Table des Matières

1	Corps des Réels	2
1.1	Nombres réels	2
1.1.1	$\mathbb{R}$ est un corps commutatif	3
1.1.2	Raisonnement par récurrence	3
1.1.3	Valeur absolue	4
1.1.4	Intervalles	5
1.2	Bornes supérieure et inférieure d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$	5
1.2.1	Majorants, Minorants	5

Chapitre 1

Corps des Réels

1.1 Nombres réels

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\}$.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}/a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$ est l'ensemble des rationnels.

$D = \{\frac{a}{10^k}/a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des nombres décimaux.

Définition 1.1.1 *Un nombre rationnel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie périodique à partir d'un certain rang de décimales.*

Exemple 1 *4,255255255.....,0.333333.....5.232323..... sont des nombres rationnels*

Définition 1.1.2 *Un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.*

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Si $x \notin \mathbb{Q}$ dans ce cas on dit que x est un nombre irrationnel

Exemple 2 $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ c'est à dire $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Proposition 1.1.1 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a:*

$x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q} \implies x + y \notin \mathbb{Q}$.

On note par $\forall$: quel que soit ou pour tout.

$\exists$: il existe.

1.1.1 $\mathbb{R}$ est un corps commutatif

Définition 1.1.3 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif car :

- 1) Associative $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$
- 2) Commutative $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$
- 3) Elément neutre $\exists 0_E \in \mathbb{R}, \forall x \in E, 0_E + x = x$
- 4) Elément symétrique $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ tel que $x + x' = 0_E$.
- 5) Associative $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- 6) Commutative $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x$
- 7) Elément neutre $\exists 1 \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, 1 \cdot x = x$
- 8) Elément symétrique $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists x' \in \mathbb{R}^*$ tel que $x \cdot x' = 1$.
- 9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributive).

Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ ($\leq$ ou $\geq$)

1. $\mathbb{R}$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} (x \leq x)$.
2. $\mathbb{R}$ est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$.
3. $\mathbb{R}$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y)$ et $(y \leq x) \Rightarrow (y = x)$.

$\mathbb{R}$ est totalement ordonné car $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a $(x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.

1.1.2 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

- 1) On prouve $P(0)$.est vraie.
- 2) On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n + 1)$ est vraie.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

1) On a $2^0 = 1 \geq 0$ c-à-dire $P(0)$ est vraie.

2) On suppose $P(n) : 2^n \geq n$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1) : 2^{n+1} \geq n+1$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n \geq n + 1$$

alors $P(n+1) : 2^{n+1} \geq n+1$ est vraie.

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

1.1.3 Valeur absolue

soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x (notée $|x|$), le réel défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propriétés de la valeur absolue

1) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, r > 0, |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x| + |y|$.

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x+y|$.

5) $\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| \leq |x| |y|$.

Preuve. Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x| + |y|$.

$$\text{On a } \begin{cases} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{cases}$$

donc $-|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y|$

alors $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x+y|$

$$\text{On a } \begin{cases} |x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y| \\ |y| = |y+x-x| \leq |x+y| + |x| \end{cases}$$

donc $-|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y|$

ce qui nous donne $||x| - |y|| \leq |x+y|$ ■

1.1.4 Intervalles

Définition 1.1.4 Soit I une partie de $\mathbb{R}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

Remarque: $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles dans $\mathbb{R}$.

Intervalles bornés

$$[a, b] = \{x, a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x, a < x < b\}$$

$$[a, b[= \{x, a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x, a < x \leq b\}$$

Intervalles non bornés

$$]-\infty, b] = \{x, x \leq b\}$$

$$]-\infty, b[= \{x, x < b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x, a \leq x\}$$

$$]a, +\infty[= \{x, a < x\}$$

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

$$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$$

$$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$$

$$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

1.2 Bornes supérieure et inférieure d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$

1.2.1 Majorants, Minorants

A est majorée par M (ou $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A) si $\forall x \in A$, on a $x \leq M$.

A est minorée par m (ou $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A) si $\forall x \in A$, on a $x \geq m$.

A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est à dire

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A, \text{ on a } m \leq x \leq M.$$

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1 *On appelle borne supérieure (resp borne inférieure) de A le plus petit des majorants de A , on le note $\sup(A)$ (resp le plus grand des minorants de A , on le note $\inf(A)$).*