
Chapitre I

Logique et raisonnements

1 Logique

1.1 Assertions

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple 1.1

$2 + 2 = 4$ est une assertion vraie.

$3 \times 2 = 7$ est une assertion fausse.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|z| = 1$ est une assertion fausse.

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q .

L'opérateur logique *et* ($\wedge$)

L'assertion $\ll P \text{ et } Q \gg$ est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion $\ll P \text{ et } Q \gg$ est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.2

" $3 + 5 = 8 \wedge 3 \times 6 = 18$ " est une assertion vraie

" $2 + 2 = 4 \wedge 2 \times 3 = 7$ " est une assertion fausse.

L'opérateur logique *ou* ($\vee$)

L'assertion $\ll P \text{ ou } Q \gg$ est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion $\ll P \text{ ou } Q \gg$ est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.3

" $2 + 2 = 4 \vee 3 \times 2 = 6$ " est une assertion vraie

" $2 = 4 \vee 4 \times 2 = 7$ " est une assertion fausse.

1.1.1 La négation $\bar{P}$

L'assertion $\ll \bar{P} \gg$ est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Exemple 1.4

La négation de l'assertion $3 \geq 0$ elle est l'assertion $3 \not\geq 0$.

1.1.2 L'implication $\Rightarrow$

La définition mathématique est la suivante :

L'assertion $\ll \bar{P} \text{ ou } Q \gg$ est notée $P \Rightarrow Q$

Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 1.5

$2 + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$ est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors l'assertion $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie.

1.1.3 L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'équivalence est définie par : $\ll P \Longleftrightarrow Q \gg$ est l'assertion $\ll (P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P) \gg$

On dira $\ll P$ est équivalent à $Q \gg$ ou $\ll P$ équivaut à $Q \gg$ ou $\ll P$ si et seulement si $Q \gg$. Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

La table de vérité est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.2 Quantificateurs

Le quantificateur $\forall$: $\ll \text{pour tout} \gg$

L'assertion

$$\forall x \in E, P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E . On lit $\ll \text{Pour tout } x \text{ appartenant à } E, P(x) \text{ est vraie} \gg$.

Par exemple :

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ est une assertion fausse.

Le quantificateur $\exists$: « il existe »

L'assertion

$$\exists x \in E, P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) ».

Par exemple :

$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ est vraie, par exemple $x = 0$.

$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ est fausse.

La négation des quantificateurs

La négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \overline{P(x)}$ ».

Exemple : la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » est l'assertion « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ».

La négation de « $\exists x \in E, P(x)$ » est « $\forall x \in E, \overline{P(x)}$ ».

Exemple : la négation de « $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 0$ » est l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ ».

2 Raisonnements

2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \implies Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 2.1 Montrer que si $a = b \implies \frac{a+b}{2} = b$

on a

$$\begin{aligned} a = b &\implies \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \\ &\implies \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \\ &\implies \frac{a+b}{2} = b \end{aligned}$$

2.2 Contraposée

Le raisonnement par **contraposition** est basé sur l'équivalence suivante.

L'assertion $P \implies Q$ est équivalente à $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \implies Q$.

On montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration

Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair. Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair .

2.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $\ll P \implies Q \gg$ repose sur le principe suivant : On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $\ll P \implies Q \gg$ est vraie.

Exemple 2.3 Soient $a, b > 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Démonstration

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Cela conduit à $(a - b)(a + b) = -(a - b)$.

Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

2.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\ll \forall x \in E P(x) \gg$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$ est $\ll \exists x \in E, \overline{P(x)} \gg$). Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$.

Exemple 2.4 Montrer que l'assertion suivante est fausse $\ll \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1 \gg$

Démonstration. Un contre-exemple est $x = 0.5$

2.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

Chapitre I. Logique et raisonnements

- On prouve $P(0)$. Est vraie.
- On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n + 1)$ est vraie.

Enfin dans la [conclusion](#), on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2^n > n$.

Démonstration Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n + 1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n && \text{car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1 && \text{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie

Conclusion. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque 2.1 Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0 .

Exercice 1.1

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b) \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ;$$

$$(c) \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a , b , c , d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.