3.2 Séries entières réels

3.1 Définition

On appelle *série entière* toute série de fonctions dont le terme général est de la forme $u_n(x) = a_n x^n$, où $(a_n)_n$ désigne une suite réelle ou complexe et $x \in \mathbb{R}$.

Comme pour les séries de fonctions, on cherche l'ensemble :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}; \sum_n a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

qu'on appelle *domaine de convergence de la série entière*.

Exemple 3.1.

- 1- Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et appliquons le critère de d'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$

La série entière est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $D = \mathbb{R}$.

- 2- Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} x \right| = |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Pour le cas où $|x| = 1$, on a $|u_n(x)| = \frac{1}{n^2}$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente sur $[-1, 1]$, alors $D = [-1, 1]$.

- 3- $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ converge si et seulement si $x = 0$ car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |(n+1)x|.$$

donc $D = \{0\}$.

- 4- Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Pour le cas où $|x| = 1$,

★ si $x = 1$, $u_n(1) = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est la série harmonique, elle est divergente,

★ si $x = -1$, $u_n(-1) = \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente.

Alors $D = [-1, 1]$.

3.1 Lemme (Lemme d'Abel)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

1- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.

2- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est normalement convergente pour $|x| < r$ pour tout $0 < r < |x_0|$.

Démonstration.

Comme $(a_n x_0^n)_n$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n x_0^n| \leq M.$$

1- Pour tout x de $] -|x_0|, |x_0| [$

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

comme $|x| < |x_0|$ alors $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, la série géométrique $\sum \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ est convergente, donc $\sum |a_n x^n|$ converge pour tout x de $] -|x_0|, |x_0| [$ et donc $\sum a_n x^n$ est absolument convergente sur $] -|x_0|, |x_0| [$.

2- Soient $0 < r < |x_0|$ et $|x| < r$

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{r}{x_0} \right|^n.$$

Comme $\sum \left| M \frac{r}{x_0} \right|^n$ est une série numérique convergente, la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est normalement convergente pour tout $|x| < r$ avec $0 < r < |x_0|$

3.2.1 Rayon de convergence d'une série entière

Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple.

3.1 Théorème

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière, alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que

- 1- $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge absolument sur $] -R, R[$.
- 2- $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.

Démonstration.

Soit $I = \{r \in \mathbb{R}^+; \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \text{ converge}\}$. $I \neq \emptyset$ car $0 \in I$.

On distinguera trois cas : $I = \{0\}$, $I = \mathbb{R}^+$ et $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^+$

1- $I = \{0\}$. On pose $R = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ alors $|x| > 0$ et par suite $x \notin I$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n x^n|$ diverge.

2- $I = \mathbb{R}^+$. On pose $R = +\infty$. Prouvons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La série converge $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n$ pour tout $r > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $r > 0$ tel que $|x| < r$. Ceci implique $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ et d'après le critère de comparaison la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge absolument.

3- $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^+$, $I \neq \{0\}$ et $I \neq \mathbb{R}^+$

a) I est majoré. En effet, soit $r \in \mathbb{R}^* \setminus I$ et supposons que r n'est pas un majorant de I . Il existe alors $r_1 \in I$ tel que $r < r_1$. D'après la définition de I , la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n r_1^n$ est convergente ainsi que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n r^n$ (car $|a_n| r^n < |a_n| r_1^n$) et donc $r \in I$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $r \in \mathbb{R}^* \setminus I$. I est alors un ensemble non vide et majoré donc admet une borne supérieure $R = \sup_{r \in I} r$.

Pour conclure, on doit prouver que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge absolument pour tout x , $|x| < R$ et diverge pour tout x , $|x| > R$.

- b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$. Il existe $\rho \in I$ tel que $|x| < \rho < R$. Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \rho^n$ converge, $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| |x|^n$ converge en vertu du théorème de comparaison. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est alors absolument convergente.
- c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| > R$. Ceci implique que $|x| \notin I$ et donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n x^n|$ diverge.

Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ diverge. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_1^n$ est absolument convergente pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, vérifiant $R < |x_1| < |x|$ et donc $|x_1| \in I$. On a alors nécessairement $|x_1| \leq R = \sup_{r \in I} r$ et ceci est en contradiction avec l'hypothèse $R < |x_1| < |x|$.

□

3.2 Définition

Le nombre $R = \sup \{|x|; x \in D\}$ tel que $0 \leq R \leq +\infty$ est appelé rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.

Remarque 3.1.

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est caractérisé par

- 1- $|x| < R$ alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est absolument convergente.
- 2- $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.
- 3- $|x| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.
- 4- Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r < R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est normalement (donc absolument et uniformément) convergente sur $[-r, r]$.

3.2.2 Détermination du rayon de convergence

3.1 Proposition (Règle d'Hadamard)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière. Le rayon de convergence R est donné par la relation

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \end{cases}$$

où $\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Démonstration.

On remarque que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

On obtient le résultat demandé en utilisant le critère de Cauchy pour la convergence des séries numériques. $\square$

3.2 Proposition (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière $a_n \neq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ où R est son rayon de convergence, alors

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Démonstration.

Posons $u_n = a_n x^n$, alors $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|$, on pose $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

* Si $l = 0$, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty$.

* Si $l = +\infty$, $R = 0$.

* Si $l = +\infty$, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{|x|}{l}$.

$\square$

Exemple 3.2.

1- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On a $a_n(x) = \frac{1}{n!}$, en utilisant le critère de d'Alembert,

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty.$$

Le rayon de convergence est $R = +\infty$, la série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = 1,$$

le rayon de convergence est $R = 1$. La série est absolument convergente si $|x| < 1$, et divergente si $|x| > 1$.

3- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$. Le critère de Cauchy donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

le rayon de convergence est $R = 2$. La série est absolument convergente si $|x| < 2$, et divergente si $|x| > 2$.

Remarque 3.2. Soient φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, afin de déterminer la nature de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\varphi(n)}$, on calcule la limite suivante

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x^{\varphi(n+1) - \varphi(n)}|.$$

ensuite, on cherche le domaine de x où $l < 1$, R est donc égale au $\sup \{l \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}\}$.

Exemple 3.3.

Trouvons le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^{2n+5}$. Dans ce cas $\varphi(n) = 2n+5$, on a

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{3^{n+1} x^{2n+7}}{3^n x^{2n+5}} \right| = 3|x|^2.$$

la série converge si $3|x|^2 < 1$ donc $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$, en déduit que le rayon de convergence est $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et divergente si $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.3 Opérations sur les séries entières

3.3.1 Somme de deux séries entières

3.3 Définition

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ deux séries entières, R et R' sont leurs rayons de convergence respectivement. Alors la somme des deux séries est $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n$ de rayon de convergence R' .

3.2 Théorème

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ deux séries entières, R et R' sont leurs rayons de convergence respectivement.

1. Si $R \neq R'$ alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n$ est $R' = \min(R, R')$.
2. Si $R = R'$ alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n$ est $R' \geq R$.

Démonstration.

1. Supposons que $R' < R$

- a) Si $R' > |x|$ alors $R > |x|$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ sont absolument convergentes.

Comme

$$|(a_n + b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|$$

donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n)x^n$ converge absolument pour tout $|x| < R' = \min(R, R')$.

- b) Pour $R' < |x|$ on disting deux cas

- * Si $R' < |x| < R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge absolument et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ diverge, donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n)x^n$ diverge.

* Si $R' < R < |x|$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ divergent, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n$ diverge.

Raisonnons par l'absurde, $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n$ converge, d'après le lemme d'Abel la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n$ converge pour tout x_0 de $\mathbb{R}$, tel que $|x_0| < |x|$ et en particulier pour x_0 vérifiant $R' < |x_0| < R < |x|$. D'où la contradiction.

2. Si $R = R'$, c'est claire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n$ converge absolument si $|x| < R = R'$. De plus $R = R' \leq R$.

□

Exemple 3.4.

Soient $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$. Les deux séries ont pour rayon de convergence $R = 1$, mais la série somme $(S+T)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n$, a pour rayon de convergence $R' = 2$.

3.3.2 Produit de deux séries entières

3.3 Théorème

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ deux séries entières, R et R' sont leurs rayon de convergence respectivement. Alors le produit des deux séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ est une série définie comme suit

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

de rayon de convergence $R' \geq \min(R, R')$.

3.4 Propriétés analytiques des séries entières

Cette section étudie les propriétés de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité de la fonction somme des séries entières.

3.4 Théorème (Continuité d'une série entière)

Soit la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence R tel que $R \neq 0$, alors $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est continue sur $] -R, R[$.

Démonstration.

Soit $0 < r < R$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $u_n(x) = a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$ et puisque la convergence est normale donc uniforme sur $[-r, r]$, S est continue dans $[-r, r]$ pour tout r , $0 < r < R$ donc continue sur $] -R, R[$. $\square$

3.5 Théorème (Dérivée d'une série entière)

Soit la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence R tel que $R \neq 0$, alors la fonction $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est dérivable sur $] -R, R[$ et on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration.

Soient les fonctions $S_n :] -R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$,

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x)$ pour tout $x \in] -R, R[$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ convergence simplement sur $] -R, R[$.
- 2) Chaque fonction f_n est dérivable et on a $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$.
- 3) Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ est R car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}.$$

La suite $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $[-r, r]$, d'après le théorème de dérivation S est dérivable et on a

$$S'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in]r, r], \quad \forall r \in]0, R[.$$

Donc

$$S'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in]-R, R[.$$

□

3.6 Théorème

Soit la série $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence R alors $f \in C^\infty(]-R, R[)$ et on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Démonstration.

En effet, si $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ par application du théorème précédent on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

et par récurrence, la dérivée d'ordre k est donnée par

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

De cette expression, il résulte que $f^{(k)}(0) = a^k k!$, c'est-à-dire que $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. □

3.7 Théorème (Primitive d'une série entière)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $S :]-R, R[\rightarrow$

$\mathbb{R}$ la fonction définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On considère $F :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ la

fonction définie par $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. Alors $F'(x) = S(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Démonstration.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est R car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (n+1)}{n+2} \frac{1}{a_n} \right| =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$. D'après le théorème d'intégration on conclut que $F' = S$. □

Remarque 3.3.

Si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $x \in]-R, R[$, alors

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n,$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

3.5 Développement en série entière

3.4 Définition

Une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 sur $] -a, a[$ au a est un réel strictement positif, s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq a$.

3.3 Proposition

Si f est égale à la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur $] -a, a[$ alors f est de classe C^∞ sur $] -a, a[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n n!$.

Démonstration. Le premier point découle directement des propriétés des séries entières. Quand au deuxième,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots,$$

alors

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})^{(n)} + (a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots)^{(n)}, \\ &= 0 + (a_n n! + (n+1)n \dots 2 a_{n+1} x + \dots), \end{aligned}$$

ainsi $f^{(n)}(0) = a_n n!$. □

$$\forall x \in]-a, a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

3.8 Théorème

Soit une fonction de classe C^∞ sur $[-a, a]$. Supposons qu'il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a, a], |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est uniformément convergente sur $[-a, a]$ et on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ pour tout } x \in [-a, a].$$

Démonstration.

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [-a, a]$ on a $f^{(k)}(x) \leq M$.

Le développement de Taylor de f au voisinage de 0 à l'ordre n donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$.

En effet

$$x \in [-a, a] \Rightarrow |x| < r \Rightarrow |\theta x| < r \Rightarrow |f^{(n+1)}(\theta x)| \leq M.$$

$$\text{et donc } \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left| \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \right|.$$

Or la série de terme général $u_n = \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r}{n+1} = 0,$$

et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$ ce qui donne $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. $\square$

Exemple 3.5. 1- *La fonction exponentielle*

Cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on a $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = e^x$, pour tout $a \in [0, +\infty[$,

$$\sup_{x \in [-a, a]} |f^{(n)}(x)| \leq e^a$$

alors

$$\forall x \in [-a, a], \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

et comme a est quelconque alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2- On peut aussi établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + \exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3- Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$, et soit $a \in]0, 1[$.
 f est de classe C^∞ sur $[-a, a]$, et on a

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{(1-x)^{n+1}},$$

ainsi

$$\sup_{x \in [-a, a]} |f^{(n)}(x)| = \frac{1}{(1-a)^n}$$

mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-a)^n} = +\infty,$$

les dérivées de f ne sont pas uniformément bornées sur $[-a, a]$. Cependant on peut développer cette fonction car cette condition est suffisante mais non nécessaire. Pour cela, on développe $f'(x)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall x \in [-a, a].$$

alors

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad \forall x \in [-a, a],$$

en déduit alors que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}, \quad \forall x \in [-a, a].$$

Remarque 3.4.

1. On obtient le développement des fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ à partir du développement de la fonction e^x .
2. On obtient le développement de $\frac{1}{1-x}$ en calculant la somme de la série géométrique $\sum x^n$, et pour obtenir le développement de de la fonction $\frac{1}{1+x}$ en remplace x par $(-x)$.
3. On obtient le développement de $\ln(1+x)$ à partir du développement de $\frac{1}{1+x}$ car $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$.
4. Le développement $\arctan(1+x)$ on l'obtient à partir du développement de $\frac{1}{1+x^2}$ car $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

3.6 Quelques applications des séries entières

3.6.1 Déterminer la somme d'une série entière

Pour exprimer la somme d'une série entière à l'aide des fonctions classiques, on se ramène toujours aux développements en série entière usuels. Pour cela, on peut utiliser plusieurs astuces :

1. Pour une série entière du type $\sum \frac{p(x)}{n!} x^n$, on exprime $p(x)$ dans la base X , $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$, ... afin de se ramener à la série de l'exponentielle.
2. Pour une série entière du type $\sum_{n=0}^{+\infty} F(n)x^n$ où F est une fraction rationnelle, on décompose F en éléments simples.

3. S'il y a des multiples de n ou $\frac{1}{x+1}$ par rapport aux séries classiques, on pense à intégrer ou à dériver

Exemple 3.6.

Calculons la somme de la série entière $\sum \frac{n^3}{n!} x^n$

Posons $a_n = \frac{n^3}{n!}$. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)^3}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de cette série est égal à $+\infty$,

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

La dérivée de e^x est e^x ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^n = x^3 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^{n-3} = x^3 e^x,$$

de la même manière, on trouve que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n = x^2 e^x,$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n = x e^x,$$

alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n = (x^3 + 3x^2 + x) e^x,$$

il résulte que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e^x.$$

Exemple 3.7.

Calculons la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Posons $u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2$, si $|x| < 1$ la série converge, et si $|x| > 1$ la série diverge, donc $R = 1$.

Pour $x \in]-1, 1[$, on note $S(x)$ la somme de la série entière. Donc S est dérivable sur $] - 1, 1[$ et on a

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$$

en intégrant par rapport à x sur $] - 1, 1[$, on trouve

$$xS(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

donc

$$S(x) = \frac{1}{2x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Exemple 3.8.

Calculons la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1}$

En utilisant la règle de d'Alembert on trouve que $R = 1$, d'autre part

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ et $g(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n-1}$.

D'après l'exemple précédent, pour $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{2x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

pour la somme g ,

$$\begin{aligned} g(x) &= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2 x^{2(n-1)}}{2(n-1)+1} \\ &= -1 + x^2 \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1} \\ &= -1 + x^2 f(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1} &= \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2} f(x) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x^2 - 1}{4x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

3.6.2 Résoudre une équation différentielle à l'aide des séries entières

Pour résoudre une équation différentielle à l'aide des séries entières :

1. On commence par supposer qu'il existe une solution $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, développable en série entière.
2. On introduit cette solution dans l'équation, en dérivant terme à terme pour exprimer $f'(x)$.
3. Par des changements d'indice, on se ramène à une écriture du type $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$, où la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'écrit en fonction de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Par unicité des coefficients d'une série entière, on sait que $b_n = 0$.
5. Cela doit permettre de trouver la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de certains paramètres.
6. Réciproquement, on vérifie que la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ a un rayon de convergence non nul et qu'elle est solution de l'équation différentielle.

Exemple 3.9. *Considérons l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$, et cherchons une solution unique telle que $y(0) = y'(0) = 0$.*

Soit $R > 0$, le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Posons

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

pour tout x de $]-R, R[$, on a

$$xf'(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n,$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

en remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve que

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

telle que

$$b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n$$

mais

$$f' + xf' + f = 1$$

de l'unicité du développement en série entière, pour tout $n \geq 1$, on a $b_0 = 1$, $b_n = 0$

il résulte que

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_0), \quad a_{n+2} = \frac{-a_n}{x_{n+2}},$$

pour tout $n \geq 1$.

3.6.3 Démontrer qu'une fonction est de classe C^∞

Pour démontrer qu'une fonction est de classe C^∞ au voisinage de 0, il suffit de démontrer qu'elle est développable en série entière en 0.

Exemple 3.10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

pour $x \neq 0$, en utilisant le développement en série entière de la fonction $\sin$, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

On remarque que $f(0) = 1$.

f admet un développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$ alors f est de classe C^∞ .