overline{\sigma_s} \\ 3) \sigma'_s = 15K (y_1 - c') \leq \overline{\sigma'_s} \end{cases}$$

Si l'une des inégalités n'est pas vérifiée, il faut recalculer les armatures à l'ELS.

EXEMPLE D'APPLICATION

Soit une poutre en béton armé de section 30x60 cm² sollicitée à une charge concentrée d'exploitation q=264 kN, avec ; FeE400 ; f_{c28}=25MPa ; fissuration préjudiciable, c'=4 cm.

Suite au calcul à l'ELUR, établir la vérification des contraintes à l'ELS.



a) ELUR

$$\begin{cases} g = 0.3 \cdot 0.6 \cdot 25 = 4.5 \text{ kN / ml} \\ Mg = \frac{gl^2}{8} = 14.06 \text{ kNm} \\ Mq = q \frac{l}{4} = 330 \text{ kNm} \end{cases} \begin{cases} A_u = 36.90 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{soit } 8T25 = 39.25 \text{ cm}^2 \\ A'_u = 1.56 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{soit } 2T12 = 2.26 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

b) ELS : Vérification des contraintes.

$$M_{ser} = 344.06 \text{ kNm}$$

$$\text{on doit vérifier} \begin{cases} 1) \sigma_{bc} = Ky_1 \leq \overline{\sigma}_{bc} \\ 2) \sigma_s = 15K(d - y_1) \leq \overline{\sigma}_s \\ 3) \sigma'_s = 15K(y_1 - c') \leq \overline{\sigma}_s \end{cases}$$

1) Calcul de la position de l'axe neutre y_1 a) calcul de y_1

$$S_{yy'} = 0$$

$$by_1 \frac{y_1}{2} + 15A'(y_1 - c') - 15A(d - y_1) = 0$$

$$15y_1^2 + 15 \cdot 2.26(y_1 - 5) - 15 \cdot 39.25(d - y_1) = 0$$

$$15y_1^2 + 622.25y_1 - 31962 = 0$$

$$\Delta = 2304915 \quad y_1 = \frac{-622.25 + \sqrt{2304915}}{30} = 29.86 \text{ cm}$$

b) calcul de K

$$I_{yy'} = \frac{1}{3}by_1^3 + 15A(d - y_1)^2 + 15A'(y_1 - c')^2$$

$$I_{yy'} = \frac{1}{3}30 \cdot 29.86^3 + 15 \cdot 39.25(54 - 29.86)^2 + 15 \cdot 2.26(29.86 - 4)^2$$

$$I_{yy'} = 630276.6 \text{ cm}^4$$

$$K = \frac{[M_{ser}] Nm}{[I_{yy'}] \text{ cm}^4} = \frac{344060}{630276.6} = 0.5459$$

$$K = \frac{[M_{ser}] Nm}{[I_{yy'}] cm^4} = \frac{344060}{630276.6} = 0.5459$$

$$\begin{cases} 1) \sigma_{bc} = Ky_1 = 0.546 * 29.86 = 16.30 MPa \rangle \overline{\sigma_{bc}} = 15 MPa \\ 2) \sigma_s = 15K(d - y_1) = 15 * 0.546(54 - 29.86) = 190.6 \langle \overline{\sigma_s} \\ \sigma'_s = 15K(y_1 - c') = 15 * .546(29.86 - 4) = 211.8 \rangle \overline{\sigma_s} \end{cases}$$

Conclusion : les armatures calculées à l'ELUR ne conviennent pas à l'ELS. Recalculer la section des armatures à l'ELS.

6.II. SECTION EN T [1-2-6]

1. DEFINITIONS GENERALES :

1.1. Généralité :

La section en « T » se rencontre fréquemment au niveau des planchers de bâtiment, des tabliers des ponts, des murs de soutènement....etc. L'application des sections en T dans le domaine de construction permet un gain important dans le béton (réduction dans la section de béton qui est sollicitée à des contraintes de traction (partie tendue)).

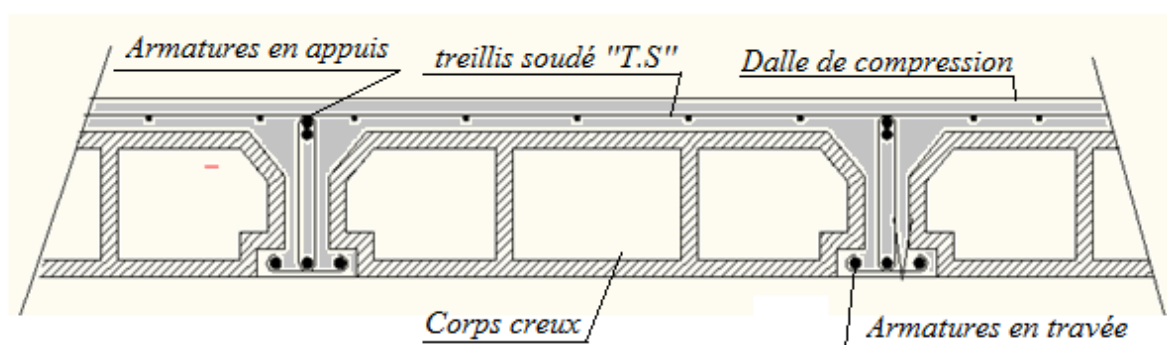


Fig. 6.12 Plancher de bâtiment en corps creux.

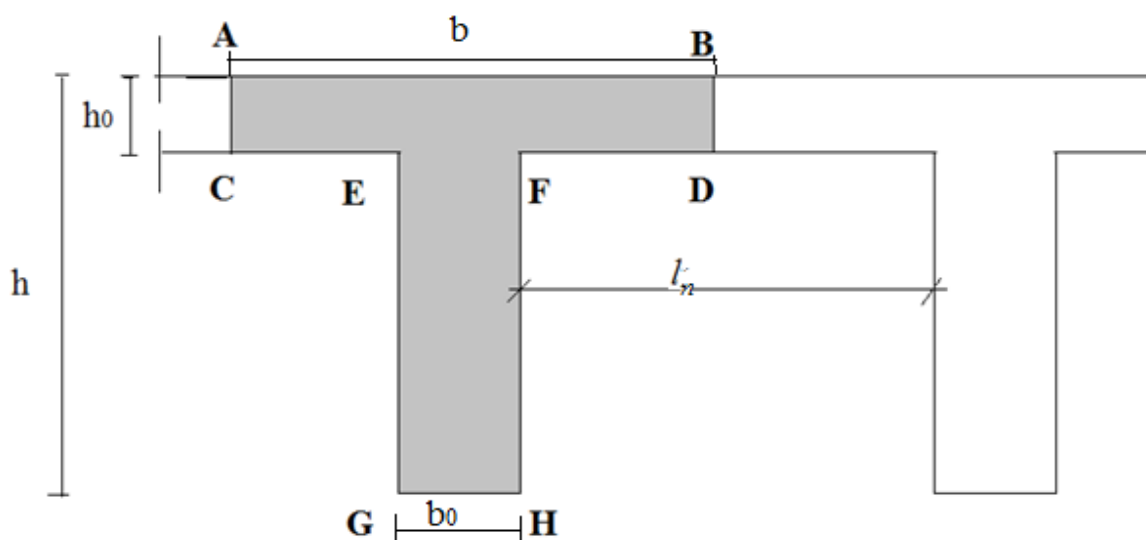


Fig. 6.13 Section en T.

Terminologie technique :

La partie ABCD : Table de compression

La partie EFGH : Nervure ou âme

Pour tout ce qui suit, le moment fléchissant sera considéré positif. Si le moment fléchissant est négatif, le calcul revient au calcul d'une section rectangulaire « b_0h ».

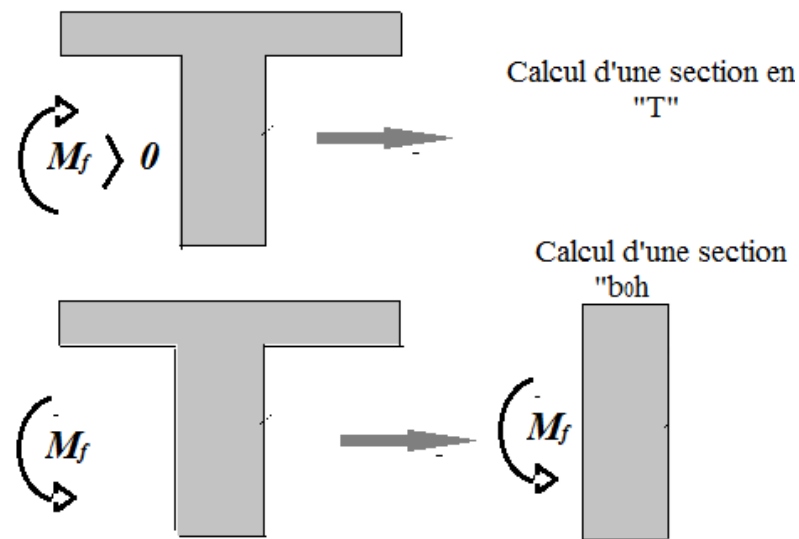


Fig. 6.14 Section transversale de la poutre.

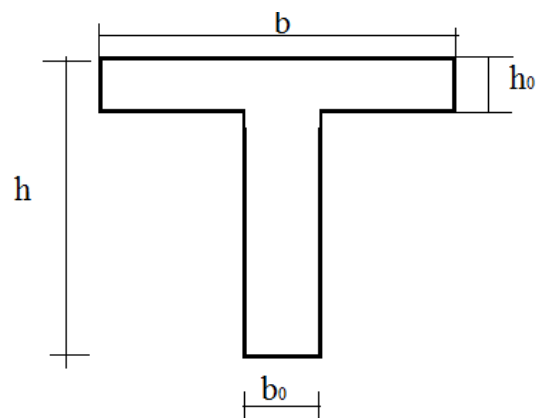
Notations :

h : hauteur totale

b : largeur de la table

h_0 : hauteur de la table

b_0 : largeur de la nervure



1-2 Largeur de la table de compression :

$$\frac{b-b_0}{2} \leq \min\left(\frac{l}{10}; \frac{l_n}{2}\right)$$

l : longueur de la travée (longueur minimale entre nus intérieur des poutres porteuses)

l_n : distance entre parement intérieur de deux nervures adjacentes.

2. CALCUL AUX ETATS LIMITES ULTIMES DE RESISTANCE « ELUR »

2.1. Position de l'axe neutre :

Pour un moment fléchissant positif (calcul d'une section en T), deux cas sont distingués;

- a) Axe neutre dans la table de compression : dans ce cas la table de compression seule peut résister aux sollicitations de compression produites par le moment fléchissant, d'où $h_0 \geq 0.8 y$.

Comme cas limite de ce cas $h_0 = 0.8 y$.

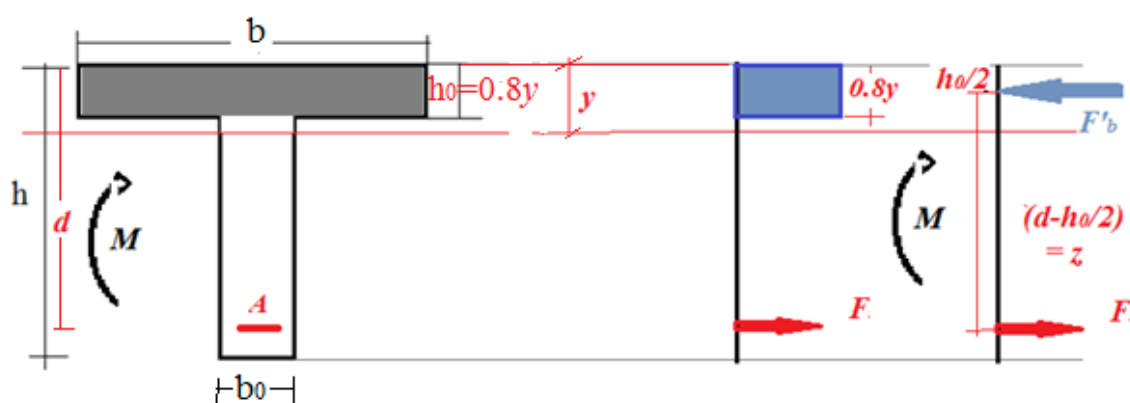
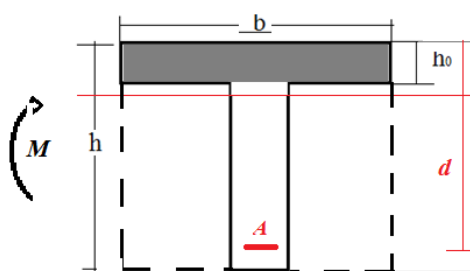


Fig. 6.15 Axe neutre dans la table ($h_0 = 0.8y$).

Moment résistant de la table « M_T » :

$$\left. \begin{aligned} M_{bt} &= M_T = F'_b z \\ F'_b &= 0.8yb\sigma_{bc} = h_0b\sigma_{bc} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_T = bh_0\sigma_{bc} \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

Si $M_u \leq M_T$: **axe neutre dans la table** . Donc la surface de la table de compression « bh_0 » peut résister seule aux sollicitations de compression dues au moment ultime. Dans ce cas il s'agit du calcul d'une section rectangulaire de section « bh ».



b) Axe neutre dans la nervure :

Si $M_u > M_T$ Axe neutre dans la nervure : la table de compression ne peut pas résister aux sollicitations de compression produites par le moment fléchissant, d'où $h_0 < 0.8 y$.

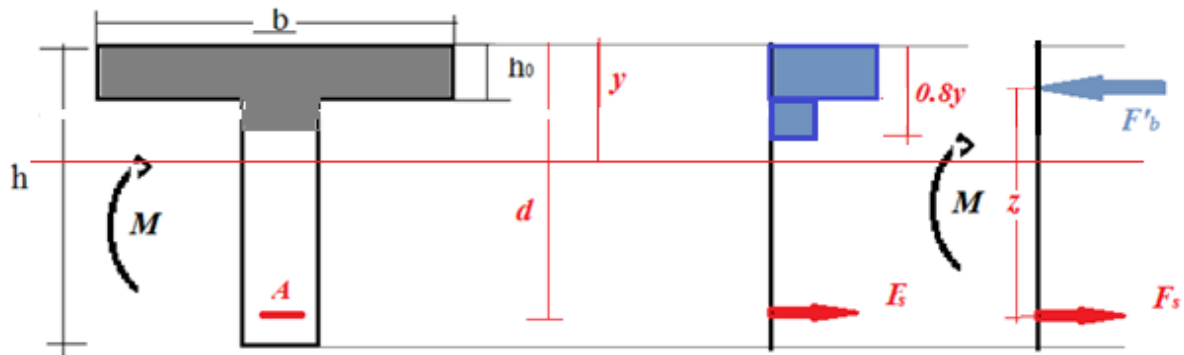


Fig. 6.16 Axe neutre dans la nervure ($h_0 < 0.8y$).

Dans ce cas, le calcul des armatures doit tenir en compte, en plus de la table de compression, de la participation d'une partie de la nervure dans la résistance de la poutre. Donc il s'agit du calcul d'une section en T.

2.2. Section en T sans armatures comprimées : le calcul d'une section en T revient à décomposer la section transversale en T en deux sections, à savoir :

- Section rectangulaire de dimensions $b_0 h$ (la nervure).
- Section rectangulaire de dimension $b h_0$ (la table).

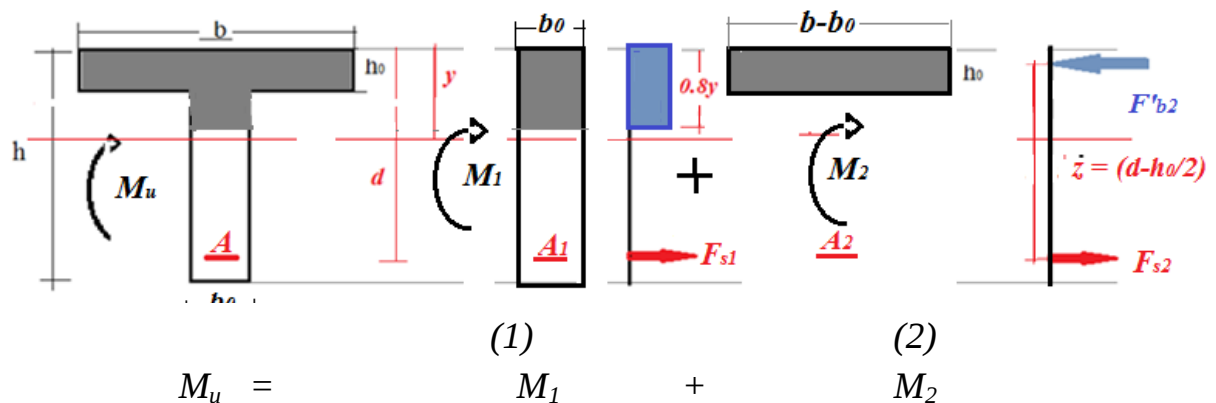


Fig.6.17 Décomposition de la section en T à l'ELUR sans armature comprimée.

Calcul de M_1 et M_2 :

Section (2)

$$\sum M / A_2 = 0 \rightarrow M_2 - F'_{b2} \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

$$M_2 = (b - b_0) h_0 \sigma_{bc} \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

$$\sum M / F'_{b2} \rightarrow M_2 - F_s \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 0$$

$$M_2 - A_2 \sigma_s \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 0$$

$$\rightarrow (b - b_0) h_0 \sigma_{bc} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = A_2 \sigma_s \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

$$A_2 = \frac{(b - b_0) h_0 \sigma_{bc}}{\sigma_s}$$

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Section (1) :

$$M_1 = M_n \text{ (moment sollicitant la nervure)} = M_u - M_2$$

Le calcul d'armature revient au calcul d'une section rectangulaire ($b_0 h$) sollicité par $M_1 = M_n$.

$$\mu_n = \frac{M_n}{b \sigma_{bc} b_0 d^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_n \leq \mu_{AB} = 0.186 \rightarrow \text{Pivot A} \\ A' = 0, \quad \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}, \\ A_u = \frac{M_n}{\sigma_s \beta d} \\ \mu_{AB} < \mu_n \leq \mu_{BC} = 0.48 \rightarrow \text{Pivot B} \end{array} \right.$$

Pivot B :

si $\left[\begin{array}{l} M_n \leq M_l \\ \mu_n \leq \mu_l \end{array} \right] \Rightarrow$ Les armatures comprimées ne sont pas nécessaires, car les armatures tendues travaillent à leur capacité ultime et le béton comprimé résiste seul aux contraintes de compression : $A' = 0$

$$A' = 0, \quad \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s},$$

$$\rightarrow A_u = \frac{M_n}{\sigma_s \beta d}$$

si $\left[\begin{array}{l} M_n > M_l \\ \mu_n > \mu_l \end{array} \right] \Rightarrow$ Les armatures tendues ne travaillent pas à leur capacité ultime $\sigma_s = f_e / \gamma_s$. Donc pour faire travailler les armatures tendues à leur capacité ultime ($\epsilon_s = \epsilon_{sl}$; $\sigma_s = f_e / \gamma_s$), il y'a lieu de prévoir des armatures comprimé A' . Donc A' est nécessaire.

2.3. Section en T avec armatures comprimées :

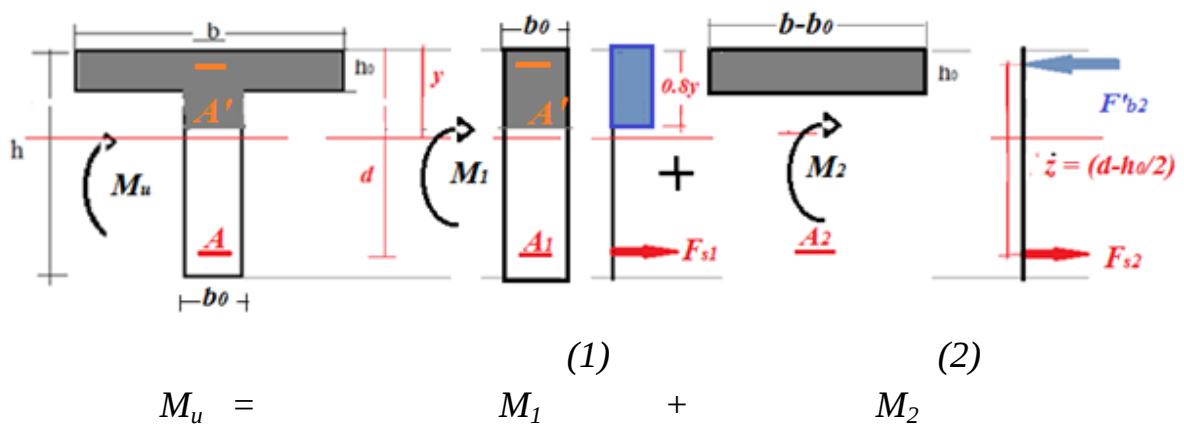


Fig.6.18 Décomposition de la section en T à l'ELUR avec armature comprimée.

Section (2)

$$\sum M / A_2 = 0 \rightarrow M_2 - F'_{b2} \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

$$M_2 = (b - b_0) h_0 \sigma_{bc} \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

$$\sum M / F'_{b2} \rightarrow M_2 - F_s \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 0$$

$$M_2 - A_2 \sigma_s \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 0$$

$$\rightarrow (b - b_0) h_0 \sigma_{bc} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = A_2 \sigma_s \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

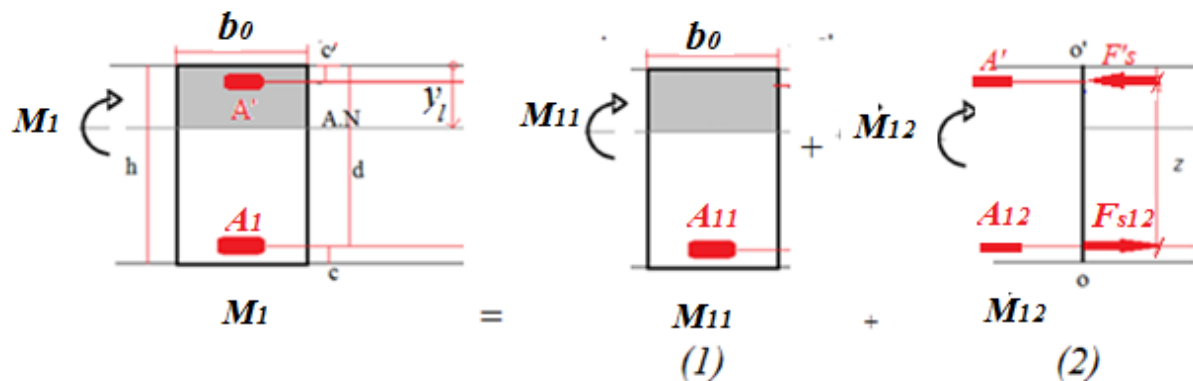
$$A_2 = \frac{(b - b_0) h_0 \sigma_{bc}}{\sigma_s}$$

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Section (1)

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_n = M_u - M_2 \\ \mu_1 &= \mu_n = \mu = \frac{M_1}{b\sigma_{bc}b_0d^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A' \text{ est nécessaire}$$

Calcul d'armature : Méthode de décomposition « Méthode 1 »



Section 1 :

$$M_{11} = M_l = \mu_l \sigma_{bc} b_0 d^2$$

$$\alpha_l = 1.25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_l} \right), \beta_l = 1 - 0.4\alpha_l$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\text{et } \alpha_l = \frac{3.5}{1000\varepsilon_{sl} + 3.5}$$

$$\Rightarrow A_{11} = \frac{M_{11}}{\sigma_s \beta_l d}$$

Section 2 :

La section restante est sollicitée par : $M_{12} = M_1 - M_{11}$

$$\sum M / A_{12} = 0$$

$$M_{12} - F'_s (d - c') = 0$$

$$M_{12} - A' \sigma'_s (d - c') = 0$$

$$A' = \frac{M_{12}}{\sigma'_s (d - c')}$$

$$\sigma'_s ?$$

$$\Delta \equiv \Delta \Rightarrow \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{bc}} = \frac{y_l - c'}{y_l} = \frac{\alpha_l d - c'}{\alpha_l d}$$

$$\Rightarrow \varepsilon'_s = \varepsilon_{bc} \frac{\alpha_l d - c'}{\alpha_l d}, \quad \varepsilon_{bc} = 3.5^0 /_{00}$$

$$\sigma'_s = \begin{cases} \text{si } \varepsilon'_s \geq \varepsilon'_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \\ \text{si } \varepsilon'_s < \varepsilon'_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon'_s E_s \end{cases}$$

$$\sum M /_{A'} = 0$$

$$M_{12} - F_{s12} (d - c') = 0$$

$$M_{12} - A_{12} \sigma_s (d - c') = 0$$

$$A_{12} = \frac{M_{12}}{\sigma_s (d - c')}$$

$$\text{avec } \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Armature finale en ELUR est :

$$A_u = A_{11} + A_{12} + A_2$$

$$A'_u = A'$$

3. CALCUL AUX ETATS LIMITES DE SERVICE « ELS »

De même que l'ELUR, pour tout ce qui suit, le moment fléchissant sera considéré positif. Si le moment fléchissant est négatif, le calcul revient au calcul d'une section rectangulaire « $b_0 h$ ».

3.1. Section en T sans armature comprimée : le calcul des armatures est recommandé dans le cas de fissuration préjudiciable ou très préjudiciable.

3.1.1. Position de l'axe neutre :

Pour un moment fléchissant positif (calcul d'une section en T), deux cas sont distingués.

a) *Axe neutre dans la table de compression :*

Dans ce cas, la table de compression seule peut résister aux sollicitations de compression produites par le moment fléchissant, d'où $y_1 \leq h_0$.

Comme cas limite de ce cas $h_0 = y_1$.

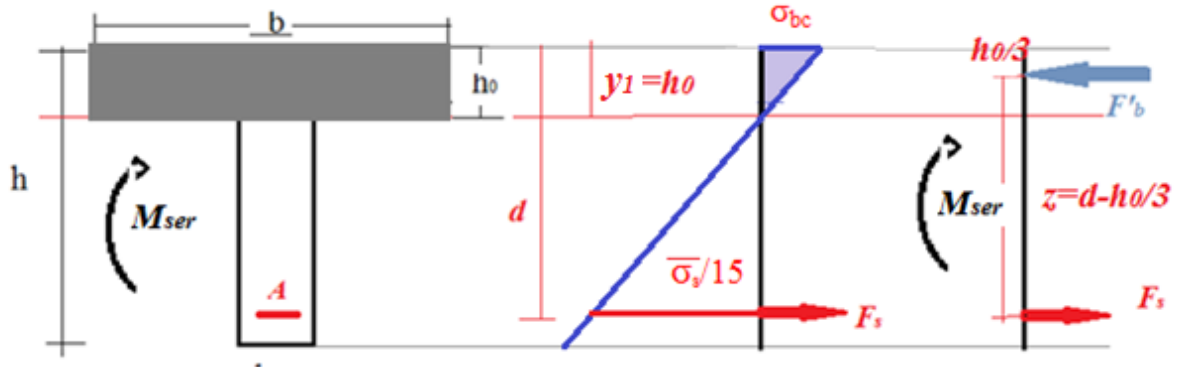


Fig. 6.19 Axe neutre dans la table ($h_0 = y_1$).

Moment résistant de la table « M_T » :

$$\left. \begin{aligned} M_T &= F'_b z \\ F'_b &= \frac{yb\sigma_{bc}}{2} = \frac{h_0 b \sigma_{bc}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_T = \frac{bh_0\sigma_{bc}}{2} \left(d - \frac{h_0}{3} \right)$$

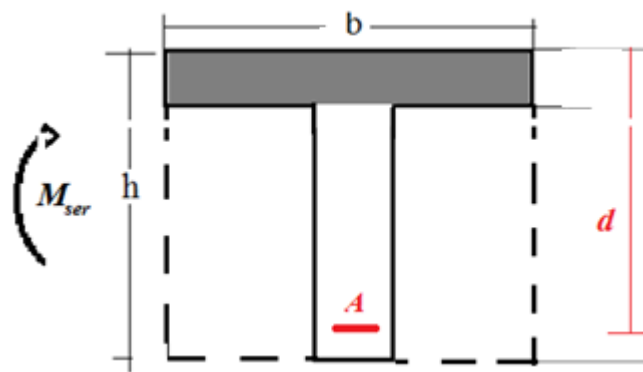
$$\Delta \cong \Delta$$

$$\frac{\sigma_{bc}}{\frac{\sigma_s}{15}} = \frac{h_0}{(d - h_0)} \rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\sigma_s}{15} \frac{h_0}{(d - h_0)}$$

$$M_T = \frac{bh_0}{2} \frac{\sigma_s}{15} \frac{h_0}{(d - h_0)} \left(d - \frac{h_0}{3} \right)$$

$$M_T = \frac{bh_0^2}{30} \frac{\left(d - \frac{h_0}{3} \right)}{(d - h_0)} \sigma_s$$

Axe neutre dans la table « $M_{ser} \leq M_T$ » : Donc la surface de la table de compression « bh_0 » peut résister seule aux sollicitations de compression dues au moment de service. Dans ce cas le calcul revient au calcul d'une section rectangulaire de section « **bh** ».



b) Axe neutre dans la nervure :

Si $M_{ser} > M_T$, l'axe neutre est dans la nervure. La table de compression ne peut pas résister seule aux sollicitations de compression produites par le moment fléchissant, d'où $y_1 > h_0$.

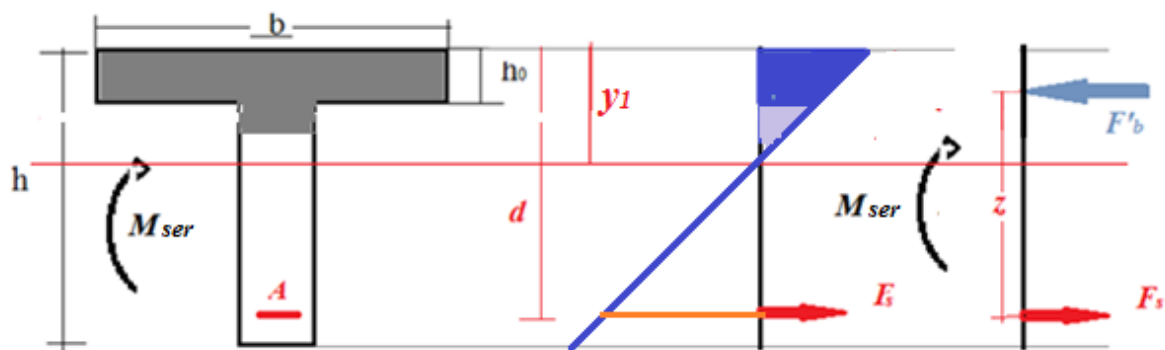


Fig. 6.20 Axe neutre dans la nervure ($h_0 < y_1$).

Dans ce cas, le calcul des armatures doit tenir en compte, en plus de la table de compression, de la participation d'une partie de la nervure dans la résistance de la poutre. Donc il s'agit du calcul d'une section en T.

Vu la complexité du calcul, le calcul des armatures dans ce cas est basé sur l'application de la méthode approchée. En assimilant la résultante des contraintes de compression de la table et de la nervure comprimée à la distance $z = d - h_0/2$ du centre de gravité des armatures tendues.

$$z = d - \frac{h_0}{2}$$

$$\sum M / F_b' = 0 \rightarrow$$

$$A_{ser} = \frac{M_{ser}}{z \sigma_s}$$

Vérification de l'existence des armatures comprimées:

$$\sigma_{bc} = \left[\frac{A_{ser} d}{b h_0} + \frac{h_0}{30} \right] \frac{\sigma_s}{z}$$

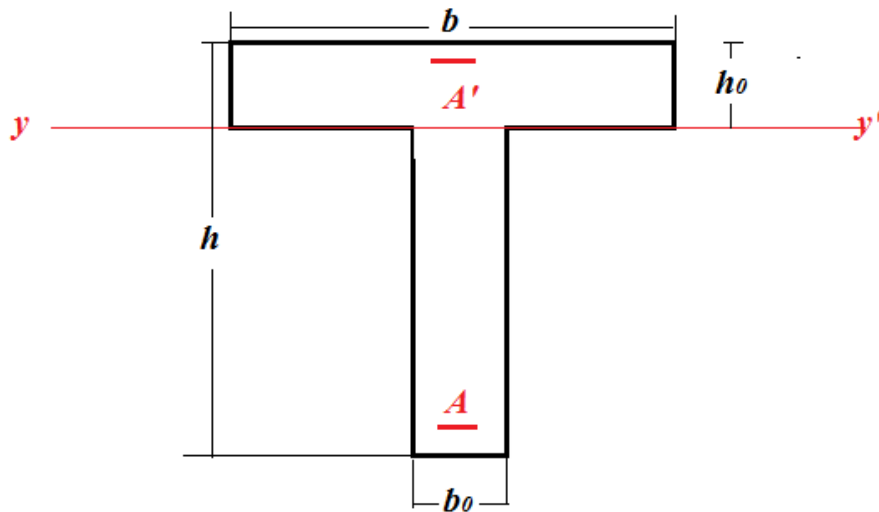
Si $\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28} \rightarrow A'$ non nécessaire

Si $\sigma_{bc} > \overline{\sigma_{bc}} \rightarrow A' \neq 0$

3.2. Vérification des contraintes :

Le développement analytique est considéré pour un cas général d'une section en T avec armature comprimée. Si A' n'est pas nécessaire, on remplace A' par 0 dans les équations

Position de l'axe neutre : Pour déterminer la position de l'axe neutre (table ou nervure), le cas limite $y_1 = h_0$ est considéré pour le calcul du moment statique $S_{yy'}$.



$$S_{yy'} = b \frac{h_0^2}{2} + 15A'(h_0 - c') - 15A(d - h_0)$$

Cas 1 : si $S_{yy} \geq 0$: axe neutre dans la table ($y_0 \leq h_0$).

$$S_{yy'} = b \frac{y_1^2}{2} + 15A'(y_1 - c') - 15A(d - y_1) = 0 \rightarrow y_1$$

Détermination du coefficient K

$$I_{yy'} = \frac{1}{3} b y_1^3 + 15A(d - y_1)^2 + 15A'(y_1 - c')^2$$

$$[M_{ser}] = Nm, [I_{yy'}] = cm^4 \quad K = \frac{M_{ser}}{I_{yy'}}$$

Cas 2 : si $S_{yy} < 0$: axe neutre dans la nervure ($y_0 > h_0$)

$$S_{yy'} = (b - b_0)h_0 \left(y_1 - \frac{h_0}{2} \right) + b_0 y_1^2 + 15A'(y_1 - c') - 15A(d - y_1) = 0 \rightarrow y_1$$

Détermination du coefficient K

$$I_{yy'} = \frac{(b - b_0)h_0^3}{12} + (b - b_0)h_0 \left(y_1 - \frac{h_0}{2} \right)^2 + \frac{b_0 y_1^3}{3} + 15A(d - y_1)^2 + 15A'(y_1 - c')^2$$

$$[M_{ser}] = Nm, [I_{yy'}] = cm^4 \quad K = \frac{M_{ser}}{I_{yy'}}$$

Pour que les armatures appliquées conviennent à l'ELS, il faut avoir :

$$\begin{cases} 1) \sigma_{bc} = K y_1 \leq \overline{\sigma}_{bc} \\ 2) \sigma_s = 15K(d - y_1) \leq \overline{\sigma}_s \\ 3) \sigma'_s = 15K(y_1 - c') \leq \overline{\sigma}_s \end{cases}$$

Si l'une des inégalités n'est pas vérifiée, il faut recalculer les armatures à l'ELS.

3.3. Condition de non fragilité

Que la section en T soit calculée comme section rectangulaire, ou section en T, l'armature minimale est donnée par l'expression suivante :

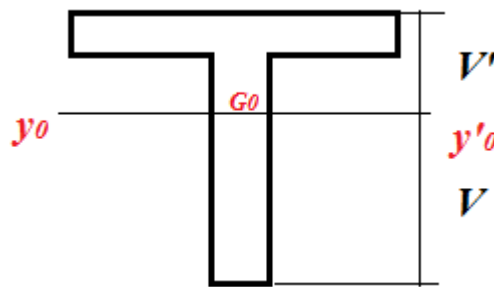
a- Pour $M > 0$

$$A_{\min} = \frac{I_{y_0 y'_0}}{0.81 h V} \frac{f_{t28}}{f_e}$$

b- Pour $M < 0$

$$A_{\min} = \frac{I_{y_0 y'_0}}{0.81 h V'} \frac{f_{t28}}{f_e}$$

Avec $I_{y_0 y'_0}$: moment d'inertie de la section du béton en T par rapport à son centre de gravité



G_0 : centre de gravité de la section en béton seul.

EXEMPLE D'APPLICATION

Soit une poutre en béton armé de section en T, sollicitée à

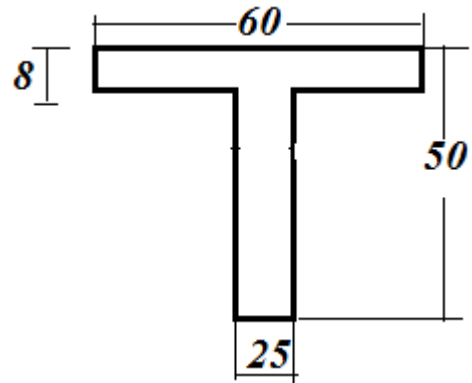
$M_u = 300 \text{ kNm}$; combinaison fondamentale

$M_{ser} = 201 \text{ kNm}$

Avec ; $F_e E_{400}$; $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$; $c_g = 25 \text{ mm}$.

Fissuration préjudiciable

Déterminer la section des armatures

**Solution :**1- ELUR :

Position de l'axe neutre

$$\left. \begin{aligned} M_T &= b h_0 \sigma_{bc} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 279.5 \text{ kNm} \\ M_u &= 300 \text{ kNm} > M_T = 279.5 \text{ kNm} \end{aligned} \right\} \text{Axe neutre dans la nervure}$$

$$M_u = M_n + M_2 = M_1 + M_2$$

$$M_2 = (b - b_0) h_0 \sigma_{bc} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 163.02 \text{ kNm}$$

Section 1

$$M_1 = M_u - M_2 = 136.93 \text{ kNm}$$

$$\mu_1 = \frac{M_1}{\sigma_{bc} b_0 d^2} = 0.190$$

$$\mu_{AB} = 0.186 \leq \mu = 0.190 \leq 0.48 \Rightarrow \text{Pivot } B$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{bc} = 3.5^0 /_{00}$$

Vérification de l'existence des armatures comprimées :

$$\varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = 1.739 \cdot 10^{-3}$$

$$\alpha_l = \frac{3.5}{1000 \varepsilon_{sl} + 3.5} = 0.668$$

$$\mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l) = 0.392$$

$$\mu = 0.190 < \mu_1 \quad (\text{region } 2a) \Rightarrow \varepsilon_s > \varepsilon_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 348 \text{ MPa}$$

Donc les armatures comprimées ne sont pas nécessaires : $A' = 0$

$$\alpha_1 = 1.25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_1} \right)$$

$$\beta_1 = 1 - 0.4\alpha_1 = 0.894$$

$$A_1 = \frac{M_1}{\sigma_s \beta_1 d} = 9.8 \text{ cm}^2$$

Section 2

$$A_2 = \frac{(b - b_0) h_0 \sigma_{bc}}{\sigma_s} = 11.41 \text{ cm}^2$$

Armature finale en ELUR est :

$$A_u = A_1 + A_2 = 21.21 \text{ cm}^2$$

$$A' = 0$$

2- ELS :

Position de l'axe neutre :

Moment résistant de la table

$$M_T = \frac{bh_0^2}{30} \frac{\left(d - \frac{h_0}{3} \right)}{(d - h_0)} \overline{\sigma_s}$$

$$\overline{\sigma_s} = \min \left(\frac{2}{3} f_e; 110 \sqrt{\eta f_{t28}} \right) = 201.6 \text{ MPa}$$

$$M_T = 29.52 \text{ kN} < M_{ser} = 201 \text{ kNm}$$

Donc, axe neutre dans la nervure. Utilisation de la méthode approchée pour le calcul d'armatures.

$$z = d - \frac{h_0}{2} = 41\text{cm}$$

$$A_{ser} = \frac{M_{ser}}{z\sigma_s} = 24.32\text{cm}^2$$

Vérification de l'existence des armatures comprimées :

$$\sigma_{bc} = \left[\frac{A_{ser}d}{bh_0} + \frac{h_0}{30} \right] \frac{\sigma_s}{z} = 12.52\text{MPa}$$

$$\sigma_{bc} 12.52\text{MPa} \leq \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28} = 15\text{MPa} \rightarrow A' \text{ non nécessaire}$$

3- Armature minimale :

$$A_{min} = \frac{I_{y_0 y'_0}}{0.81hV} \frac{f_{t28}}{f_e}$$

$$V = 28.43\text{cm}$$

$$V' = 21.57\text{cm}$$

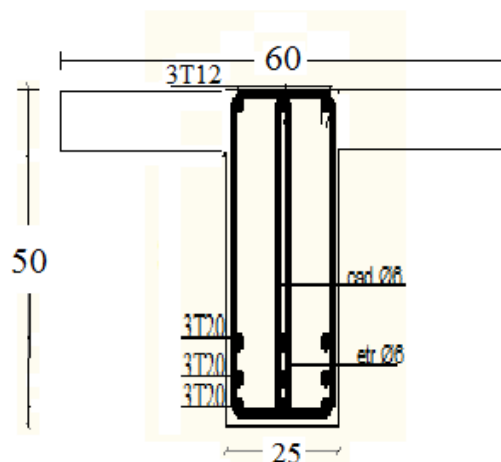
$$I_{y_0 y'_0} = b_0 \frac{V^3}{3} + b \frac{V'^3}{3} - (b - b_0) \frac{(V' - h_0)^3}{3} = 363053.5\text{cm}^4$$

$$A_{min} = \frac{I_{y_0 y'_0}}{0.81hV} \frac{f_{t28}}{f_e} = 1.32\text{cm}^2$$

4- Armature finale :

$$A = \max(A_u; A_{ser}; A_{min}) = 24.32\text{cm}^2 \text{ soit } 9T20$$

$$A' = 0 \text{ soit } 3T12 \text{ de montage}$$



3.4. Section en T avec armatures comprimées :

$$\sigma_{bc} > \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28} \rightarrow A' \text{ est nécessaire}$$

Si des armatures comprimées sont disposées en dehors des angles de la section les règles BAEL prévoient des étriers ou des épingles au plus tous les 15 $\emptyset$ ($\emptyset$: diamètre des armatures comprimées).

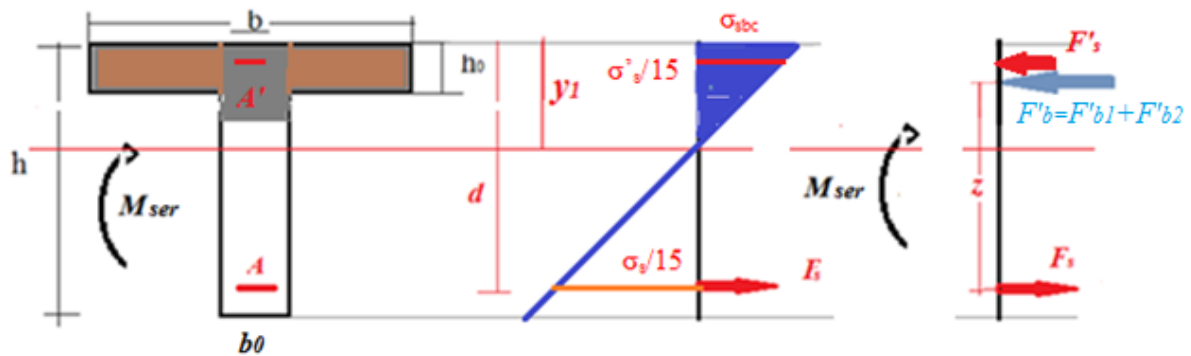


Fig.6.21 Bilan d'efforts d'une section en T à l'ELS avec armature comprimée.

F'_{b1} : effort de compression dans la nervure ($b_0 h$)

$$F'_{b1} = \frac{1}{2} \overline{\sigma_{bc}} b_0 y_1; \left(\text{appliqué à } \frac{y_1}{3} \right)$$

F'_{b2} : effort de compression dans la table réduite $(b-b_0)h_0$

$$F'_{b2} = \frac{h_0}{2} (\overline{\sigma_{bc}} + \overline{\sigma_{bc1}}) (b-b_0); (\text{appliqué à } a)$$

avec;

$$\sigma_{bc} = \overline{\sigma_{bc}}; \quad \sigma_s = \overline{\sigma_s}; \quad \sigma'_s = 15 \left(\frac{y_1 - c'}{y_1} \right) \overline{\sigma_{bc}}$$

$$k_1 = \frac{\overline{\sigma_s}}{\overline{\sigma_{bc}}}; \quad \alpha_1 = \frac{15}{15 + k_1}; \quad y_1 = \alpha_1 d$$

F'_b : effort de compression résultant ($F'_{b1} + F'_{b12}$) appliqué à la distance « z » par rapport à la section des armatures tendues.

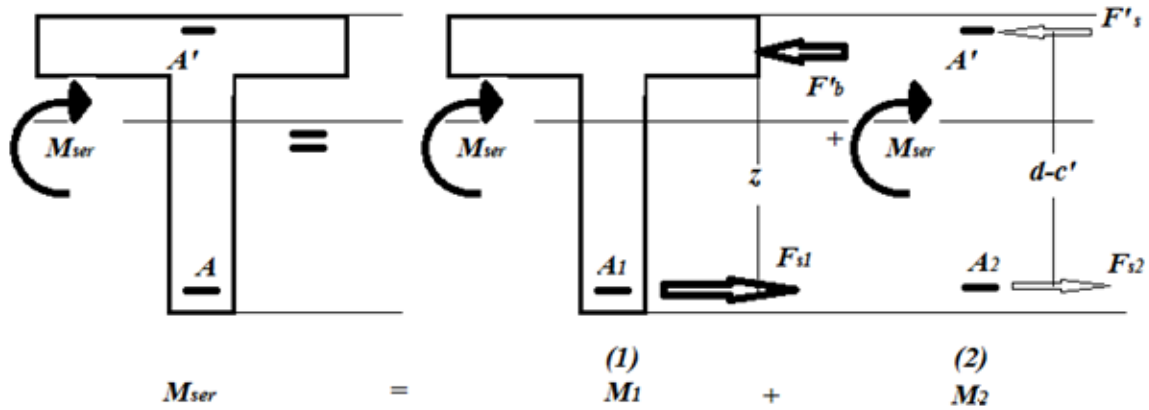


Fig.6.22 Décomposition de la section en T à l'ELS avec armature comprimée.

Avec :

$$z = d - \frac{h_0}{2} + \frac{bh_0^3 - b_0(y_1 - h_0)^2(2y_1 + h_0)}{6[by_1^2 - (b - b_0)(y_1 - h_0)^2]}$$

Section (1) : Equilibrée par M_1 :

$$\sum M / A_1 = 0 \rightarrow M_1 - F'_b z = 0$$

$$M_1 = F'_b z$$

$$F'_b = \frac{1}{2} \left[b_0 y_1 + h_0 (b - b_0) \frac{2y_1 - h_0}{y_1} \right] \overline{\sigma}_{bc}$$

$$\sum M / F'_b = 0 \rightarrow M_1 - F_{s1} z = 0$$

$$M_1 = A_1 \overline{\sigma}_s z$$

$$A_1 = \frac{M_1}{\overline{\sigma}_s z} = \frac{F'_b}{\overline{\sigma}_s}$$

Section (2) : Equilibrée par M_2 :

$$M_2 = M_{ser} - M_1$$

$$\sum M / A_2 = 0$$

$$M_2 - F'_s (d - c') = 0$$

$$M_2 - A' \sigma'_s (d - c') = 0$$

$$\sigma'_s = 15 \left(\frac{y_1 - c'}{y_1} \right) \overline{\sigma}_{bc};$$

$$A' = \frac{M_2}{\sigma'_s (d - c')}$$

$$\sum M / A' = 0$$

$$M_2 - F_{s2} (d - c') = 0$$

$$M_2 - A_2 \sigma_s (d - c') = 0$$

$$A_2 = \frac{M_2}{\sigma_s (d - c')}$$

Armature finale en ELS est :

$$A_{ser} = A_1 + A_2$$

$$A'_{ser} = A'$$

EXEMPLE D'APPLICATION

Soit une poutre en béton armé de section en T, sollicitée à

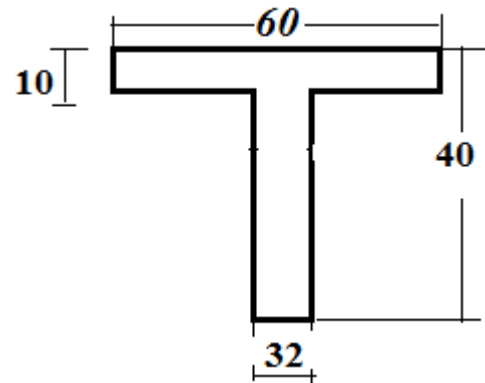
$M_u = 283 \text{ kNm}$; combinaison fondamentale

$M_{ser} = 172 \text{ kNm}$

Avec ; $F_e E 500$; $E_a = 2.10^5 \text{ MPa}$ $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$;

$c_g = 25 \text{ mm}$; $c = c' = 5 \text{ cm}$. Fissuration préjudiciable

Déterminer la section des armatures

**Solution :****1- ELUR**

$$\sigma_{bc} = 11.33 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{aligned} M_T &= b h_0 \sigma_{bc} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 210738 \text{ Nm} \\ M_u &= 283 \text{ kNm} > M_T = 210.7 \text{ kNm} \end{aligned} \right\} \text{Axe neutre dans la nervure}$$

$$M_u = M_n + M_2 = M_1 + M_2$$

$$M_2 = (b - b_0) h_0 \sigma_{bc} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 98344.4 \text{ Nm}$$

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 435 \text{ MPa} \quad \Rightarrow A_2 = \frac{M_2}{\sigma_s \left(d - \frac{h_0}{2} \right)} = 7.29 \text{ cm}^2$$

Section 1

$$M_1 = M_u - M_2 = 184656 \text{ Nm}$$

$$\mu_1 = \frac{M_1}{\sigma_{bc} b_0 d^2} = 0.416$$

$$\mu_{AB} = 0.186 \leq \mu = 0.416 \leq 0.48 \Rightarrow \text{Pivot } B$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{bc} = 3.510^{-3}$$

Vérification de l'existence des armatures comprimées :

$$\varepsilon_{sl} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = 2.17410^{-3}$$

$$\alpha_l = \frac{3.5}{1000\varepsilon_{sl} + 3.5} = 0.617; \quad \beta_l = 1 - 0.4\alpha_l = 0.753$$

$$\mu_l = 0.8\alpha_l(1 - 0.4\alpha_l) = 0.372$$

$$\mu = 0.416 > \mu_l \quad (\text{region } 2b) \Rightarrow A' \neq 0; \quad \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 435 \text{ MPa}$$

Section 11 :

$$M_{11} = M_l = \mu_l \sigma_{bc} b_0 d^2 = 165219 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow A_{11} = \frac{M_{11}}{\sigma_s \beta_l d} = 14.41 \text{ cm}^2$$

Section 12

%La section restante est sollicitée par : $M_{12} = M_l - M_{11} = 19437 \text{ Nm}$

$$A' = \frac{M_{12}}{\sigma'_s (d - c')}$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{bc} \frac{\alpha_l d - c'}{\alpha_l d} = 3.5 \frac{0.617 * 35 - 5}{0.617 * 35} 10^{-3} = 2.689 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma'_s = \begin{cases} \text{si } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{sl} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 435 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$A' = \frac{M_{12}}{\sigma'_s (d - c')} = 1.5 \text{ cm}^2$$

$$A_{12} = \frac{M_{12}}{\sigma_s (d - c')} = 1.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{avec } \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = 435 \text{ MPa}$$

Armature finale en ELUR est :

$$A_u = A_{11} + A_{12} + A_2 = 14.41 + 1.5 + 7.29 = 23.2 \text{ cm}^2$$

$$A'_u = A' = 1.5 \text{ cm}^2$$

2- ELS :Position de l'axe neutre :

Moment résistant de la table

$$f_{t28} = 0.6 + 0.6 f_{c28} = 1.8 \text{ MPa}$$

$$M_T = \frac{bh_0^2}{30} \frac{\left(d - \frac{h_0}{3}\right)}{(d - h_0)} \overline{\sigma_s}$$

$$\overline{\sigma_s} = \min\left(\frac{2}{3} f_e; 110\sqrt{\eta f_{t28}}\right) = 186.7 \text{ MPa}$$

$$M_T = 46919 \text{ Nm} < M_{ser}$$

Donc, axe neutre dans la nervure. Utilisation de la méthode approchée pour le calcul d'armatures.

$$z = d - \frac{h_0}{2} = 30 \text{ cm}$$

$$A_{ser} = \frac{M_{ser}}{z \overline{\sigma_s}} = 30.7 \text{ cm}^2$$

Vérification de l'existence des armatures comprimées :

$$\sigma_{bc} = \left[\frac{A_{ser} d}{bh_0} + \frac{h_0}{30} \right] \frac{\overline{\sigma_s}}{z} = 13.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bc} = 13.2 \text{ MPa} > \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28} = 12 \text{ MPa} \rightarrow A' \text{ est nécessaire}$$

Cas limite :

$$\sigma_{bc} = \overline{\sigma_{bc}} = 12 \text{ MPa}; \quad \sigma_s = \overline{\sigma_s} = 186.7 \text{ MPa}; \quad y_1 = \alpha_1 d = 17.2$$

$$k_1 = \frac{\overline{\sigma_s}}{\overline{\sigma_{bc}}} = 15.56; \quad \alpha_1 = \frac{15}{15 + k_1} = 0.491; \quad \sigma'_s = 15 \left(\frac{y_1 - c'}{y_1} \right) \overline{\sigma_{bc}} = 127.7 \text{ MPa}$$

$$z = d - \frac{h_0}{2} + \frac{bh_0^3 - b_0(y_1 - h_0)^2(2y_1 + h_0)}{6[by_1^2 - (b - b_0)(y_1 - h_0)^2]} = 29.85 \text{ cm}$$

Section (1) : Equilibrée par M_1 :

$$F'_b = \frac{1}{2} \left[b_0 y_1 + h_0 (b - b_0) \frac{2y_1 - h_0}{y_1} \right] \overline{\sigma}_{bc} = 568565 N$$

$$A_1 = \frac{F'_b}{\sigma_s} = 30.45 \text{ cm}^2$$

Section (2) : Equilibrée par M_2 :

$$M_2 = M_{ser} - M_1 = 2283 \text{ Nm}$$

$$A'_1 = \frac{M_2}{\sigma'_s (d - c')} = 0.6 \text{ cm}^2$$

$$A'_2 = \frac{M_2}{\sigma'_s (d - c')} = 0.41 \text{ cm}^2$$

Armature finale en ELS est :

$$A_{ser} = A_1 + A_2 = 30.9 \text{ cm}^2$$

$$A'_{ser} = A'_1 = 0.6 \text{ cm}^2$$

Armature minimale : Selon les DTU associées au BAEL 91 modifié 99, pour un moment positif, la méthode approchée suivante est applicable.

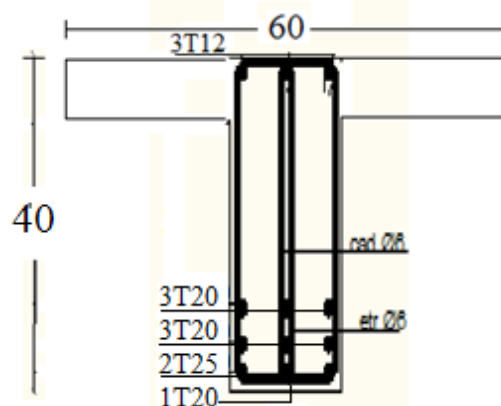
$$A_{min} = 0.23 b_0 d \frac{f_{t28}}{f_e} = 0.93 \text{ cm}^2$$

Armature finale :

$$\max(A_u + A'_u; A_{ser} + A'_{ser}) = A_{ser} + A'_{ser} = 31.5 \text{ cm}^2$$

$$A_f = A_{ser} = 30.9 \text{ cm}^2 > A_{min} \quad \text{soit } 2HA25 + 7HA20 = 31.78 \text{ cm}^2$$

$$A'_f = A'_{ser} = 0.6 \text{ cm}^2 \quad \text{soit } 3HA12 = 3.39 \text{ cm}^2$$



CONCLUSION

Le présent polycopié s'applique au calcul du béton armé selon les règles B.A.E.L 91 et certaines règles définies par l'Euro-code 2. Son objectif est de présenter le développement analytique théorique de calcul des éléments de base des structures en béton armé (tirants, poteaux, poutres,...etc.) en se basant sur des lois de comportement bien définies en états limites ultimes de résistance (ELUR) et en états limites de service (ELS).

Chaque chapitre présente les hypothèses et les équations d'équilibre pour pouvoir dimensionner et ferrailer la section transversale du béton. Le tout étant illustré par des exemples d'application.

Références bibliographiques

[1] – Cours de béton armé BAEL.91

Calcul des éléments simples et des structures de bâtiment. Jean-Pierre MOUGIN – BERTI Edition. EYROLLES – PARIS-1992

[2]- Béton armé.

BAEL 91 modifié 99 et DTU associés. Jean-Pierre MOUGIN – BERTI Edition. EYROLLES – 2006.

[3]- Béton armé.

Application de l'eurocode 2. Ronan NICOT. Ellipses Edition-2001.

[4]- EN 1992-1-1

Normes européenne. Eurocode 2: Calcul des structures en béton - Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments .Dec 2004.

[5]- CBA 93.

D.T.R-B.C2 -41 Règles de conception et de calcul des structures en béton armé. Document technique réglementaire. Ministère de l'Habitat. Algérie.

[6]- Règles BAEL.91 modifiée99

Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites. EYROLLES -2000- Troisième tirage -2002.

[7]-Propriétés des bétons

ADAM M. NEVILLE. Traduit par le CRIP. EYROLLES-2000.

[8]- Maîtrise du BAEL 91 et des DTU associés

J.PERCHAT, J.ROUX. 3^{ème} édition 1999.

[9]- Théorie et pratique du béton armé aux états limites. Eyrolles

M.ALBIGES, M. MINGASSON. EYROLLES

- *Cours béton armé. M. BENNEMENI. USTO. Algérie*
- *Travaux dirigés béton armé. Pr H.KHELAFI. Univ. Adrar. Algérie.*