

1. NOTION DE CONTRAINTES

1.1. Notion de contrainte dans un milieu quelconque

Soit un solide quelconque (S) soumis à un système de forces surfaciques.

Considérons un plan fictif (P) qui sépare le solide au voisinage du point M en deux parties (I) et (II).

Soit dS une petite portion de surface entourant M.

Soit $d\vec{F}$ la force exercée sur dS par la partie (II) sur (I). On appelle vecteur contrainte au point M sur la facette dS le vecteur :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad [f] = \text{Pa} = \text{N/m}^2$$

Le vecteur contrainte peut se décomposer en une composante normale et une composante tangentielle au plan (P) :

$$\vec{f} = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t}$$

$\vec{n}$: **vecteur unitaire normal** sortant
(orientation directe de l'espace)

$\vec{t}$: **vecteur unitaire tangent**

: **Contrainte normale**

: **Contrainte de cisaillement**

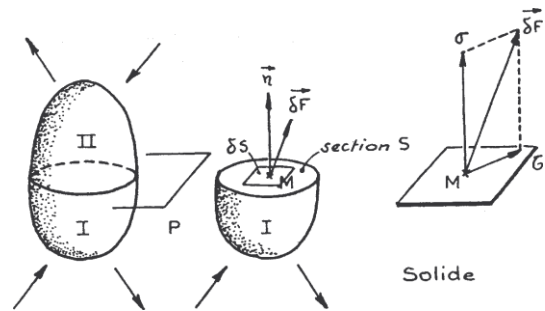
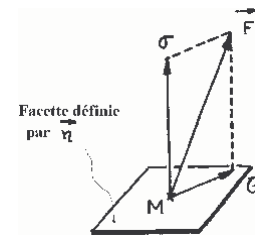


Fig. 1.1 : Contrainte dans un milieu

Le vecteur contrainte est une fonction du point considéré **et** de l'orientation de la facette passant par ce point (changement de repère) :

$$\vec{f} = \vec{f}(M, \vec{n})$$



Pour un point M donnée, $\vec{f}$ a donc une expression différente selon la facette considérée (changement de repère).

C'est une remarque fondamentale : cela signifie que en un point M donnée et pour une contrainte f donnée *selon le plan considéré*, un sol aura ou n'aura pas par exemple une composante tangentielle (cisaillement). C'est d'autant plus important si les matériaux n'ont pas les mêmes limites de résistance qui en traction, compression ou cisaillement ! (ce qui est souvent le cas)

Exemple : Cas d'une barre bidimensionnelle en traction simple

Soit une barre bidimensionnelle soumise sur ses bases à une traction uniforme σ_1 . ($\|\vec{f}\| = \sigma_1$)

Sur ces faces latérales ne s'exerce aucune contrainte ($\sigma_3 = 0$). Dans la barre, l'état de contraintes est dit homogène, c'est-à-dire qu'en tout point M la contrainte qui s'exerce sur le plan horizontal est normale et a pour valeur $-\sigma_1$ tandis que la contrainte qui s'exerce sur le plan vertical est nulle. L'état des contraintes est donc le même partout (intensité). En particulier par rapport au plan horizontal (I), Le vecteur contrainte $\vec{f}$ s'écrit :

$$\vec{f} \left(M, \vec{n}_{(I)} \right) = \begin{pmatrix} -\sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\tau = 0)$$

Soit un plan (P) faisant l'angle θ avec l'horizontale. Par rapport au plan (P), Le vecteur

$$\text{contrainte } \vec{f} \text{ s'écrit : } \vec{f} \left(M, \vec{n}_{(P)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{2} (1 - \cos(2\theta)) \\ \frac{\sigma_1}{2} \sin(2\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{Contrainte tangentielle non nulle !})$$

A noter :

1. Demander la contrainte en un point dans un sol, sans préciser par rapport à quel plan $\Rightarrow$ cela ne veut rien dire au sens de la RDM, car un matériau donné peut avoir des résistances qui en traction, compression ou cisaillement sont différentes (exemple : béton, l'eau, ..)
2. La théorie montre que pour déterminer les contraintes qui s'exercent sur toutes les différentes facettes autour d'un point M, il suffit de connaître en ce point les valeurs des six quantités :

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \text{ et } \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

c'est-à-dire les composantes des contraintes s'exerçant sur les faces d'un cube centré au point M et dont les arêtes sont parallèles aux axes Ox, Oy, Oz.

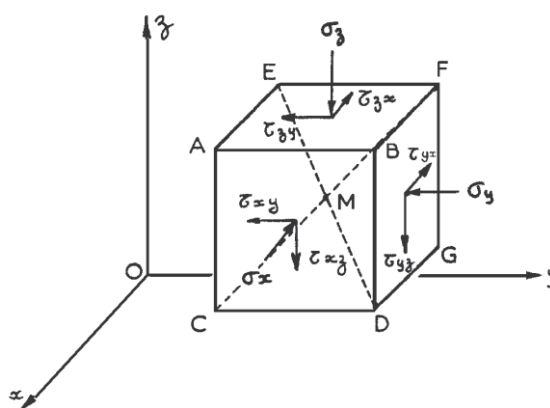


Fig. 1.3 : Contrainte dans un milieu

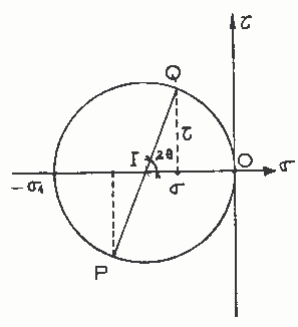


Fig.1.2 contraintes et cercle de Mohr

A noter :

Pour θ de rotation du plan étudié autour de M, on tourne de 2θ sur le cercle de Mohr

3. Il existe en tout point M trois plans privilégiés pour lesquels la contrainte est uniquement normale ($\tau = 0$). Ils sont appelés **plans principaux**, leurs directions normales, **directions principales**, et les contraintes correspondantes, **contraintes principales** :

On les note $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, telles que ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$), et elles sont respectivement appelées contraintes principales **mineures**, **intermédiaires** et **majeures**.

4. Mr MOHR eu l'idée de représenter de façon avantageuse (simple) pour un point M donnée d'un solide, soumis à une contrainte f donnée la ventilation des contraintes normales ou tangentielles selon la facette considérée en utilisant un cercle appelé cercle de MOHR (voir la figure) dont chaque point décrit par le cercle représente la lecture de $(\sigma ; \tau)$ pour la facette d'angle θ considérée (θ angle entre la facette considérée et la facette siège de la contrainte majeure).

2-Cercle de Mohr

Pour étudier l'état de contraintes autour d'un point, on utilise une représentation appelée diagramme de Mohr qui consiste à représenter le vecteur contrainte $\vec{f}$ dans un système d'axes (σ, τ) .

Dans le cas bidimensionnel, cas très fréquent en géotechnique, le cercle de Mohr est le lieu des extrémités des vecteurs contraintes et les contraintes principales se réduisent à deux.

2-1 Méthode analytique

Dans le système de repère (Ox, Oy) le tenseur de contraintes s'écrit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

La condition de nullité du moment résultant : $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ c-à-d

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Connaissant les contraintes sur les facettes de normales OX et OZ , on peut déterminer les contraintes sur n'importe quelle autre facette inclinée d'un angle « θ »

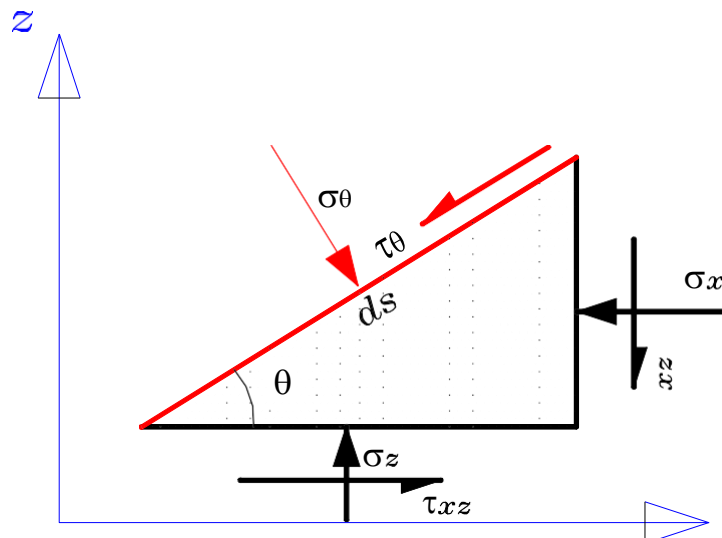


Fig 2.1

Si l'on écrit la première condition d'équilibre (somme des forces est nulle), on aura l'état de contrainte sur le plan incliné de « θ »

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2\theta - \tau_{xz} \sin 2\theta \quad (2.1)$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xz} \cos 2\theta \quad (2.2)$$

Le lieu de contraintes dans le plan (σ, τ) est défini par la relation : (2.3)

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2$$

C'est l'équation d'un cercle (cercle de Mohr):

- de centre de coordonnées $((\sigma_x + \sigma_z)/2, 0)$

- de rayon $\sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$

L'orientation des plans principaux est obtenue pour $\tau_\theta = 0$, soit :

$$\theta_1 = -\frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi/2$$

Il existe donc deux plans principaux dont l'orientation est donnée par θ_1 et θ_2 . Les contraintes principales majeure et mineure sont déterminées à partir de l'équation du cercle

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (2.4)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (2.5)$$

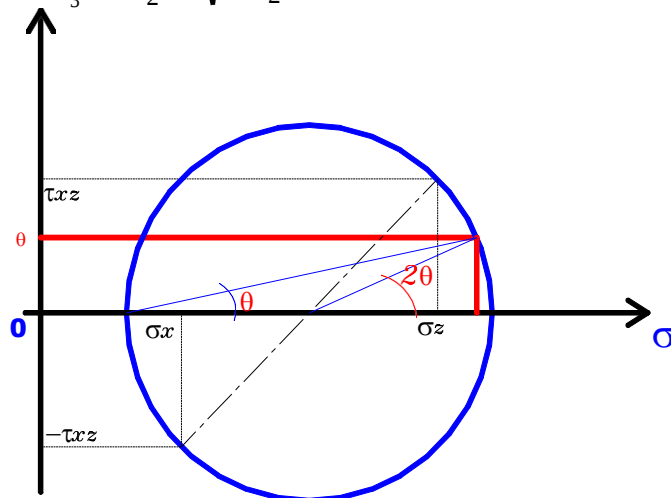


Fig 2.2 : Cercle de Mohr

A noter que, si les directions x et z sont principales ($\sigma_x = \sigma_3$; $\sigma_z = \sigma_1$ et $\tau_{xz} = 0$) on trouve :

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta$$

2-2 Méthode graphique :

Il s'agit de déterminer l'état de contraintes sur le plan incliné d'un angle θ et dont les valeurs des contraintes principales σ_1 et σ_3 sont connues.

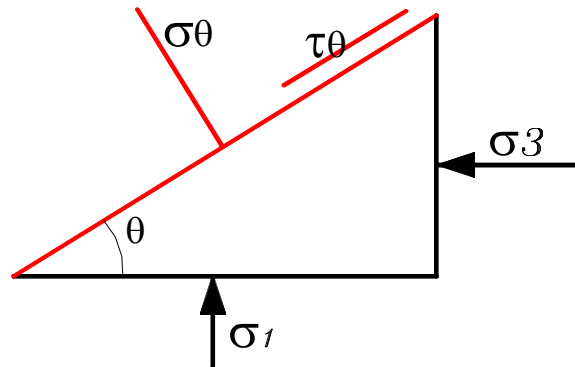


Fig 2.3

La démarche utilisée pour résoudre ce problème est la suivante :

- De σ_1 , on trace une parallèle au plan de σ_1
- De σ_3 , on trace une parallèle au plan de σ_3
- L'intersection des deux plans donne le pôle « P »
- Du pôle « P », on trace la parallèle à la facette sur laquelle on veut trouver l'état de contraintes (σ_θ et τ_θ)
- L'intersection de cette droite avec le cercle donne σ_θ et τ_θ

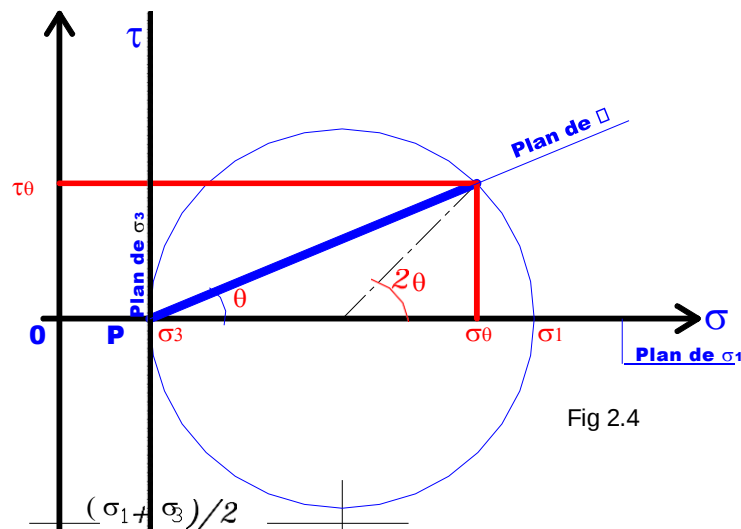


Fig 2.4

On doit souligner enfin que, en mécanique des sols, on adopte la convention de signes suivante :

- $\sigma > 0$ en compression
- $\sigma < 0$ en traction

3 - Contraintes dues au poids propre du sol

Le poids du sol augmente avec la profondeur ; réparti sur une unité de surface horizontale à une profondeur donnée, il correspond à la pression ou contrainte due au poids propre.

Pour un sol de poids volumique γ (en kN/m^3), et à une profondeur z (en m), la contrainte verticale est :

$$\sigma_v = \gamma \cdot z \quad (3.1)$$

3-1 Cas d'un sol sec

Le poids volumique intervenant dans le calcul de la contrainte est γ_d .

Dans le cas d'un sol stratifié en plusieurs couches de différents poids volumiques et différentes hauteurs :

$$\sigma_v = \sum \gamma_{di} \cdot h_i \quad (3.2)$$

3-2 Cas d'un sol saturé

Noyé dans l'eau interstitielle, l'élément de sol est allégé d'un poids équivalent au poids volumique de l'eau multiplié par son propre volume. Ainsi la contrainte totale sera (σ_v) supportée par le squelette solide et l'eau.

D'après **la loi de Terzaghi** :

$$\sigma_v = \sigma'_v + u \quad \text{et} \quad \tau' = \tau \quad (3.3)$$

u: pression interstitielle, $u = \gamma_w \cdot h_w$

σ'_v : contrainte effective transmise au squelette solide.

NB : Le poids volumique intervenant dans le calcul de la contrainte totale est γ_{sat} .

$$- \quad \sigma'_v = \sigma_v - u = \gamma' \cdot z \quad (\gamma' : \text{poids volumique déjaugé})$$

Exemple : Traçons les diagrammes de variation de σ_v , σ'_v et u en fonction de la profondeur

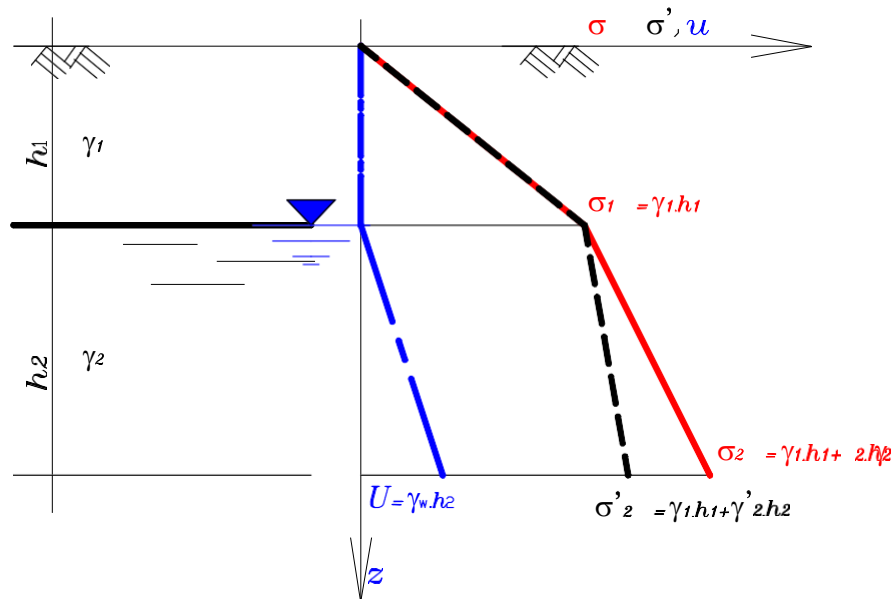


fig 3 Diagrammes de Variation des contraintes totales, effectives et interstitielles en fonction de la profondeur.

3-3 Contraintes dues aux surcharges

Les dépôts de sol sont normalement stables, à moins que des circonstances naturelles ou un chargement artificiel ne contribuent à y accroître les contraintes effectives et qu'un tassement s'en résulte. On sait qu'un abaissement de la nappe augmente la contrainte effective, mais divers types de surcharges induisent également des contraintes ($\Delta\sigma$) dans le sol. Il s'agit :

- Des charges ponctuelles.
- Des charges uniformément réparties sur les surfaces rectangulaires et circulaires.
- Des charges en forme de remblai de longueur supposée infinie

3-3-1 Cas d'une surcharge uniformément répartie sur toute la surface q

Dans ce cas et **quelle que soit** la profondeur z , on a :

$$\Delta\sigma = q \quad (3.4)$$

3-3-2 Cas d'une surcharge ponctuelle Q

En considérant le sol comme milieu semi-infini élastique non pesant, la contrainte verticale due à la force ponctuelle Q est calculée d'après la formule de Boussinesq :

Cette équation peut s'écrire sous une forme plus simple :

$$\Delta\sigma = I_z (Q/z^2). \quad (3.5)$$

Où I_z est un facteur d'influence de contrainte verticale déterminé en fonction de r/z par des abaques.

3-3-3 Cas d'une surcharge circulaire uniforme q

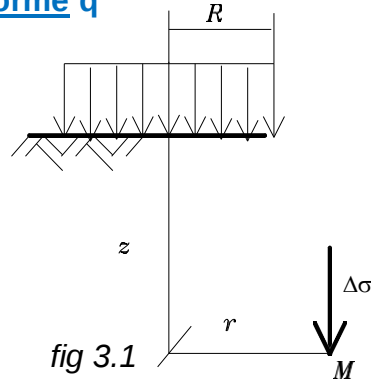


fig 3.1

$$\Delta\sigma = q \left(1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right) \quad (3.6)$$

Ou bien : $\Delta\sigma = I_z q$ (I_z : facteur d'influence fonction r/R et z/R).

3-3-4 Cas d'une surcharge rectangulaire uniforme q

Sous l'effet d'une charge rectangulaire de largeur « b » et de longueur « l », la contrainte induite $\Delta\sigma$ sous l'un des coins de cette charge, est donnée par :

$$\Delta\sigma = I_z q \quad (3.7)$$

I_z : facteur d'influence fonction de b/z et l/z .

La contrainte à la verticale d'un point quelconque s'obtient en construisant à partir du rectangle et du point, des rectangles ayant chacun un sommet au point considéré. La contrainte cherchée est la somme algébrique des contraintes produites par les rectangles.

Exemple :

Pour calculer $\Delta\sigma$ à la verticale du point A sous l'effet de la pression « q » de la semelle EHDC, on utilise la méthode de découpage $\Delta\sigma = [I_{z1} - (I_{z2} + I_{z3}) + I_{z4}]q$

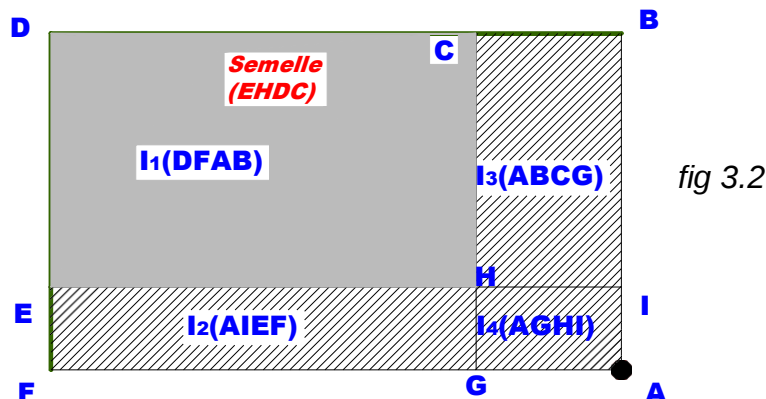


fig 3.2

3-3-5 Cas d'un remblai semi-infini

Pour un remblai de hauteur H_r et de poids volumique γ_r , la contrainte verticale est : $\Delta\sigma = I_z q$ (3.8)

Avec : $q = \gamma_r \cdot H_r$

I_z : facteur d'influence donné par le tableau 3.2 en fonction de a/z et b/z .

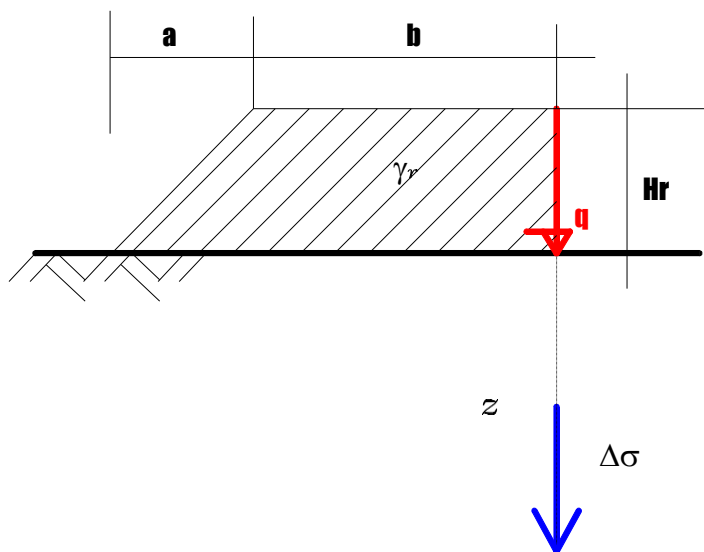


fig 3.3

Tableau 3.2 valeurs de I_z pour un remblai semi-infini

a/z	0.01	0.05	0.1	0.3	0.5	1
b/z						
0.0	0.00	0.01	0.03	0.10	0.15	0.26
0.2	0.13	0.14	0.16	0.22	0.25	0.33
0.4	0.23	0.24	0.25	0.30	0.33	0.38
0.6	0.32	0.32	0.33	0.36	0.38	0.41
0.8	0.37	0.37	0.38	0.40	0.41	0.45
1.0	0.41	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45
1.2	0.44	0.44	0.44	0.45	0.46	0.47
1.4	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.48
1.6	0.47	0.47	0.47	0.47	0.48	0.49
2.0	0.48	0.48	0.48	0.48	0.49	0.49
3.0	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.50

4- LOI DE COMPORTEMENT

La déformation d'un solide résulte des contraintes qui lui sont appliquées et inversement les contraintes apparaissent dans un solide sous l'action des déformations.

Ceci exprime une réalité à savoir qu'il existe une relation entre contraintes et déformations dépendant essentiellement de la nature du matériau considéré.

L'expérimentation est indispensable, et révèle que ce lien entre contrainte et déformation, parfois complexes, peut généralement s'exprimer à partir d'un nombre de paramètres mécaniques mesurables. C'est la **loi de comportement**.

La loi de Hooke en élasticité linéaire et isotrope exprime dans un solide la linéarité et la réversibilité des déformations. C'est une loi de comportement, dont on peut dire par ailleurs qu'elle est la loi support à la description du comportement de nombreux matériaux. Comment s'écrit-elle.

Considérons par exemple la déformation d'un volume élémentaire de sol en M provoquant les contraintes σ_v et σ_h . Les déplacements seront suffisamment faibles pour pouvoir appliquer la loi Hooke.

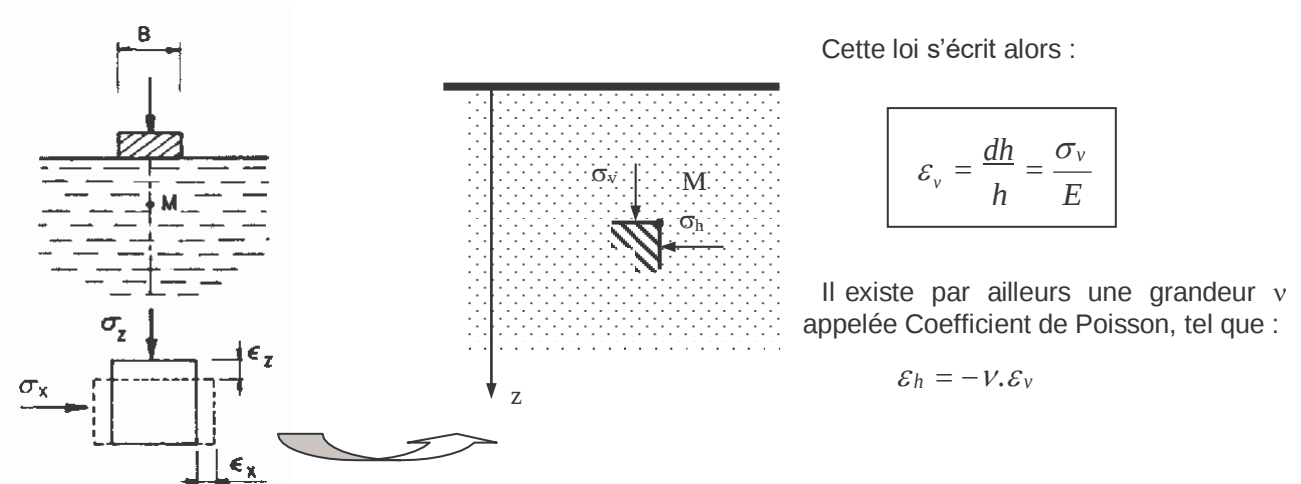


Fig.4.1. Déformation volumétrique d'un échantillon de sol

4.1 Cas d'un sol à surface horizontale uniformément chargé

Considérons un massif à surface horizontale uniformément chargé par une distribution de charge d'intensité. La contrainte totale à la profondeur H est d'après le principe de superposition égale à la contrainte due à la pesanteur augmentée de la contrainte due à la surcharge.

$$\sigma_z = \gamma \cdot h + \Delta\sigma_z = \gamma \cdot h + q$$

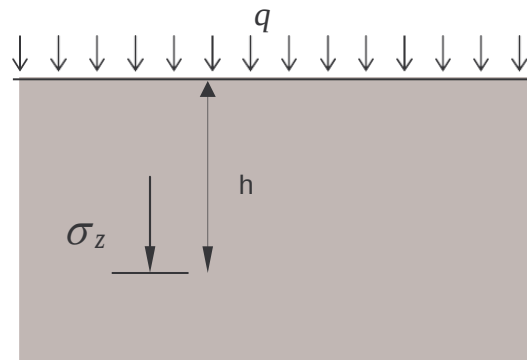


fig 4.2

4.2 Cas d'une charge ponctuelle

On utilise la formule de Boussinesq qui donne la contrainte verticale en tout point M d'un milieu élastique non pesant chargé par une force ponctuelle verticale Q :

$$\Delta\sigma_z = \frac{3Q}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

L'abaque N°1 en annexe donne les variations de $\bar{N}$ en fonction de $\frac{r}{z}$.

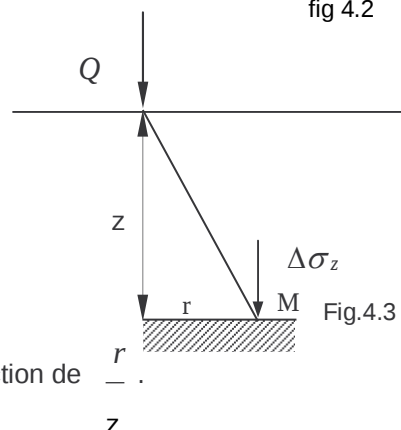


Fig.4.3 : Charge ponctuelle

4.3 Cas d'une charge rectangulaire uniforme

L'augmentation de contrainte dans un milieu semi-infini sous le coin d'une répartition rectangulaire uniforme (q) est donnée par la relation :

$$\Delta\sigma_z = k \cdot q$$

q en kN / m^2

$k = k(m, n)$ avec $m = \frac{a}{z}$; $n = \frac{b}{z}$ est un facteur

d'influence sans dimension donné dans l'abaque N°2

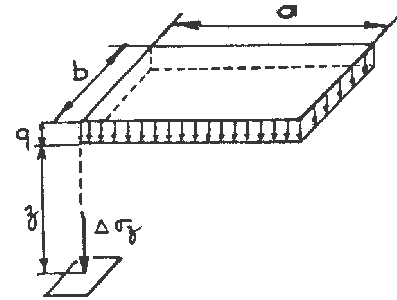
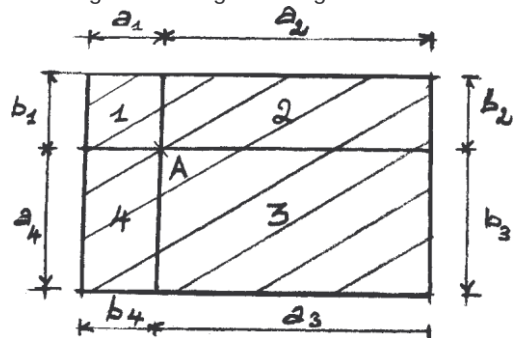


Fig.4.4 : Charge rectangulaire uniforme

Si le point A est à l'intérieur du rectangle chargé (fig..4 b) :

$$\Delta\sigma_z = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) q$$



(b) : Point à l'intérieur du rectangle chargé

4.4 Cas d'une charge circulaire

Dans l'axe d'une charge circulaire uniforme de rayon (fig.6.5) l'augmentation de contrainte verticale à la Profondeur Z est :

$$\Delta\sigma_z = J \cdot q$$

J : coefficient sans dimension donné dans l'abaque3

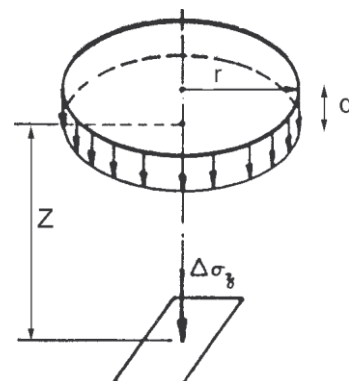


Fig.4.5 : Charge circulaire

4.5 Charge en remblai de longueur infinie

La contrainte verticale **sous le coin** d'une distribution de charges de longueur infinie en forme de remblai et à la profondeur Z (fig.6.6) est donnée par :

$$\Delta\sigma_z = I \cdot q$$

I =: coefficient sans dimension donné dans l'abaque.

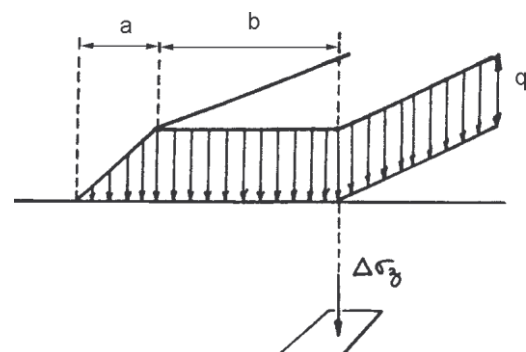


Fig. 4.6 : Charge en remblai

A noter :

Il s'agit bien d'une valeur de contrainte **sous le coin** d'une distribution de charge. Ainsi, lorsque le remblai à deux versants, ne pas oublier d'additionner l'action de la partie de droite à celle de la gauche cf. le schéma ci-après :

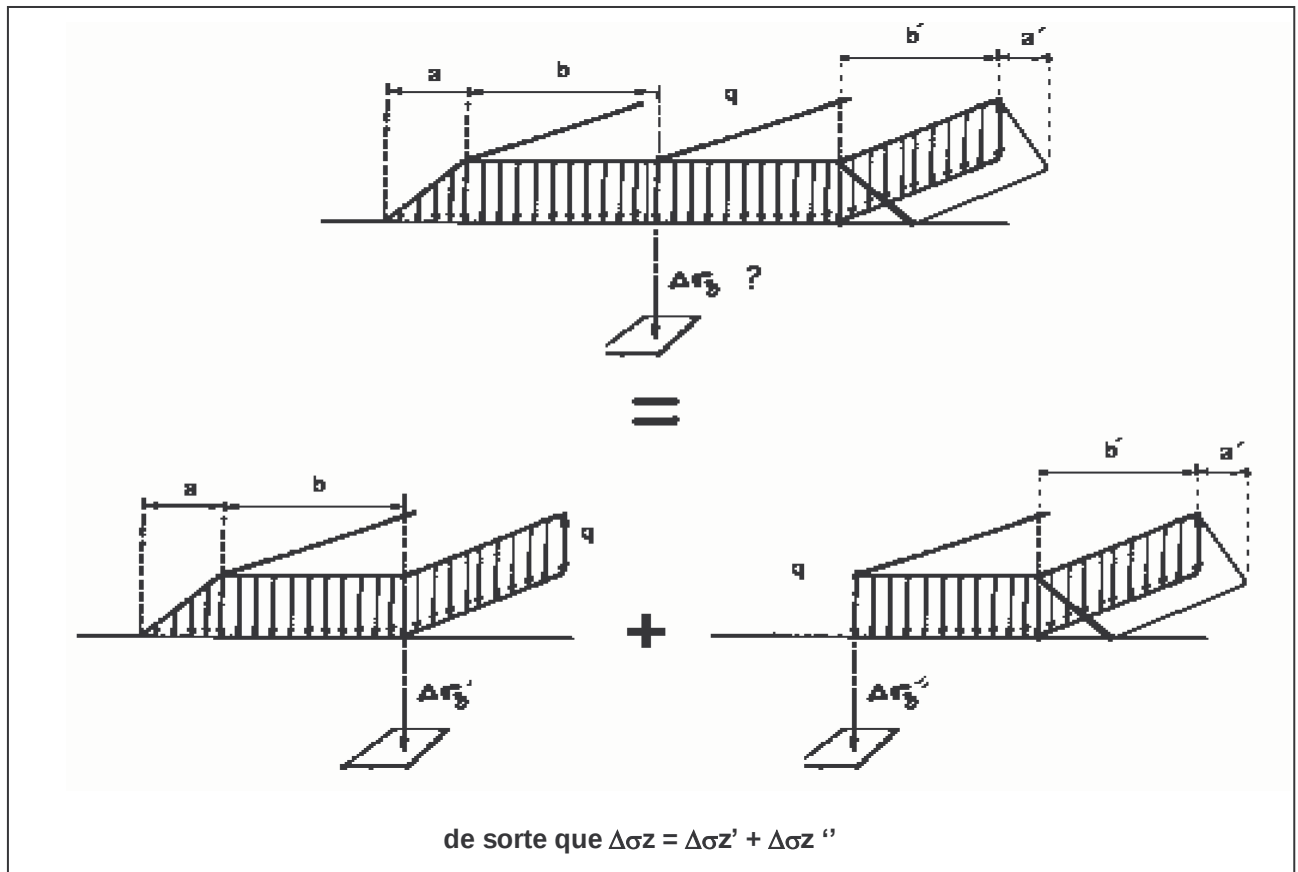


Fig. 4.6a : participation de la partie de droite et de gauche du remblai

4.6 Charge uniforme sur une surface irrégulière :

Newmark (1942) a mis au point une procédure graphique simple pour calculer la contrainte verticale à l'intérieur d'un sol, chargé par une charge verticale uniformément répartie à la surface. L'abaque qu'il a conçu à cet effet est appelé "abaque d'influence". Elle est applicable à une masse de sol homogène, isotrope et élastique (et non à un sol stratifié).

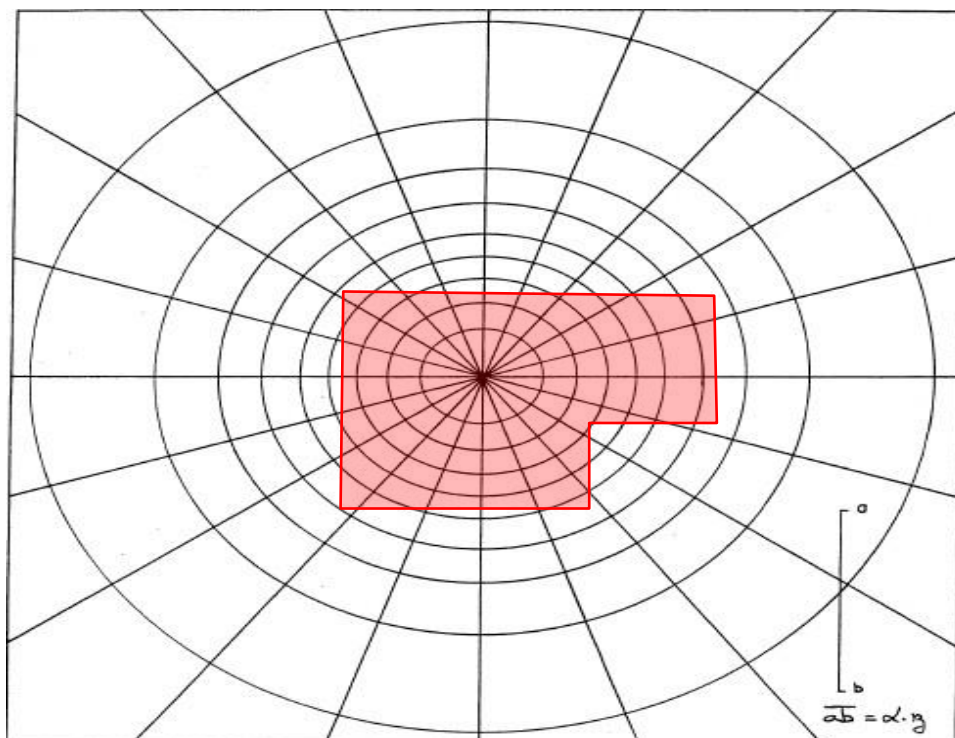


Figure 4.7 : L'abaque de Newmark pour les surfaces irrégulières

Les étapes à suivre pour cette méthode sont :

1. Le point où l'on veut calculer la contrainte due à la surcharge est placé au centre de l'abaque.
2. La surface ou la fondation est dessinée à une échelle X telle que $X=Z/ab$ (Z : la profondeur désirée en m. **ab** : est la distance représentée sur l'abaque en cm)
3. Dessiner la surface
4. Compter le nombre de carreaux **n** recouverts par la surface
5. Calculer

n : le nombre de carreaux occupé par la surface

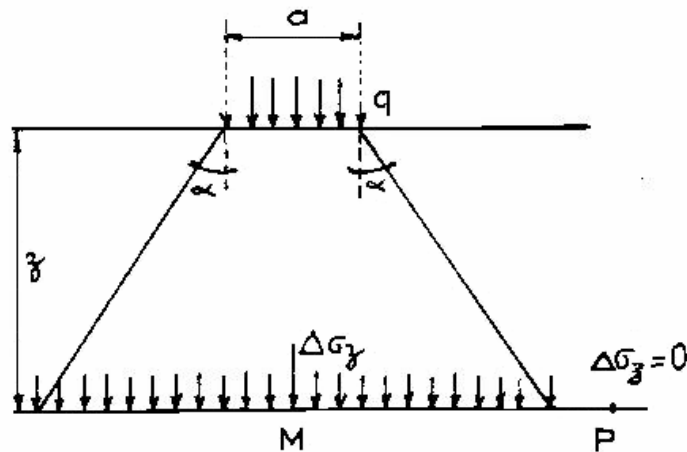
Donc la contrainte σ_z s'exerçant à la profondeur z sur une facette horizontale est égale à la somme de la contrainte naturelle σ_v due au poids du sol, et de la contrainte due aux surcharges $\Delta\sigma_z$

$$\Delta\sigma_z = 0.005.n..q$$

4.7 Diffusion simplifiée des contraintes – cas des semelles continues

Lorsqu'on ne cherche qu'une valeur approximative des tassements et des contraintes, on peut se contenter de la diffusion simplifiée suivante des contraintes normales.

On suppose qu'il y a une diffusion uniforme des contraintes avec la profondeur, limitée par des droites faisant un angle α avec la verticale :

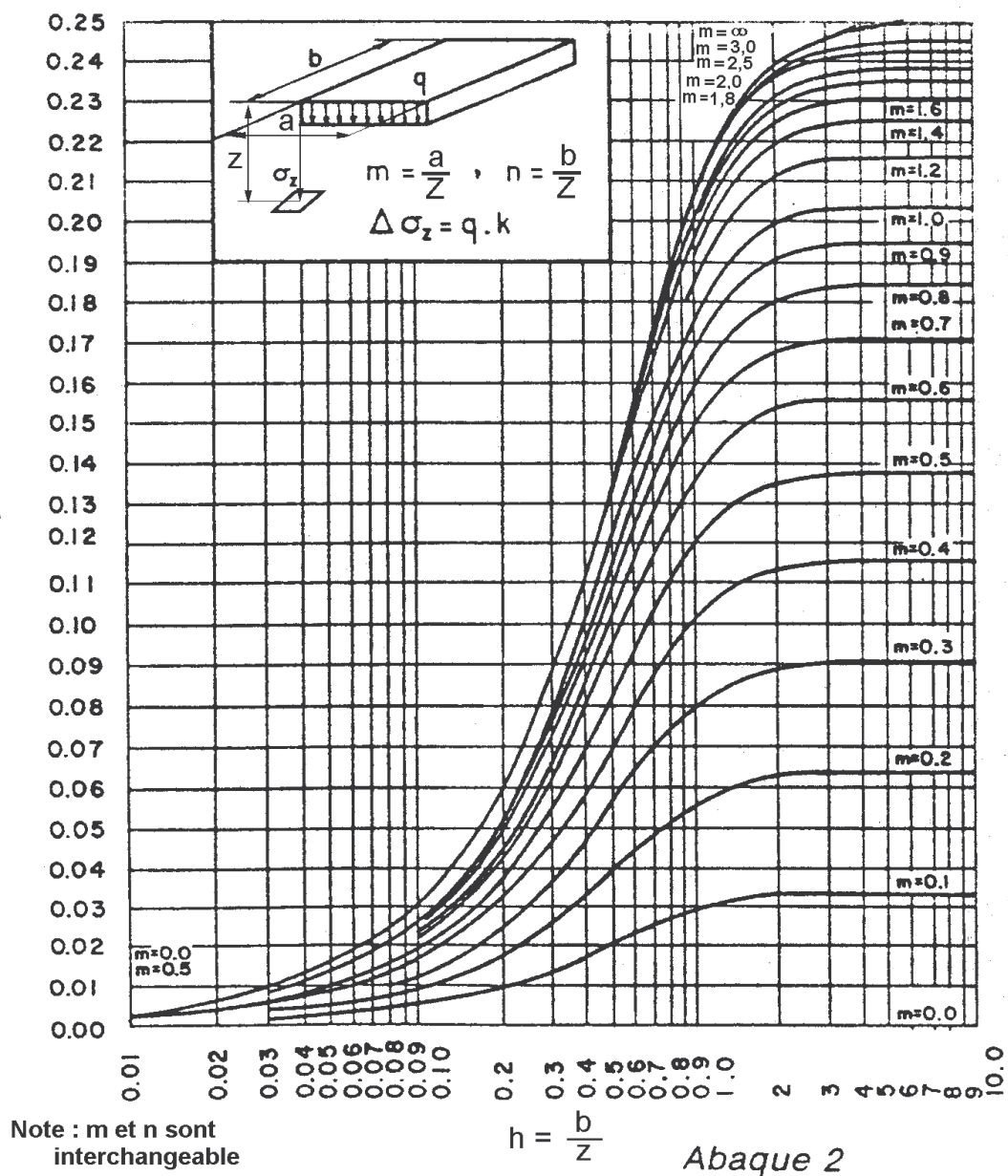
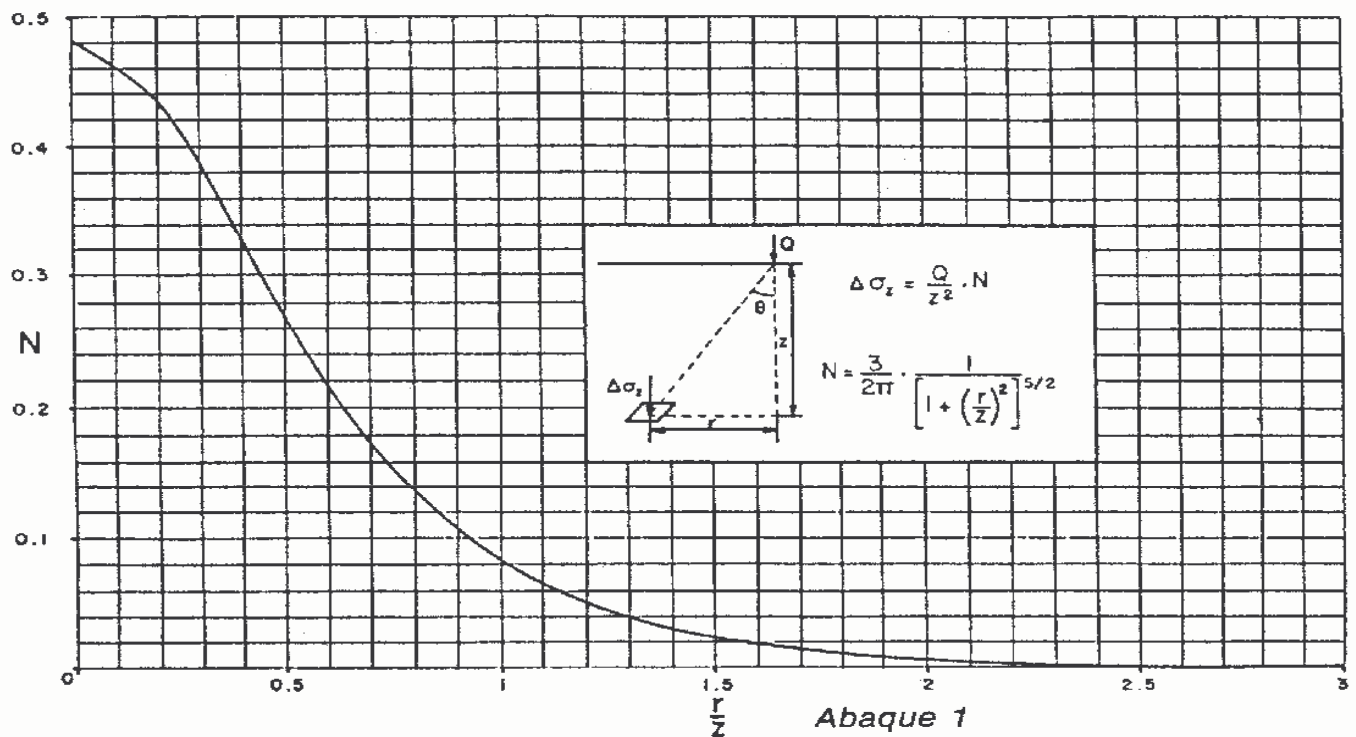


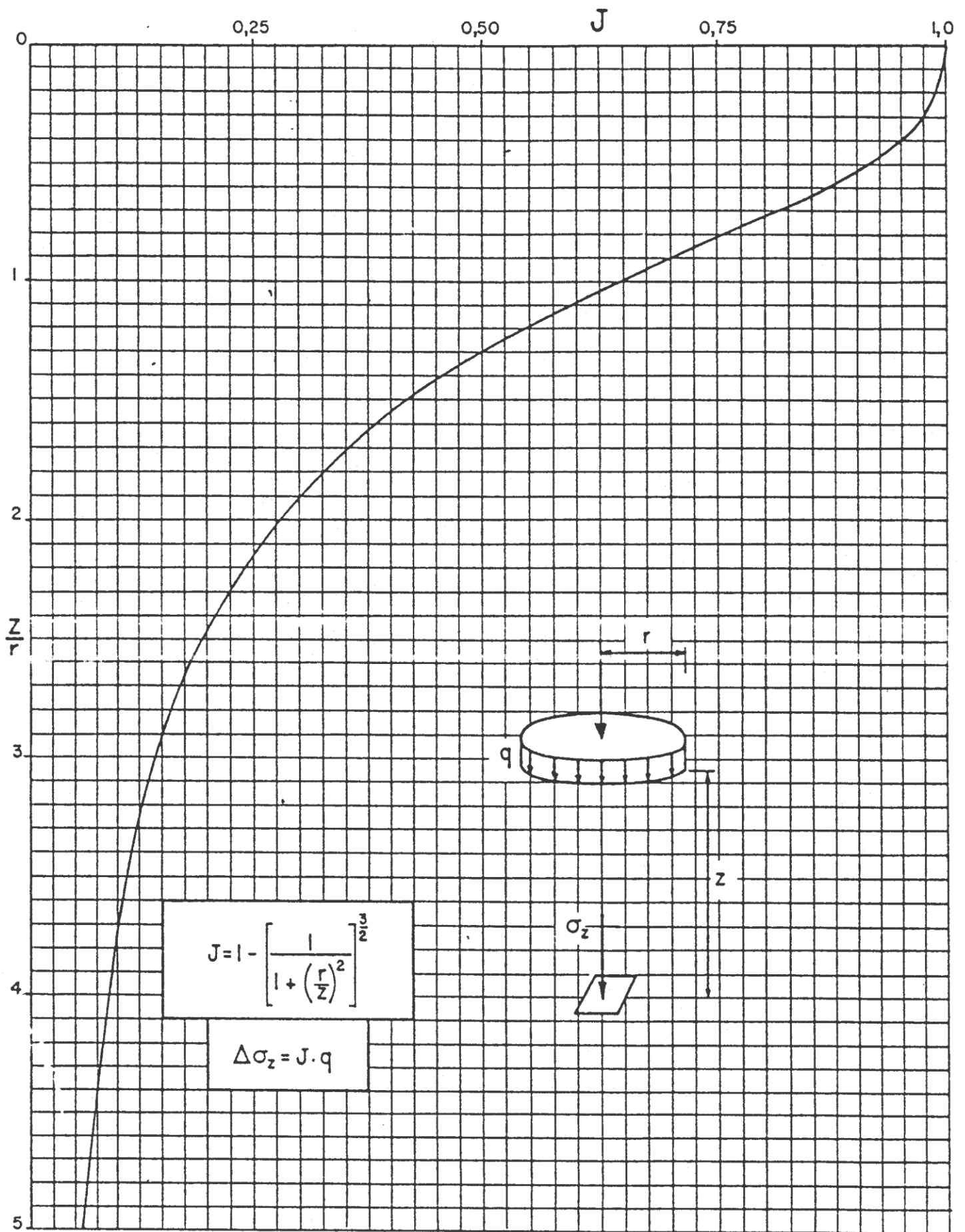
Dans le cas de la figure 4.8 ci-dessus :

$$\begin{cases} (\Delta\sigma_z)_M = q \cdot \frac{a}{a + 2.Z.tg(\alpha)} \\ (\Delta\sigma_z)_P = 0 \end{cases}$$

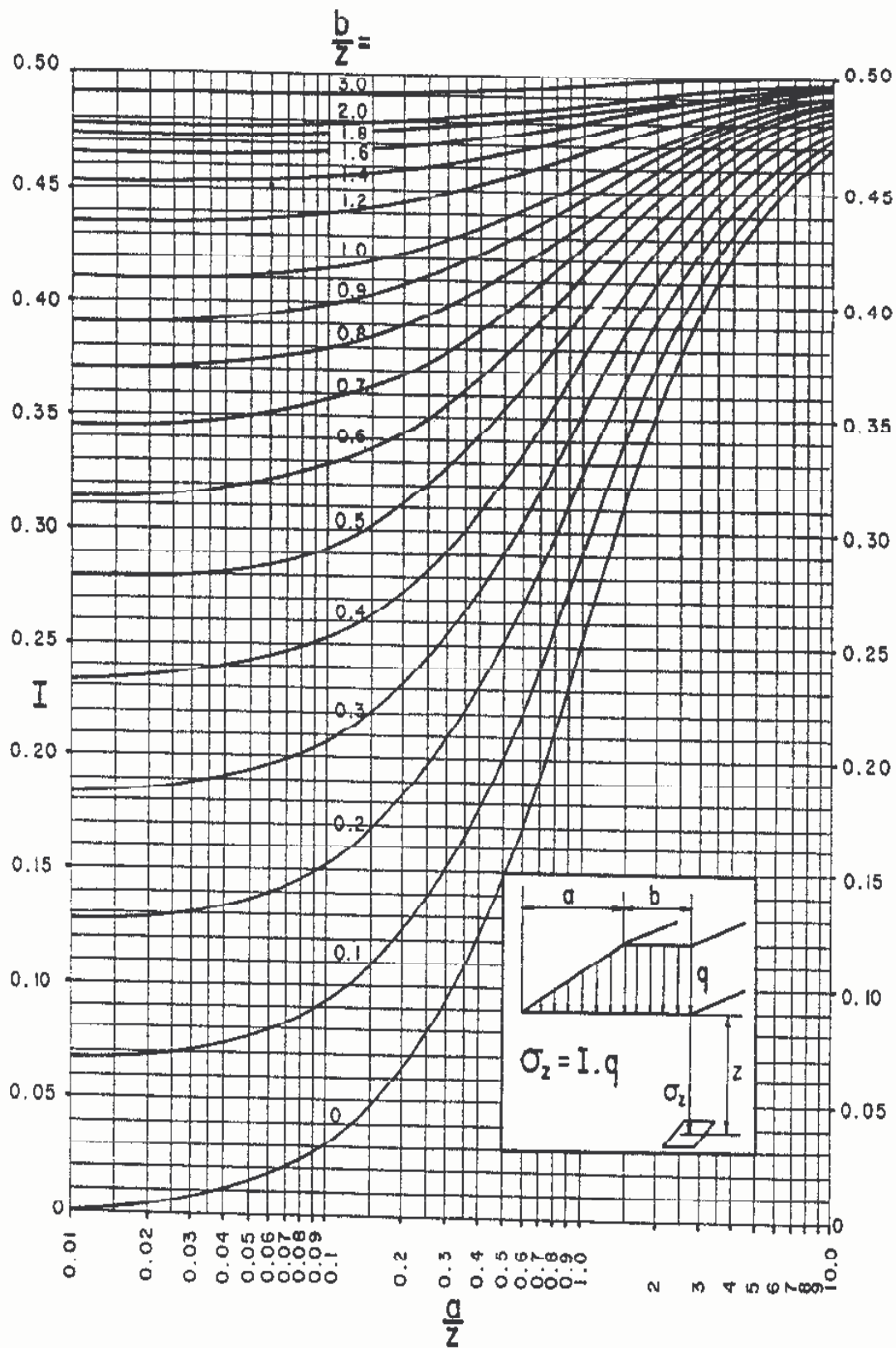
A noter :

La valeur de α est généralement prise égale à 30° .





Abaque 3



Abaque 4