Fiche de TD 1

Solution de L'exercice 1:

I) En utilisant la table de vérité

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \Longleftrightarrow \overline{\overline{p}}$
V	F	V	V
F	V	F	V

De la même manière, on prouve (2) et (3) :

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$(\overline{p \wedge q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$(\overline{p \vee q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

on prouve (4) comme suit:

La définition mathématique est la suivante : L'assertion $(\overline{p} \vee q)$ est notée $(p \Longrightarrow q)$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Longrightarrow q$	$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Solution de L'exercice 2:

1· $\cos\frac{\pi}{2}$ est positif et $\ln e = 1$ est une assertion vraie car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ et $\ln e = 1$

$$[(V \wedge V) \Longleftrightarrow V]$$

2· Pour tout $x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = \sin x$ ou $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ est une assertion vraie car $\sin(-x) = -\sin x$ fonction impaire (Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sin(-x) = \sin x$ fausse, la fonction sin est impaire), $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ est toujours vraie pour $x \in \mathbb{R}$

$$[(F \vee V) \Longleftrightarrow V]$$

3· $\sin(-\pi) = \sin\pi \Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{\pi}\right) > 0$ est une assertion fausse car $(\sin(-\pi) = \sin\pi = 0)$ est vraie par contre $\ln\left(\frac{1}{\pi}\right)$ est négative

$$[(V \Longrightarrow F) \Longleftrightarrow F]$$

4· $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad x^2 > 0$ est une assertion fausse car $\exists\, x = 0,\ x^2 = 0^2 = 0 > 0$ est fausse
5· $\exists\, x \in \mathbb{N},\quad x^2 \leq 0$ est une assertion vraie car $\exists\, x = 0,\ x^2 = 0^2 = 0 \leq 0$
6· $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\quad x + y + 1 = 0$ est une assertion vraie
pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut prendre $y = -x - 1$ (existe) . On a $x + y + 1 = x - x - 1 + 1 = 0$

Solution de L'exercice 3:

1)Raisonnement direct

Soient $x, y \in \mathbb{R}$
On suppose $xy^2 - yx^2 = y - x$ et on montre $x = y$ ou $xy = 1$.

$$\begin{aligned} xy^2 - yx^2 = y - x &\Longrightarrow xy^2 - yx^2 - y + x = 0 \\ &\Longrightarrow xy(y - x) - y + x = 0 \\ &\Longrightarrow xy(y - x) - (y - x) = 0 \\ &\Longrightarrow (y - x)(xy - 1) = 0 \\ &\Longrightarrow y - x = 0 \ ou \ xy - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow x = y \ ou \ xy = 1 \end{aligned}$$

Donc $xy^2 - yx^2 = y - x \Longrightarrow x = y \ ou \ xy = 1$
2) Raisonnement par contraposition
Soient $x, y \in \mathbb{R}$
Le raisonnement par contraposition est basé sur léquivalence suivante. $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$
Alors : $[x \neq y \Longrightarrow (x-1)(y+1) \neq (x+1)(y-1)] \Leftrightarrow [(x-1)(y+1) = (x+1)(y-1) \Longrightarrow x = y]$

On suppose $(x-1)(y+1)=(x+1)(y-1)$ et on montre $x=y$.

$$\begin{aligned}(x-1)(y+1)=(x+1)(y-1) &\Longrightarrow xy+x-y-1=xy-x+y-1\\ &\Longrightarrow x-y=-x+y\\ &\Longrightarrow 2x=2y\\ &\Longrightarrow x=y\end{aligned}$$

Donc $x\neq y \Longrightarrow (x-1)(y+1)\neq(x+1)(y-1)$
3) Raisonnement par contre-exemple
3.1. Montrons que l'implication est fausse
Si $x=-10\in\mathbb{Z}$

$$-10<9\Longrightarrow 100<81 \text{ est une proposition fausse}$$

car

$$(V\Longrightarrow F)\Longleftrightarrow F$$

3.2. $\forall\, a,b\in\mathbb{R}\quad \sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse car.

Sa négation $\exists\, a,b\in\mathbb{R}\quad \sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$ est vraie

$\exists\, a=3$ et $b=4$

$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5\neq 3+4.$
4) Raisonnement par récurrence
Montrons que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists k\in\mathbb{N}: 3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}=17k$$

On raisonne par récurrence. Pour $n=1$, On a

$$3\times 5^{2-1}+2^{3-2}=17=17\times 1$$

Donc

$$\exists k=1\in\mathbb{N}: 3\times 5^{2-1}+2^{3-2}=17k$$

On suppose que

$$\exists k\in\mathbb{N}: 3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}=17k$$

et montrons que

$$\exists k'\in\mathbb{N}: 3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}=17k'$$

On a

$$\begin{aligned}3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1} &= 3\times 25\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}\times 8\\ &= 8\left(3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}\right)+17\times 3\times 5^{2n-1}\\ &= 8\times 17k+17\times k''\\ &= 17k' \text{ avec } k'=(8k+k'')\end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 .

5) Raisonnement par l'absurde

Soit R une assertion on suppose que R est fausse ($\bar{R}$ est vraie) et on cherche une contradiction. c'est a dire R est vraie.

5.1. Montons que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \dfrac{x^2}{2}$

On suppose $\exists x \in \mathbb{R}^* \quad \sqrt{1+x^2} = 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} &\Longleftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow 1 + x^2 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{4} \\ &\Longleftrightarrow x^4 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \quad \textit{contradiction} \end{aligned}$$

5.2 On sait que ($\bar{p}$ *ou* q) est appelée implication logique et on la note $p \Longrightarrow q$ donc la négation de $p \Longrightarrow q$ elle est (p *et* $\bar{q}$).

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $a = b$ et $\dfrac{a}{1+b} \neq \dfrac{b}{1+a}$

$$\begin{aligned} &donc\ a = b\ et\ a(1+a) \neq b(1+b) \\ &donc\ a = b\ et\ a - b + a^2 - b^2 \neq 0 \\ &donc\ a = b\ et\ (a-b)(1+a+b) \neq 0 \end{aligned}$$

est une contradiction car $a = b \Longrightarrow (a-b) = 0 \Longrightarrow (a-b)(1+a+b) = 0$.

Conclusion : Si $a = b$ alors $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$