CHAPITRE 4

LES SÉRIES DE FOURIER

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente la théorie des séries de Fourier, on commence par donner la notion de séries trigonométriques, puis les séries de Fourier des fonctions paires ou impaires données dans divers formes d'intervalles ainsi que les règles de convergences, la formule de parseval et quelques applications.

Objectifs du chapitre

- Voir et comprendre comment une fonction périodique peut se décomposer en somme de fonctions sinusoïdales que l'on calculera.
- Établir un développement en série de Fourier, rechercher la somme de certaines séries numériques et les solutions d'équations différentielles partielles.

4.2 Séries trigonométriques

4.1 Définition

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue (resp. de classe C^k) par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ et des fonctions f_i continues (resp. de classe C^k) sur $[a_i, a_{i+1}]$ telles que f soit égale à f_i sur l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$, pour $i = 1, \cdots, n$.

4.1 Proposition

Si les séries numériques $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergent absolument, alors la série trigonométrique (4.1) converge normalement sur $\mathbb{R}$. En outre, sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4.2.

Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos nx}{n^2}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin nx}{n^2}$, convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

Série trigonométrique associée à une série entière

Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Posons

$$z = re^{ix} = r(\cos x + i\sin x), \quad 0 < r < R, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a $z^n = r^n e^{inx} = r^n(\cos(nx) + i\sin(nx))$ et

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n(\cos(nx) + i\sin(nx)).$$

Cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$ en vertu du critère de Weierstrass puisque $|a_n r^n(\cos(nx) + i\sin(nx))| \leqslant |a_n|r^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|r^n$ converge car d'après le critère de Cauchy, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|r^n} = r\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{R} < 1.$$

Si la fonction f est à valeurs réelles, a_n et b_n sont nécessairement réels. On a

$$\mathrm{Re}f(re^{inx}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \cos(nx), \qquad \mathrm{Im}f(re^{inx}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \sin(nx)$$

4.3 Série de Fourier

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et localement intégrable.

4.4 Définition (Série de Fourier sur $[0, 2\pi]$)

On appelle série de Fourier de f, la série trigonométrique définie par

$$\frac{a_0}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

Les coefficients a_n et b_n sont appelés coefficients de Fourier de la fonction f.

Supposons que la série trigonométrique converge en x dans D et posons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right). \tag{4.2}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (4.2) par $\cos(px)$, et en intégrant sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, on trouve

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(px)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(nx)dx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(nx)dx$$

en utilisant les relations suivantes

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & p \neq n, \\ \pi, & p = n, \end{cases}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(nx)dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

on trouve que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(px)dx = \pi a_p.$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)dx, \quad p > 0.$$

suivant les même étapes, en remplacant $\cos(px)$ par $\sin(px)$, moyennant

$$\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0, & p \neq n \\ \pi, & p = n \end{cases}$$

on trouve que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(px)dx = \pi b_p,$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Remarque 4.2.

1. *Si la fonction f n'est pas donnée explicitement sur $[0, 2\pi]$, mais sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, dans ce cas le calcul des coefficients de Fourier de f s'effectue sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$,*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \ \ n \in \mathbb{N},$$

2. *Si la fonction f est paire, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ et $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. *Si la fonction f est impaire, $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$..*

Exemple 4.3.

Soit f une fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \\ 0, & x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[, \end{cases}$$

suivant les même étapes, en remplacant $\cos(px)$ par $\sin(px)$, moyennant

$$\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0, & p \neq n \\ \pi, & p = n \end{cases}$$

on trouve que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(px)dx = \pi b_p,$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Remarque 4.2.

1. *Si la fonction f n'est pas donnée explicitement sur $[0, 2\pi]$, mais sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, dans ce cas le calcul des coefficients de Fourier de f s'effectue sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$,*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \;\; n \in \mathbb{N},$$

2. *Si la fonction f est paire, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ et $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. *Si la fonction f est impaire, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$..*

Exemple 4.3.

Soit f une fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \\ 0, & x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[, \end{cases}$$

La fonction étant paire, ses coefficients de Fourier sont donnés par

$$b_n = 0, \quad a_0 = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

La série de Fourier associée à la fonction f est

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos(nx).$$

Remarque 4.3.

Si l'intervalle d'intégration est $[\theta, \theta+\pi]$ alors les coefficients de Fourier de la fonction f, s'écrit

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+\pi} f(x)\sin(nx)dx, \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

4.3.1 Série de Fourier d'une fonction périodique de période $2L$

Soit f une fonction $2L$-périodique. Pour la développer en série de Fourier sur l'intervalle $[-L, L]$ faisons le changement de variable $x = \frac{Lt}{\pi}$. La fonction $g(t) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right)$ sera une fonction 2π-périodique, sont développement en série de Fourier est

$$g(t) = f\left(\frac{L}{\pi t}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right),$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi t}\right)\cos\left(n\frac{Lt}{\pi}\right)dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lt}{\pi}\right)\sin(nt)\,dt,$$

en utilisant le changement de variable $x = \frac{L}{\pi t}$, alors $t = \frac{\pi}{L}x$ et $dt = \frac{\pi}{L}dx$, pour tout n de $\mathbb{N}$ on trouve

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dt,$$

La série de Fourier associée à f est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right).$$

Exemple 4.4. *Développons en séries de Fourier la fonction 2-périodique f définie par $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1,1]$.*

Comme cette fonction est paire, on a $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x\,dx = 1,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx$$

alors

$$\begin{cases} a_{2n} = 0, \\ a_{2n+1} = \dfrac{-4}{\pi^2(2n+1)^2}, \end{cases}$$

en déduit que La série de Fourier associée à f est

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}.$$

Deux questions se posent, la série de Fourier associée à f est-elle convergente? En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?

4.1 Théorème (de Dirichlet)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet),

1) *En tout point x_0 les limites de f à droite et à gauche de x_0 existent et*

les discontinuité de f sont en nombre fini dans tout intervalle fini.

2) *f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$
$$=\begin{cases} f(x), & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & \text{si } f \text{ est discontinue en } x, \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

$f(x^+)$ et $f(x^-)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.

4.3.2 Série de Fourier d'une fonction non périodique

Soit f une fonction non périodique définie sur $[a,b]$. On définit la série de Fourier associer à f on le prolongent à une fonction g périodique de période $T=b-a$, telle que $g(x)=f(x),\ \ x\in]a,b[$.

Alors la série de Fourier de f s'écrit

$$a_0+\sum_{n\geqslant 1}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right)$$

avec

$$a_n=\frac{2}{T}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x,\qquad b_n=\frac{2}{T}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x,\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

4.3.3 Égalité de Parseval

4.2 Théorème

Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, alors on a

$$\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (f(x))^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Remarque 4.4. *Si f est de période 2π, alors*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

4.4 Applications des séries de Fourier

4.4.1 Calcul de somme

L'application du théoème de Dirichlet et l'égalité de Parseval, présentés précédemment, permet de calculer quelques sommes de série numériques, par exemple :

⋆ La formule de"*bale*" qu'il a démontré "*Euler*".

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \sum \frac{1}{n^2},$$
$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2},$$
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

⋆ La formule de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$
$$\frac{\pi-1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(x)}{n}\right)^2.$$

Exemple 4.5.

Soit f une fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in]0, \pi[\\ -1, & x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

comme f est une fonction paire alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = 0$, et ona

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

La fonction f est de classe C^1 par morceaux et 2π-périodique, alors d'après le Théorème de Dirichlet, on a en particulier en tout point x où f est continue

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1, & x \in]0, \pi[\\ 0, & x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases}$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

il en résulte que

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4},$$

par l'égalité de Parseval, on trouve

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *est une série convergente, en séparant les termes d'ordre paire et impaire on trouve*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}, \tag{4.3}$$

mais
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{S}{4},$$
en remplacant dans (4.3) *on trouve*
$$S=\frac{S}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$
alors
$$\frac{3S}{4}=\sum\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$
ainsi
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

4.4.2 Résolution d'équation différentielles

Comme les séries entière, les séries de Fourier peut être utiliser pour chercher des solutions pour quelques équations aux dérivées partielles. La méthode de séparation des variables pour les équations aux dérivées partielles repose sur la recherche de solution sous forme d'un produit de fonctions d'une seul variable. Lorsqu'on applique cette méthode, on trouve que ces fonctions sont solutions d'équations différentielles ordinaires.

Considérons le problème des Cordes vibrantes suivant
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & x\in]0,1[,\ t>0,\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ t>0,\\ u(x,0)=f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x), & x\in]0,1[.\end{cases}$$
On cherche des solutions sous la forme $X(x)T(t)$ vérifiant les conditions aux initiales et les conditions aux limites du problème.

En utilisant le principe de superposition on trouve
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x)\left(a_n\cos(n\pi t)+b_n\sin(n\pi t)\right),$$

on obtient les coefficients a_n et b_n en moyennant les séries de Fourier.
On peut aussi trouver des solutions pour les problème de la chaleur et des ondes en utilisant les série de Fourier.

Exemple 4.6.
On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad x \in]0, 2\pi[, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(2\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = 2\sin\dfrac{3x}{2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial_t} = 3\sin\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

en utilisant la méthode de séparation des variables, on trouve

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{nx}{2}\left(a_n\cos\frac{nt}{2} + b_n\sin\frac{nt}{2}\right).$$

comme $u(x,0) = 2\sin\dfrac{3x}{2}$,

$$2\sin\frac{3x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{nx}{2}$$

rappelons que

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{nx}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 2, & n = 3 \\ 0, & n \neq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

D'autre part, la dérivée de la solution u par rapport à t, donne

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{nx}{2}\left(-\frac{na_n}{2}\sin\frac{nt}{2} + \frac{nb_n}{2}\cos\frac{nr}{2}\right)$$

comme $u(x,0) = 3\sin\frac{x}{2}$, *en déduit que*

$$3\sin\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n}{2} \sin\frac{nx}{2}$$

ainsi

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} 3\sin\frac{x}{2} \sin\frac{nx}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

en remplacant a_n *et* b_n *dans la formule de* u, *on obtient la solution du problème*

$$u(x,t) = 3\sin\frac{x}{2}\sin\frac{t}{2} + 3\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{3t}{2}.$$