CHAPITRE 1

SÉRIES NUMÉRIQUES

1.1 Introduction

Le procédé qui consiste à additionner infiniment de quantités différentes à partir d'une quantité initiale apparaît dans plusieurs disciplines : physique, informatique, statistique, finances . . . etc.

L'idée de base d'une telle sommation infinie discrète donnant une valeur finie a été considérée paradoxale pour les mathématiciens pendant plusieurs siècles, jusqu'à l'introduction de l'idée de limite et la tentative de donner à celle-ci une définition rigoureuse. Depuis les séries infinies n'ont cessé d'attirer l'attention des mathématiciens et ont pu achever un grand développement.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{C}$.

Objectifs du chapitre

- Savoir étudier la nature d'une série numérique.
- Effectuer un calcul de somme.

1.2 Généralités

1.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

1.1 Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique, et soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie comme suit

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- 1) On appelle *série numérique de terme général u_n* le couple des suites $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$.
- 2) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *suite des sommes partielles de rang n de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$* .

Notation 1.1. La série numérique est notée par $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

1.2 Définition

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est dite *convergente* si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas la limite $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est appelée *somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$* .

On écrit

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Une série est dite *divergente* si elle n'est pas convergente.

Remarque 1.1.

Étudier la nature d'une série revient à déterminer sa nature si elle converge ou diverge ensuite calculer sa somme en cas de convergence.

Exemple 1.1.

Étudions la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$, avec $a \in \mathbb{R}$.

La suite des sommes partielles associée à cette série géométrique est donnée par

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a \neq 1, \\ n+1 & a = 1. \end{cases}$$

- 1) Si $a = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$ donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ diverge.
- 2) Si $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = +\infty$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ diverge.
- 3) Si $a \leq -1$, la limite de S_n n'existe pas et donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ diverge.
- 4) Si $-1 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ converge et

$$S = \frac{1}{1-a}.$$

Exemple 1.2.

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Posons $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 1. Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, et sa somme $S = 1$.

Exemple 1.3.

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$. Posons $u_n = \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \sum_{k=0}^n \ln \frac{k+2}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (\ln k+2 - \ln k+1) \\ &= (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \cdots + (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \\ &= \ln(n+2), \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+2) = +\infty,$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente, d'où la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+2}{n+1}$.

Remarque 1.2.

Si $u_n = a_{n+1} - a_n$ on trouve que $S_n = a_{n+1} - a_0$, alors la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 1.1.

Déterminer la nature des séries suivantes en calculons leurs sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

On vient de voir qu'une fois la suite des sommes partielles associée est explicitée alors on peut déduire la nature de la série qui est de même que la suite des sommes partielles, mais trouver l'expression analytique exacte de celle-ci, n'est pas toujours facile, par exemple la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Pour remédier à ce problème, il a fallu concevoir d'autres critères qui nous permettent de déterminer la nature d'une série numérique sans trouver l'expression analytique de la suite des sommes partielles qui lui est associée.

1.2.2 Condition nécessaire de convergence

1.1 Proposition

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. La réciproque est fautive.

Démonstration.

Supposons que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sa suite des sommes partielles associée est convergente. De plus, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n - S_{n-1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n - (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) = u_n,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = 0.$$

L'implication inverse est fautive. En effet, reprenons l'exemple 2.1, la série $\sum \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$ est divergente, bien que son terme général tend vers 0. $\square$

Remarque 1.3.

Par contraposition, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Exemple 1.4.

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(e^{\frac{1}{n}})$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(e^{\frac{1}{n}}) = \sin(1) \neq 0.$$

La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée alors la série est divergente.

1.2.3 Critère de Cauchy

1.2 Proposition

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, q > p \geq N; |S_q - S_p| < \varepsilon,$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, q > p \geq N; \left| \sum_{k=p+1}^q u_k \right| < \varepsilon.$$

Démonstration.

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série convergente, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée est convergente par conséquent c'est une suite de Cauchy, puis la proposition est démontrée. $\square$

Exemple 1.5.

Pour montrer que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles qui lui est associée $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

En effet, $S_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$, pour $p = 2n$ et $q = n$, on trouve que

$$\begin{aligned} |S_p - S_q| &= |S_{2n} - S_n| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| \\ &> \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{n}{2n} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Il suffit ainsi de choisir $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pour que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas de Cauchy.

1.2.4 Reste de rang n d'une série convergente

1.3 Définition

Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, on appelle reste de rang n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

1.3 Proposition

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série convergente alors la suite R_n est convergente et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \quad \text{et} \quad S_n + R_n = S.$$

Démonstration.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente, on a donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Soit $S_n + R_n = S$ alors $R_n = S - S_n$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0.$$

□

1.3 Séries à termes réels positifs

1.4 Définition

Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ réelle est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

1.1 Lemme (convergence par majoration des sommes partielles)

Une série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration.

- Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (par définition).
- Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite majorée, comme la série est à termes positifs alors elle est croissante et donc convergente.

□

Exemple 1.6.

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n^2} > 0$. Vérifions que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est majorée.

Comme $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} S_n &< 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} \\ &< 2, \end{aligned}$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, ce qui implique que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

1.1 Théorème (Règle de comparaison)

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors

- 1- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- 2- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration.

1- Posons : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ alors $S_n \leq T_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge $\Rightarrow T_n$ converge $\Rightarrow T_n$ est bornée (majorée) $\Rightarrow S_n$ est majorée.

D'après le Lemme 1.3 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

2- Par contraposition : si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge alors $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge.

□

Remarque 1.4.

1. Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont à termes négatifs, alors il suffit d'étudier les séries $\sum_{n=0}^{\infty} -u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} -v_n$.
2. Dans le théorème de comparaison, on peut remplacer l'hypothèse $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ par l'hypothèse : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$.

Exemple 1.7.

Soit la série de terme général $u_n = \frac{\sin^2 n}{2^n + \ln n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut appliquer la règle de comparaison.

Comme $\sin^2 n$ est majorée par 1, et $\ln n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leq \frac{1}{2^n + \ln n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente, d'après la règle de comparaison $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente.

1.2 Théorème (Règle d'équivalence)

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs telles que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $u_n \sim v_n$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$). Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ ont la même nature.

Démonstration.

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n,$$

Grâce à la règle de comparaison et les inégalités précédentes on trouve que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ ont la même nature. □

Exemple 1.8.

Soit la série de terme général $u_n = \frac{1 + a^n}{5^n + 3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$.

a) Si $0 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$, donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{5^n + 3^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{5^n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ est une série géométrique convergente, et d'après la règle d'équiva-

lence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n + \ln n}$.

b) Si $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$, alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a^n}{5^n + 3^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a^n}{5^n},$$

si $a \geq 5$ la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{5}\right)^n$ diverge, et par la règle d'équivalence

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + a^n}{5^n + 3^n}$ diverge, et si $a < 5$ la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{5}\right)^n$ converge, et

donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + a^n}{5^n + 3^n}$ converge.

1.4 Comparaison d'une série avec une intégrale

1.3 Théorème

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante, posons $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si et seulement

si $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ converge, et on a

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx.$$

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n_0$, f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, et pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k),$$

en intégrant par rapport à x de k à $k + 1$, on obtient

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx,$$

d'où

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k),$$

en sommant de n_0 à n , et en utilisant le fait que $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$, on obtient

$$\sum_{k=n_0}^n u_{k+1} \leq \sum_{k=n_0}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=n_0}^n u_k,$$

d'où

$$\sum_{k=n_0+1}^{n+1} u_k \leq \int_{n_0}^n f(x) dx \leq \sum_{k=n_0}^n u_k,$$

en déduit que

$$S_{n+1} - S_{n_0} \leq \int_{n_0}^n f(x) dx \leq S_n - S_{n_0-1}.$$

1— Si $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$ converge,

$$S_{n+1} \leq \int_{n_0}^n f(x) dx + S_{n_0} \leq \int_{n_0}^{\infty} f(t) dt + S_{n_0} = M.$$

où M est une constante positive.

La suite $(S_{n \in \mathbb{N}})$ est donc majorée et comme $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est une série à termes positifs alors d'après le Lemme 1.3, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

2— Supposons maintenant que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente de somme S ,

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx \leq S$$

ainsi $\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ converge.

□

1.4.1 Série de Riemann

1.5 Définition

On appelle *série de Riemann* la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.4 Proposition

La série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$, c'est-à-dire

- * Si $\alpha > 1$ la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
- * Si $\alpha \leq 1$ la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Démonstration.

- 1) Si $\alpha < 0$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 2) Si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée et donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
- 3) Si $\alpha > 0$, la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

D'après le théorème précédent, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et

seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge. Or

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right]_1^n = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln n & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge si $0 < \alpha \leq 1$ et diverge si $\alpha > 1$.

□

Exercice 1.2. Étudier la nature des séries suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{n}.$$

1.5 Proposition (Règle de Riemann)

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série réelle à termes positifs.

1. Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge.}$$

2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = +\infty$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

Démonstration.

1. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$ donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; -\frac{\varepsilon}{n^\alpha} \leq u_n \leq \frac{\varepsilon}{n^\alpha}.$$

Grâce à la règle de comparaison $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.

2. Pour le deuxième point de la proposition, on le montre aussi en utilisant la définition de la limite et la règle de comparaison.

□

Exemple 1.9.

1) Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^{\ln(\ln n)^{\ln n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^{\ln n^{(\ln \ln n)}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^{\ln \ln n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2 - \ln \ln n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après la règle de Riemann la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ est convergente.

2) Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{1}{(\ln n)^2} = +\infty.$$

D'après la règle de Riemann la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$ est divergente.

1.4.2 Série de Bertrand

1.6 Définition

On appelle série de Bertrand la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1.6 Proposition

1. Si $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
2. Si $\alpha < 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
3. Si $\alpha = 1$, $\sum \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Démonstration.

1. Si $\alpha > 1$ alors $\frac{\alpha+1}{2} > 1$, posons $\gamma = \frac{\alpha+1}{2}$, on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}} = 0, \quad \forall \beta \in \mathbb{R},$$

en utilisant la règle de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si $\alpha > 1$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

2. Si $\alpha < 1$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty,$$

et d'après la règle de Riemann la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge si $\alpha < 1$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

3. Si $\alpha = 1$, $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, on utilise comparaison avec une intégrale.

Considérons la fonction $f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$. f est positive de plus elle est décroissante et continue, en posant $x = \ln t$, on obtient

$$\int_2^A \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dt}{t^\beta},$$

donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dt}{t^\beta}.$$

L'intégrale de Riemann $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ existe si et seulement si $\beta > 1$, par conséquent

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ existe si et seulement si $\beta > 1$.

D'après le Théorème 1.4, la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

□

1.5 Séries alternées

1.5.1 Règle d'Abel

1.4 Théorème (Théorème de sommation d'Abel)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs décroissante et tend vers 0 et soit (b_n) une suite numérique telle que

$$\exists M > 0, \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

Démonstration.

L'idée de la démonstration est d'effectuer un changement dans la sommation. Pour tout $n \geq 0$, posons $B_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$. Par hypothèse, la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Nous écrivons les sommes partielles de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \\ &= a_0 B_0 + a_1 (B_1 - B_0) + \dots + a_{n-1} (B_{n-1} - B_{n-2}) + a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= B_0 (a_0 - a_1) + B_1 (a_1 - a_2) + \dots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + B_n a_n. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} B_n (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente,

$$\begin{aligned} |B_n (a_n - a_{n+1})| &= |B_n| (a_n - a_{n+1}) \\ &\leq M (a_n - a_{n+1}), \end{aligned}$$

car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, décroissante et $|B_n|$ est borné par M . Or

$$M(a_0 - a_1) + \dots + M(a_n - a_{n+1}) = M(a_0 - a_{n+1}),$$

qui tend vers $M a_0$ puisque a_n tend vers 0.

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} M(a_n - a_{n+1})$ converge, et d'après le critère de comparaison la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |B_n (a_n - a_{n+1})|$ est convergente. On déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, d'où la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$. $\square$

Exemple 1.10.

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$. Posons $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \sin n$.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs décroissante et tend vers 0, et $e^{ik} = \cos k + i \sin k$ donc

$$\sum_{k=1}^n e^{ik} = \sum_{k=1}^n \cos k + i \sum_{k=1}^n \sin k,$$

d'autre part

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{ik} \right| = \left| \frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}.$$

Alors d'après la règle d'Abel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ est une série convergente.

1.7 Définition

On dit qu'une série à termes réels $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est alternée si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n a_n \text{ ou } u_n = (-1)^{n+1} a_n \text{ avec } a_n > 0.$$

1.5 Théorème (de Leibniz)

Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et elle tend vers 0, la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n \text{ converge.}$$

Démonstration.

Supposons que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante vers 0. Soit $b_n = (-1)^n$, $\left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq 1$, et d'après le théorème de sommation d'Abel $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n b_n$ converge. $\square$

1.5.2 Convergence absolue et semi convergence

1.8 Définition

1) On dit qu'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ est convergente.

2) On dit qu'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est semi convergente si elle est convergente sans qu'elle soit absolument convergente.

1.6 Théorème

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série absolument convergente, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ converge d'après le critère de Cauchy de convergence des séries, et on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall p, q \in \mathbb{N}, q > p \geq N; \left| \sum_{k=p+1}^q |u_k| \right| < \varepsilon.$$

comme

$$\left| \sum_{k=p+1}^q u_k \right| \leq \sum_{k=p+1}^q |u_k|,$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall p, q \in \mathbb{N}, q > p \geq N; \left| \sum_{k=p+1}^q u_k \right| < \varepsilon,$$

d'où la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$. $\square$

Remarque 1.5.

1. La réciproque du théorème précédent est fautive, on peut prendre comme contre exemple la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
2. L'intérêt fondamental du Théorème 1.5.8 est que l'on peut appliquer les propriétés des séries à termes positifs, à la série $\sum |u_n|$ qui est à termes positifs.

1.6 Séries à termes réels de signe quelconque

1.6.1 Critère de Cauchy

1.7 Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels ou complexe, supposons que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$, alors

1. Si $l < 1$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
2. Si $l > 1$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$ on ne peut rien conclure.

Démonstration.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; |\sqrt[n]{|u_n|} - l| \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; (l - \varepsilon)^n \leq |u_n| \leq (l + \varepsilon)^n.$$

1. Supposons que $l < 1$ et prenons $\varepsilon \in]0, 1 - l[$, $l + \varepsilon < 1$, et on a $|u_n| \leq (l + \varepsilon)^n$ pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ converge.

2. Supposons que $l > 1$ et prenons $\varepsilon = l - 1$, on a donc $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq n_0$.

Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

□

Exemple 1.11.

Soit $a > 0$, considérons la série de terme général $u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$.

$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est une série à termes positifs, et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right) = a.$$

Si $a < 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge et si $a > 1$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge et pour le cas $a = 1$ on peut montrer que la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée.

1.6.2 Critère de d'Alembert

1.8 Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels ou complexe, supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l,$$

1. Si $l < 1$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
2. Si $l > 1$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$ on ne peut rien conclure.

Démonstration.

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; (l - \varepsilon)^n |u_0| \leq |u_n| \leq (l + \varepsilon)^n |u_0|$$

1. Soit $l < 1$ et $\varepsilon \in]0, 1 - l[$, alors $l + \varepsilon < 1$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} (l + \varepsilon)^n$ est une série géométrique convergente, et on a $u_n \leq (l + \varepsilon)^n |u_0|$ pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ converge.
2. Supposons que $l > 1$ et prenons $\varepsilon = l - 1$, on a donc $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

□

Remarque 1.6.

1. Si $l = +\infty$ ou $l = 0$ on peut appliquer les règles de Cauchy et de d'Alembert.

2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$.

Exemple 1.12.

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ de terme général $u_n = \frac{n^n}{n!}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

comme $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{\sim}{\sim} \frac{1}{n}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \cdot \frac{1}{n}} = e > 1.$$

D'après la règle de d'Alembert la série est divergente.

1.6.3 Règles générales

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques.

1. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ convergent alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ converge.
2. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha u_n$ converge.
3. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ diverge.
4. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ divergent alors on peut rien dire sur la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$.

Remarque 1.7.

- 1) Les deux premières propriétés de linéarité (somme et produit par un scalaire) confèrent à l'ensemble des séries numériques convergentes la structure algébrique d'un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les séries numériques.

- 2) L'ensemble des séries numériques divergentes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les séries numériques, car la somme de deux séries divergentes n'est pas toujours une série divergente, sauf si elles sont de même signe.

Exemple 1.13.

- 1) La série somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} = 0$ est convergente bien que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ sont divergentes.
- 2) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ est divergente, mais les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ sont divergentes.

1.6.4 Méthode de développement limité

C'est une technique qu'on applique sur quelques séries à terme quelconques pour lesquelles les critères précédents ne s'appliquent pas. Il suffit d'utiliser un développement asymptotique du terme général.

Exemple 1.14.

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, la suite $\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ n'est pas décroissante et donc on ne peut pas appliquer le théorème de Leibniz. On a

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}},$$

et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, dans ce cas on peut utiliser le développement limité de la fonction $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 1,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée convergente, et on a

$$\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

la série $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente, et d'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs $\sum \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente. $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est divergente comme somme d'une série convergente et une autre divergente.

Remarque 1.8.

En utilisant le développement limité, il faut développer à un ordre suffisamment élevé pour obtenir un reste absolument convergent.

1.7 Produit de des séries

1.9 Définition

On appelle série produit des séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ dont le terme général est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k},$$

alors

$$w_0 = u_0 v_0$$

$$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0$$

⋮

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0.$$