

5.2 Intégrales généralisées (impropres)

5.2.1 Propriétés et définitions élémentaires

5.1 Définition

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *localement intégrable* sur I , si elle est intégrable sur tout intervalle compact de I .

5.2 Définition

Soit f une fonction définie sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), localement intégrable sur $[a, b[$, on lui associe la fonction F définie sur $[a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par

$$\forall x \in [a, b[, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ a un sens ou est convergente si et seulement si la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers b existe. Dans le cas contraire (la limite n'existe pas) on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ n'a pas de sens ou est divergente.

On appelle cette limite l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$, noté $\int_a^b f(t) dt$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \int_a^b f(t) dt.$$

Exemple 5.1.

- 1) L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ est généralisée, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ n'est pas définie en 1.

Soit $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1-t} &= -[\ln(1-t)]_0^x \\ &= \ln(1) - \ln(1-x) \\ &= -\ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ est divergente.

2) Soit l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ (en $+\infty$), pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

5.3 Définition

Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($-\infty \leq a < b < +\infty$), localement intégrable sur $]a, b[$, on lui associe la fonction F définie sur $]a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par

$$\forall x \in]a, b[, \quad F(x) = \int_x^b f(t) dt$$

On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ a un sens ou est convergente si et seulement si la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers a existe. Dans le cas contraire (la limite n'existe pas) on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ n'a pas de sens ou est divergente.

On appelle cette limite l'intégrale généralisée de f sur $]a, b[$, noté $\int_a^b f(t) dt$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \int_a^b f(t) dt.$$

Exemple 5.2.

1) *Étudions l'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln t \, dt$.*

Pour tout $x \in]0, 1]$, une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int_x^1 \ln t \, dt &= [t \ln t]_x^1 - \int_x^1 dt \\ &= [t \ln t - t]_x^1 \\ &= \ln(1) - 1 - (x \ln x - x) \end{aligned}$$

comme $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \ln t \, dt = -1.$$

L'intégrale $\int_0^1 \ln t \, dt$ converge et on a

$$\int_0^1 \ln t \, dt = -1.$$

2) *Soit l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^0 e^t \, dt$. Pour tout $x \in]-\infty, 0]$*

$$\int_x^0 e^t \, dt = [e^t]_x^0 = 1 - e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1,$$

alors l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^t \, dt$ est convergente, et sa valeur est 1.

5.4 Définition

Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$), localement intégrable sur $]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente, s'il existe $c \in]a, b[$, tel que les intégrales de f sur $]a, c[$ et $]c, b[$ convergent, on appelle $\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$ l'intégrale généralisée de f sur $]a, b[$, noté

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Remarque 5.1.

- 1) On pratique, pour étudier une intégrale généralisée sur $]a, b[$, on choisit une valeur c de $]a, b[$. La valeur de l'intégrale est indépendante de c .
- 2) Pour $c \in]a, b[$, si $\int_a^c f(t) dt$ diverge alors $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

Exemple 5.3.

$\int_0^1 \frac{dt}{t-t^2}$, est une intégrale généralisée en 0 et 1

Soit $c \in]0, 1[$, étudions la nature de $\int_0^c \frac{dt}{t(1-t)}$. On a

$$\frac{1}{t(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t},$$

alors pour tout $x \in]0, c[$,

$$\begin{aligned} \int_x^c \frac{dt}{t(1-t)} &= \int_x^c \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= [\ln t - \ln(1-t)]_x^c \\ &= \ln c - \ln(1-c) - (\ln(x) - \ln(1-x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \end{aligned}$$

$\int_0^c \frac{dt}{t(1-t)}$ est divergente, alors $\int_0^1 \frac{dt}{t(1-t)}$ est aussi divergente.

Dans ce qui suit on considère les intégrales généralisées en b .

5.2.2 Calcul pratique des intégrales généralisées

5.1 Proposition (intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions définies sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($-\infty < a \leq b \leq +\infty$), de classe C^1 sur $[a, b]$, tels que la limite de uv en b existe. Les intégrales

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt, \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

sont de même nature, et on a

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \lim_{t \rightarrow b} (u(t)v(t)) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Démonstration. On a

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

comme l'intégrale est généralisée en b , alors pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x u'(t)v(t) dt$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \int_a^b u'(t)v(t) \, dt &= \lim_{x \rightarrow b} \left([u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t) \, dt \right), \\
 &= \lim_{x \rightarrow b} \left(u(t)v(t) - u(a)v(a) - \int_a^x u(t)v'(t) \, dt \right), \\
 &= \lim_{x \rightarrow b} (u(t)v(t)) - u(a)v(a) - \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x u(t)v'(t) \, dt, \\
 &= \lim_{x \rightarrow b} (u(t)v(t)) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t) \, dt.
 \end{aligned}$$

comme la limite de uv en b existe, les intégrales $\int_a^b u'(t)v(t) \, dt$ et $\int_a^x u(t)v'(t) \, dt$ sont de même nature. □

Exemple 5.4.

Calculons la somme de l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} \, dt$.

La fonction $t \mapsto te^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Utilisant l'intégration par partie, on pose $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$, alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^x te^{-t} \, dt &= -[te^{-t}]_0^x - \int_0^x -e^{-t} \\
 &= -xe^{-x} - [e^{-t}]_0^x, \\
 &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1,
 \end{aligned}$$

ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x te^{-t} \, dt = 1.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} \, dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} te^{-t} \, dt = 1$.

5.2 Proposition (changement de variable)

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b[$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), et $\varphi : [\alpha, \beta[\rightarrow [a, b[$ une fonction de classe C^1 et monotone sur $[\alpha, \beta[$ ($-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$), tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\lim_{x \rightarrow \beta} \varphi(x) = b$. Alors les intégrales

$$\int_a^\beta f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt$$

sont de même nature, et en cas de convergence,

$$\int_a^\beta f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration.

Soient $x \in [a, b[$ et $y \in [\alpha, \beta[$, posons

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(y) = \int_a^{\varphi(y)} f(t) dt,$$

et montrons que

$$F(\varphi(y)) = G(y).$$

On a

$$\begin{aligned}
 F(\varphi(y)) &= \int_a^{\varphi(y)} f(t) \, dt \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(y)} f(t) \, dt \\
 &= F(\varphi(y)) - F(\varphi(\alpha)) \\
 &= \int_{\alpha}^y (F \circ G)'(u) \, du \\
 &= \int_{\alpha}^y F'(\varphi(x)) \varphi'(u) \, du \\
 &= \int_{\alpha}^y f(\varphi(x)) \varphi'(u) \, du \\
 &= G(y).
 \end{aligned}$$

Supposons que $\int_a^b f(t) \, dt$ converge, donc $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) \, dt = l$,

$$\int_{\alpha}^y f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du = F(\varphi(y)) = \int_a^{\varphi(y)} f(t) \, dt$$

Comme $\lim_{y \rightarrow \beta} \varphi(y) = b$, en déduit que

$$\lim_{y \rightarrow \beta} \int_{\alpha}^{\varphi(y)} f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt = l.$$

L'intégrale $\int_{\alpha}^y f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du$ converge.

Inversement, supposons que $\int_{\alpha}^y f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du$ converge, alors

$$\lim_{y \rightarrow \beta} \int_{\alpha}^y f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du = l.$$

φ est continue et monotone sur $[\alpha, \beta[$, donc bijective et on a

$$\int_a^x f(t) dt = G(\varphi^{-1}(x)) = \int_a^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = \int_a^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = l,$$

donc $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Finalement en passant à la limite lorsque y tend vers β dans $F(\varphi(y)) = G(y)$, on obtient l'égalité

$$\int_a^\beta f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

□

Exemple 5.5.

Étudions la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$.

En utilisant le changement de variable $t = e^u$, $dt = e^u du$ (φ est de classe C^1 et strictement monotone sur $[\ln 2, +\infty[$), on trouve que les intégrales $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ et $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u}$

ont la même nature, et comme $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u}$ est divergente, alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ est divergente.

5.3 Proposition

Soient f et g deux fonctions $[a, b[$ définies sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, localement intégrables sur $[a, b[$, si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée $\int_a^b (f +$

$\lambda g)(t) dt$ converge et on

$$\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt$$

Démonstration.

Soit $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))(t) dt &= \lim_{x \rightarrow b} \left[\int_a^x (f + \lambda g)(t) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \left[\int_a^x f(t) dt + \lambda \int_a^x g(t) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt + \lim_{x \rightarrow b} \lambda \int_a^x g(t) dt \\ &= \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

□

Remarque 5.2.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge et l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b (f + g)(t) dt$ diverge.

Car si on suppose que l'intégrale $\int_a^b (f + g)(t) dt$ converge, d'après la proposition précédente

$$\int_a^b (f + g)(t) dt - \int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$$

converge, contradiction avec le fait que $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

5.4 Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

- 1) L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- 2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

- 1) Soit $x \in]0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} [t^{1-\alpha}]_x^1 & \text{si } \alpha \neq 1, \\ [\ln t]_x^1 & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (1 - x^{1-\alpha}) & ; \quad \alpha \neq 1, \\ -\ln x & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(1-\alpha)\ln x} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\alpha > 0, \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha < 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe si et seulement si $1-\alpha > 0$, donc si et seulement si $\alpha < 1$,

ainsi $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

- 2) Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} [t^{1-\alpha}]_1^x & \text{si } \alpha \neq 1, \\ [\ln t]_1^x & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (-1 + x^{1-\alpha}) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln x & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(1-\alpha) \ln x} = \begin{cases} 0 & ; \quad 1-\alpha < 0 \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha > 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe si et seulement si $1-\alpha < 0$, donc si et seulement si $\alpha > 1$,

ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

□

Remarque 5.3.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est divergente car

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

où $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge pour $\alpha < 1$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge pour $\alpha > 1$.

On vient de voir qu'une fois la primitive associée à l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est explicitée alors on peut déduire la nature de cette intégrale, il suffit de calculer une limite de la primitive, mais malheureusement trouver l'expression de celle-ci, n'est pas toujours facile, par exemple le cas de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ ou $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$. Comme pour les séries numériques, il faut concevoir d'autres critères qui nous permettent de déterminer la nature d'une intégrale généralisée.

5.2.3 Intégrale généralisée d'une fonction positive

5.1 Théorème (majoration)

Soit f une fonction définie sur $[a, b[$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$) à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et localement intégrable sur $[a, b[$. Alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ définie sur $[a, b[$ est croissante et l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction F est majorée. De plus, on a

$$\forall x \in [a, b[, F(x) \leq \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration.

La fonction f étant positive sur $[a, b[$ alors $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est croissante $[a, b[$, car pour tout $x \in [a, b[$, $F'(x) = f(x) \geq 0$.

Soit l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{F(x), x \in [a, b[\}.$$

$\mathcal{F}$ est non vide et admet une borné supérieur M . Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = M.$$

Comme M est une borné supérieur de $\mathcal{F}$,

$$\forall x \in [a, b[, F(x) \leq M, \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon \geq 0, \exists x_0 \in [a, b[; F(x_0) > M - \varepsilon$$

mais F est croissante,

$$\forall x \in [x_0, b[; M - \varepsilon < F(x_0) < F(x) \leq M \leq M + \varepsilon,$$

ainsi

$$\forall x \in [x_0, b[; |F(x) - M| < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = M.$$

Pour la réciproque, supposons par l'absurde que $\int_a^b f(t) dt$ converge, et que F n'est pas bornée.

Comme F est croissante, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, d'autre part

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = +\infty$$

$\int_a^b f(t) dt$ diverge, ce qui est absurde, ainsi F est bornée. □

5.2 Théorème (de comparaison)

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$ à valeurs réelles et localement intégrables sur $[a, b]$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$, supposons que pour tout $t \in [a, b]$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

- 1) Si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge.
- 2) Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

Démonstration.

1) Posons

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt \quad \text{et} \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Comme pour tout $t \in [a, b]$ $0 \leq f(t) \leq g(t)$, et F, G sont croissantes sur $[a, b]$, on a

$$\forall x \in [a, b], 0 \leq F(x) \leq G(x)$$

Donc, si G est majorée, F l'est également, d'après le théorème de majoration

$$\int_a^b f(t) dt \text{ converge.}$$

2) Est la contraposée de 1).

□

5.3 Théorème (d'équivalence)

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b[$ à valeurs réelles et localement intégrables sur $[a, b[$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), supposons $f \sim g$ au voisinage de b , alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

Démonstration.

Comme $f \sim g$ au voisinage de b , il existe une fonction ε définie sur un voisinage $[\alpha, b[$ de b vérifiant

$$\forall t \in [\alpha, b[, f(t)\varepsilon(t) = g(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow b} \varepsilon(t) = 1$$

Donc il existe $\beta \in [\alpha, b[$ tel que $\frac{1}{2} \leq \varepsilon(t) \leq 2$ ainsi

$$\forall t \in [\beta, b[, \frac{f(t)}{2} \leq f(t)\varepsilon(t) = g(t) \leq 2f(t)$$

Alors, si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge, l'intégrale $\int_\beta^b f(t) dt$ converge donc $\int_\beta^b 2f(t) dt$ converge, et d'après le théorème de comparaison $\int_\beta^b f(t) dt$ converge, $\int_a^b g(t) dt$ converge aussi.

Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge, $\int_\beta^b g(t) dt$ diverge donc l'intégrale $\int_\beta^b \frac{1}{2}g(t) dt$ diverge, d'où la divergence de $\int_\beta^b f(t) dt$ et de $\int_a^b f(t) dt$. Par conséquent les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et

$\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature. $\square$

Exemple 5.6.

- 1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2 + 1} dt$ est une intégrale généralisée convergente, en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\sin^2 t}{t^2 + 1} \leq \frac{1}{t^2}.$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, alors d'après le critère de

comparaisons $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2 + 1} dt$ est convergente.

- 2) Étudions la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est positive et continue sur $[0, 1]$, et on a $e^{-t} \sim 1$, donc

$$\frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}.$$

$\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge, alors $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

5.1 Corollaire

Soient $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction localement intégrable, et $\alpha > 0$,

- 1) Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge pour tout $\alpha > 1$.
- 2) Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge pour tout $\alpha \leq 1$.

Démonstration.

On utilise la définition de la limite et le théorème de comparaison avec l'intégrale de Riemann. $\square$

Les intégrales de Bertrand sont des intégrales généralisées de la forme

$$\int \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de convergence de ces intégrales.

5.4 Théorème (Intégrale de Bertrand)

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

- 1) L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge $\iff (\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$
- 2) L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ converge $\iff (\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.
- 2) L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ converge $\iff \beta < 1$

Démonstration.

- 1) Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, prenons $\gamma \in]1; \alpha[$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln t)^\beta} = 0$$

d'après le corollaire précédent $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge.

Soient $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta} = +\infty,$$

Alors l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ diverge.

Si $\alpha = 1$, on utilise le changement de variable $t = e^u$, on obtient

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$$

$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$, alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

2) En utilisant le changement de variable $t = \frac{1}{u}$, on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta} = \int_{+\infty}^2 \frac{u^\alpha}{|-\ln u|^\beta} \left(\frac{-du}{u^2} \right) = \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln u)^\beta}.$$

D'après 1) $\int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln u)^\beta}$ converge si et seulement si $2-\alpha > 1$ ou $2-\alpha = 1$ et $\beta > 1$, donc si et seulement si $\alpha < 1$ ou si $\beta > 1$ et $\alpha = 1$. Or

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \text{ converge } \Leftrightarrow (\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

3) Le développement limité de la fonction $\ln(x+1)$ au voisinage de 0 est

$$\ln(1+x) = x + o(x),$$

alors au voisinage de 1, on a

$$\ln t = \ln(1+t-1) = t-1 + o(t-1),$$

en déduit que

$$\frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} \underset{1}{\sim} \frac{1}{|t-1|^\beta}$$

en posons $t = u+1$, on trouve

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{du}{|u|^\beta} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^\beta}.$$

$\int_{\frac{1}{t}}^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ et $\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{du}{u^\beta}$ sont de même nature, comme $\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{du}{u^\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$, alors l'intégrale $\int_{\frac{1}{t}}^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

□

Exemple 5.7.

Étudions la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Au voisinage de 0, on a

$$\frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} \underset{0}{\sim} t \ln t.$$

L'intégrale $\int_0^1 t \ln t dt$ converge, en effet une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int_x^1 t \ln t dt &= - \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_x^1 - \frac{1}{2} \int_x^1 t dt \\ &= -\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^1 \\ &= -\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\int_0^1 t \ln t dt$ converge, donc $\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ est aussi convergente.

En $+\infty$, on a

$$\frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t \ln t}{t^{2\alpha}} = \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}.$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} dt$ est une intégrale de Bertrand convergente si et seulement si $2\alpha - 1 > 1$,

donc si et seulement si $\alpha > 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

5.2.4 Intégrale généralisée d'une fonction de signe quelconque

5.5 Définition (convergence absolue)

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument (ou absolument convergente) si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

5.5 Proposition

Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.
En revanche, la réciproque est fausse.

Exemple 5.8.

Soit l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$, pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a

$$\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est absolument convergente et donc convergente.

5.6 Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est semi convergente si $\int_a^b |f(t)| dt$ diverge et $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Exemple 5.9.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi convergente.

par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt &= \int_1^x \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) \frac{1}{t} dt \\
 &= \int_1^x \left(\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right)' \frac{1}{t} dt \\
 &= \left[\frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t^2} dt \\
 &= \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{t^2} - \frac{\sin^2(\frac{1}{2})}{t^2} + \int_1^x \frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t^2} dt
 \end{aligned}$$

alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\sin^2(\frac{1}{2})}{t^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t^2} dt$$

comme $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t^2} dt$ converge, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

D'autre part, pour tout $t \in [1, +\infty[$

$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{|\sin t|^2}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t}.$$

Or, par une intégration par partie

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt = \frac{\sin 2}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt.$$

ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ est convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} dt$ est une intégrale de Riemann diver-

gente, d'où la divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

5.5 Théorème (critère de Cauchy)

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$),
 l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in [a, b[, \forall x, y \in [\alpha, b[; \left| \int_x^y f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Démonstration.

Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge, et posons $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, alors

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = l,$$

$$\exists \alpha \in [a, b[, \forall x \in [\alpha, b[; |F(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour tout $x, y \in [\alpha, b[$

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y f(t) dt \right| &= |F(y) - l + l - F(x)| \\ &\leq |F(y) - l| + |l - F(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Pour l'implication inverse (Exercice à faire)

□

5.6 Théorème (critère d'Abel)

Soient f et g deux fonctions définies localement intégrables sur $[a, b[$ telles que

1) f décroissante sur $[a, b[$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$.

2) $\exists M > 0$ tel que $\forall x, y \in [a, b[$ on ait $\left| \int_x^y g(t) dt \right| \leq M$.

Alors $\int_a^b f(t)g(t) dt$ converge.

Démonstration.

Soit $G : [\alpha, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

D'après le critère de Cauchy, afin de montrer que l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t) dt$ converge, il suffit de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in [\alpha, b[, \forall x, y \in [\alpha, b[, \left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Soient $x, y \in [\alpha, b[$, une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int_x^y f(t)g(t) dt &= [f(t)G(t)]_x^y - \int_x^y f'(t)G(t) dt \\ &= f(y)G(y) - f(x)G(x) - \int_x^y f'(t)G(t) dt. \end{aligned}$$

ainsi

$$\left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq |f(x)||G(x)| + |f(y)||G(y)| + \int_x^y |f'(t)||G(t)| dt.$$

On a

$$\left| \int_x^y g(t) dt \right| \leq M, \forall x, y \in [\alpha, b[$$

alors

$$|G(t)| = \left| \int_a^t g(u) du \right| \leq M,$$

en déduit que

$$\left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq M \left(|f(x)| + |f(y)| + \int_x^y |f'(t)| dt \right),$$

comme f est décroissante et $\lim_{t \rightarrow b} f(t) = 0$, alors f est positive, $f'(t) \leq 0$, donc

$$\forall t \in [x, y], |f'(t)| = -f'(t)$$

Alors

$$\left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq M(f(x) + f(y) - f(y) + f(x)) = 2Mf(x).$$

ainsi $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$, donc

$$\exists \alpha \in [a, b], \forall x \in [\alpha, b], f(x) < \frac{\varepsilon}{2M},$$

puis

$$\forall x, y \in [a, b], \left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

$\int_a^b f(t)g(t) dt$ converge.

□

Exemple 5.10.

Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Si $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge car pour tout $t \in [1, +\infty[$

$$\left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

2) Si $0 < \alpha \leq 1$, les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ et $g : t \mapsto \sin(t)$ sont continue sur $[1, +\infty[$

et donc localement intégrable, et pour tout $x, y \in [1; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y g(t) dt \right| &= \left| \int_x^y \sin t dt \right| \\ &= |\cos(x) - \cos(y)| \\ &\leq |\cos(x)| + |\cos(y)| \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

D'après le critère d'Abel $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ est convergente.

5.3 Fonctions définies par une intégrale

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère un intervalle semi-ouvert $J = [a, b[$ telle que $-\infty < a < b \leq +\infty$, et une fonction de deux variables

$$\begin{aligned} f : I \times J \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto f(x, t). \end{aligned}$$

On suppose que $\lim_{x \rightarrow b} f(x, t) = \infty$, ainsi l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est une intégrale généralisée dépendant du paramètre x . Donc le premier problème posé est celui de la convergence d'une famille d'intégrales généralisées : on est amené à déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquels $\int_a^b f(x, t) dt$ converge, dit ensemble de définition de la fonction

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

Si pour tout $x \in J$, $\int_a^b f(x, t) dt$ converge, on dit que F est une fonction définie par une intégrale généralisée. Le but de cette partie est l'étude de la continuité et de la dérivabilité de cette fonction.

5.3.1 Propriétés d'une fonction définie par une intégrale généralisée

5.7 Théorème (de continuité)

Soit $f : I \times [a, b[\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), une fonction continue.

On suppose qu'il existe une fonction $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- 1) L'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ converge.
- 2) $\forall (x, t) \in I \times [a, b[, |f(x, t)| \leq g(t)$.

Alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur I , et pour tout $x_0 \in I$ on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) dt = \int_a^b f(x_0, t) dt.$$

5.8 Théorème (de dérivation)

Soit $f : I \times [a, b[\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), une fonction continue.

On suppose que la dérivée partielle de f par rapport à x existe et que

$\frac{\partial f}{\partial x} : I \times [a, b[\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On suppose qu'il existe des fonctions

$g, h : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que

- 1) Les intégrales généralisées $\int_a^b g(t) dt$ et $\int_a^b h(t) dt$ convergent.
- 2) $\forall (x, t) \in I \times [a, b[, |f(x, t)| \leq g(t)$.
- 3) $\forall (x, t) \in I \times [a, b[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq h(t)$.

Alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur I , et on a

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

5.4 Applications

5.4.1 Fonction Gamma d'Euler

On appelle fonction Γ d'Euler l'application

$$\begin{aligned}\Gamma :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.\end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge pour tout x strictement positif, en effet

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente car pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t^2 t^{x-1} e^{-t} = 0$.

pour tout $x \in]0, 1[$

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$ est convergente car $1-x < 1$, d'où la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

5.1 Propriété

Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$,

- 1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En particulier $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.
- 2) $\Gamma(x+n+1) = x(x+1) \cdots (x+n-1)\Gamma(x)$.
- 3) $\Gamma(n) = n!$.
- 4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

$$3) \quad \beta(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} \, du.$$

$$4) \quad \text{Si } p \notin \mathbb{Z}, \beta(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

$$5) \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2(2n)!} \sqrt{\pi}.$$

$$6) \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^n t^{x-1} dt.$$

$$7) \quad \Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} (1 + \varepsilon(x)) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0 \text{ (Formule de Stirling)}$$

5.4.2 Fonction Bêta d'Euler

La fonction bêta d'Euler est définie par

$$\beta(p, q) = \int_0^{\frac{1}{2}} u^{p-1} (1-u)^{q-1} du + \int_{\frac{1}{2}}^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du.$$

où p et q sont des réels strictement positifs.

Au voisinage de 0,

$$u^{p-1} (1-u)^{q-1} \sim \frac{1}{u^{p-1}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{p-1} (1-u)^{q-1} du \text{ converge pour } p > 0.$$

Au voisinage de 1,

$$u^{p-1} (1-u)^{q-1} \sim \frac{1}{(1-u)^{q-1}},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du \text{ converge pour } q > 0.$$

Ainsi $\beta(p, q)$ converge si $p > 0$ et $q > 0$.

5.2 Propriété

Pour tout $p, q > 0$

$$1) \quad \beta(p, q) = \beta(q, p).$$

$$2) \quad \beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

