

Chapitre II : Statique des fluides

II.1. Définition :

La statique des fluides est la discipline qui étudie les conditions d'équilibre des fluides au repos. C'est à dire le fluide n'est soumis qu'à un champ de pesanteur que l'on prendra uniforme. Comme la viscosité ne se manifeste que s'il y a mouvement relatif des particules (déformation), la statique des fluides visqueux (ou réel) se confond avec la statique des fluides parfaits.

Nous verrons en particulier dans ce chapitre les équations générales de la statique des fluides, théorème de pascal, la poussée d'Archimède et la grandeur pression

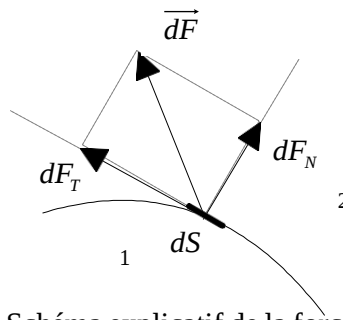


Figure II.1: Schéma explicatif de la force de pression.

Dans un milieu quelconque, donc aussi dans un milieu fluide, la force que la partie (1) exerce sur la partie (2) à travers un élément de surface réel ou fictif dS a une direction quelconque.

Mais cette force $\vec{dF}$ peut toujours être décomposée en :

- une **composante tangentielle** dF_T
- une **composante normale** dF_N

La quantité dF_T / dS représente la contrainte tangentielle et dF_N / dS la contrainte normale.

Par définition on appelle **Pression** la contrainte normale : $p = \frac{dF_N}{dS}$

Remarque :

En statique des fluides, seules interviennent les forces de pression dF_N , normales à l'élément dS . Les forces tangentielles dF_T n'apparaissent qu'en dynamique des fluides : elles correspondent aux frottements visqueux des couches fluides en mouvement les unes par rapport aux autres et par rapport à la paroi de la conduite.

Plusieurs unités existent:

- le pascal (Pa) : unité SI, peu employée en pratique
- le bar (bar) et son sous multiple le millibar (mbar)

- le millimètre de mercure ou Torr
- le millimètre de colonne d'eau ou le mètre de colonne d'eau (m CE)
- l'atmosphère (atm) La correspondance entre ces unités est la suivante: $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 1000 \text{ mbar} \approx 760 \text{ mm de mercure} \approx 10,2 \text{ m CE} \approx 0,987 \text{ atm}$. **La pression atmosphérique** est la pression exercée par l'atmosphère à la surface de la terre. Au niveau de la mer cette pression est équivalente à celle exercée par une colonne d'environ 760 mm de mercure. Elle varie tous les jours légèrement: elle est néanmoins toujours voisine de 1 bar.
- **Pression absolue et pression relative** La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive. La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure: cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.

II.2. Pression en point d'un fluide :

En tout point d'un fluide il existe une certaine pression. Soit un point M dans un fluide. Si on considère une surface imaginaire dS passant par M, la résultante de toutes les forces, agissantes sur dS , des particules de fluides en mouvement désordonné est perpendiculaire à cette surface dS et on peut écrire :

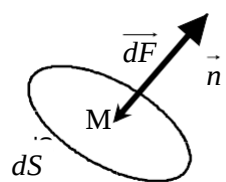
$$\vec{dF} = - p n dS \quad (\text{II.1})$$


Figure II.2: Schéma explicatif de la force de pression en un point.

$\vec{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale à dS orienté vers l'extérieur.

Cette force $\vec{dF}$ dépend évidemment de la surface dS envisagée, mais la pression p_M au point M du fluide ne dépend pas de dS .

II.3. Equation fondamentale de la statique des fluides :

L'objectif de cette partie est de déterminer la distribution de la pression au sein d'un fluide en équilibre. Pour cela, on considère un élément arbitraire (dv) d'un fluide dans un réservoir

parallélépipédique (figure II.3). Le réservoir et le fluide sont en équilibre, alors on peut écrire le premier principe de Newton :

$$\sum \overrightarrow{dF}_{\text{sys}} = \vec{0} \quad (\text{II.2})$$

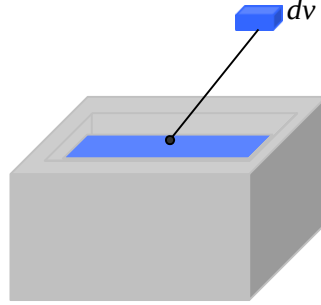


Figure II.3: Réservoir contenant un fluide au repos.

Les seules forces agissantes sur le système dv sont :

- Les forces de pression ;
- Les forces de volume.

Tout d'abord, on commence par l'étude d'un élément fluide ayant les dimensions Δx , Δy et Δz , puis on déduit l'équation différentielle désirée.

La figure II.4 montre les forces agissantes sur les six faces de l'élément fluide.

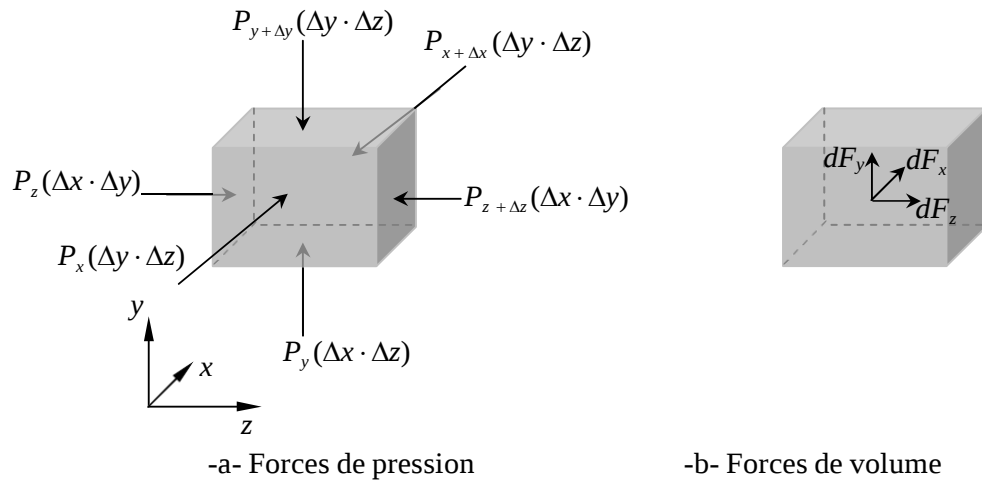


Figure II.4: Forces agissantes sur les six faces de l'élément fluide.

La projection de l'équation (II.2) sur les trois axes donne :

$$\begin{cases} P_x \Delta y \Delta z - P_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + \rho X \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \\ P_y \Delta x \Delta z - P_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z + \rho Y \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \\ P_z \Delta x \Delta y - P_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y + \rho Z \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \end{cases}$$

X , Y et Z sont les composantes de la force active par unité de masse.

En simplifiant l'équation (II.3) on trouve :

$$\begin{cases} -\frac{P_{x+\Delta x} - P_x}{\Delta x} + \rho X = 0 \\ -\frac{P_{y+\Delta y} - P_y}{\Delta y} + \rho Y = 0 \\ -\frac{P_{z+\Delta z} - P_z}{\Delta z} + \rho Z = 0 \end{cases}$$

On sait que quand $\Delta x \rightarrow 0$; $\frac{P_{x+\Delta x} - P_x}{\Delta x} = \frac{\partial P}{\partial x}$. La même règle s'applique pour Δy et Δz .

Alors le système (II.4) devient :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho X = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho Y = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho Z = 0 \end{cases}$$

Les équations (II.5) sont les équations fondamentales de la statique des fluides. L'écriture vectorielle de ces équations est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{F} \quad (\text{II.6})$$

II.4. Surface de niveau

Une surface de niveau se caractérise par une même pression en chacun de ses points. C'est la surface libre d'un liquide qui ; en chacun des ses points, elle est perpendiculaire à la pesanteur. La surface des océans (environ 70 % de la surface terrestre totale) est généralement considérée comme surface de niveau, c'est-à-dire d'une surface équipotentielle du champ de pesanteur. En effet, la surface des océans et des mers est contrôlée essentiellement par la force de pesanteur, avec quelques phénomènes perturbateurs tels les courants marins, les variations de salinité, les marées, la houle causée par les vents, les variations de la pression atmosphérique, etc.

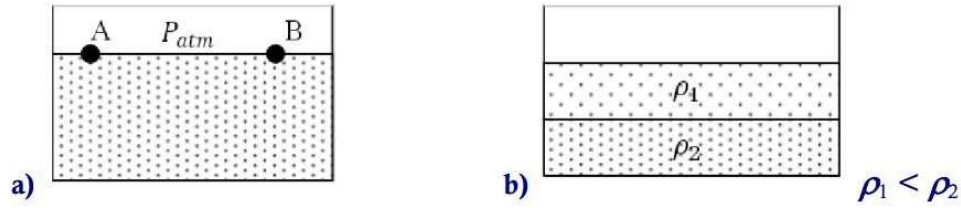


Figure II.5: Surface de niveau : a) Surface libre b) Fluides non miscibles.

II.5. Cas Particulier : Un fluide incompressible dans le champ de pesanteur :

Les forces de volume se réduisent aux seules forces de pesanteur. $\vec{F}$ représente le poids de l'unité de masse du fluide, c'est un vecteur dirigé vers le centre de la terre, son module est égale à l'accélération de la pesanteur. Dans ce cas, les équations fondamentales deviennent :

Pour un fluide incompressible ($\rho = \text{constante}$)

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

On intègre cette équation pour trouver :

$$P = \rho \cdot g \cdot y + P_0 \quad (\text{II.7})$$

P_0 est la pression à la surface du liquide.

Application :

L'utilisation de cette relation est très facile en considérant une colonne d'un fluide dans un tube (figure II.6).

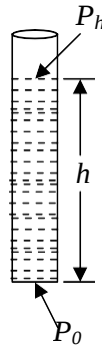


Figure II.6: Variation de la pression en fonction de la hauteur.

La pression P_h est donnée donc par :

$$P_h = P_0 - \rho gh \quad (\text{II.8})$$

Donc la pression en bas de tube est supérieure à celle du haut.

L'équation (II.8) signifie que la différence de pression entre deux points d'un fluide pesant en équilibre est égale au poids d'un cylindre de ce fluide, de base égale à l'unité de surface et de hauteur égale à la différence de niveau des deux points.

II.6. Théorème de pascal :

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

Supposons qu'au point G_1 intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $P + \Delta P_1$.

ΔP_1 étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression ΔP_2 qui en résulte en G_2 .

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre G_1 et G_2 pour le fluide :

$$\text{- à l'état initial: } P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1) \quad (\text{II.9})$$

$$\text{- à l'état final: } (P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \rho g(z_2 - z_1) \quad (\text{II.10})$$

En faisant la différence entre les équations (II.9) et (II.10) on obtient :

$$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0$$

$$\text{D'où} \quad \Delta P_1 = \Delta P_2$$

II.7. Force de poussée d'Archimède :

Les forces exercées par un fluide pesant en équilibre sur un solide complètement immergé, admettent une résultante égale et directement opposée au poids du fluide déplacé, et appliquée au centre de gravité G du fluide déplacé appelé **centre de poussée**.

Stabilité de l'équilibre : l'équilibre est stable si le centre de gravité G est au dessous du centre de poussée C .

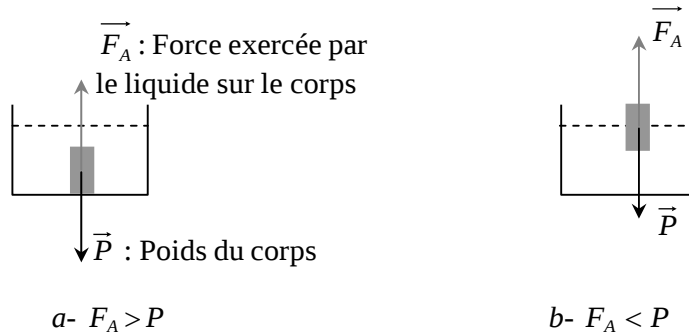


Figure II.7: Schéma explicatif de la force d'Archimède.

La force F_A , lorsque ce corps est immergé, a une intensité plus élevée que la force P exercée sur le corps par la terre (cas b): il monte jusqu'au moment où ces deux forces auront la même intensité, elles s'annulent ($F_A = P$) et le corps flotte. Notez que la force P peut avoir une intensité plus élevée que F_A (cas a), le corps ne monte pas, il a seulement un poids apparent plus faible que son poids réel $\vec{P}$.

Alors, pour un corps flottant on peut écrire :

$$P = F_A = \rho_f g V_f \quad (\text{II.11})$$

ρ_f et V_f sont respectivement la masse volumique et le volume du fluide déplacé. Pour un corps complètement immergé :

$$P - F_A = P_{app} \quad (II.12)$$

Où P_{app} est le poids apparent du corps.

II.8. Calcul des forces de pression :

II.8.1. Résultante des forces de pression sur une paroi plane oblique

Une plaque plane de forme quelconque totalement immergée dans un liquide de masse volumique ρ est représentée sur la figure ci-dessous :

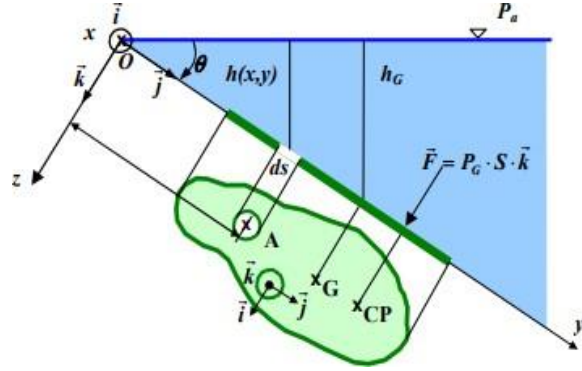


Figure II.8: Résultante des forces de pression [3].

La plaque est inclinée de manière arbitraire d'un angle θ de sorte que la pression qu'elle subit varie. Si on considère une surface élémentaire ds quelconque située à une profondeur h de la surface du liquide sur cette plaque, la pression qu'elle subit est $P = P_a + \rho gh$, par conséquent une force df est telle que :

La force de pression totale s'exerçant sur cette plaque a pour expression :

$$\vec{F} = (P_a S + \rho g \sin(\theta) \iint y dS) \vec{k}$$

Le centre de gravité G de la plaque est par définition, situé dans le plan xOy et défini par :

$$\vec{OG} = \frac{\iint \vec{OA} dS}{S}$$

avec pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\iint x dS}{S} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\iint y dS}{S}$$

On peut donc écrire :

$$\vec{F} = (P_a S + \rho g y_G \sin(\theta) S) \vec{k}$$

d'où :

$$\vec{F} = (P_a + \rho g h_G) S \vec{k} = P_G S \vec{k}$$

En négligeant la force de surface, La force de pression totale a pour expression : $F = \rho g h_G S$

L'intensité de la force exercée par le liquide sur la paroi plane est égale au produit de l'aire de la paroi par la pression effective qui règne au centre de gravité.

II.8.2. Centre de poussée :

La force F ne s'exerce pas au centre de gravité G mais à un point appelé centre de poussée. Les coordonnées du centre de poussée CP sont telles que l'intégration sur la surface totale de la plaque du moment de la force élémentaire PdS autour d'un point tel que le point O doit être égal au moment de la force de pression résultante F autour de ce même point, c'est-à-dire :

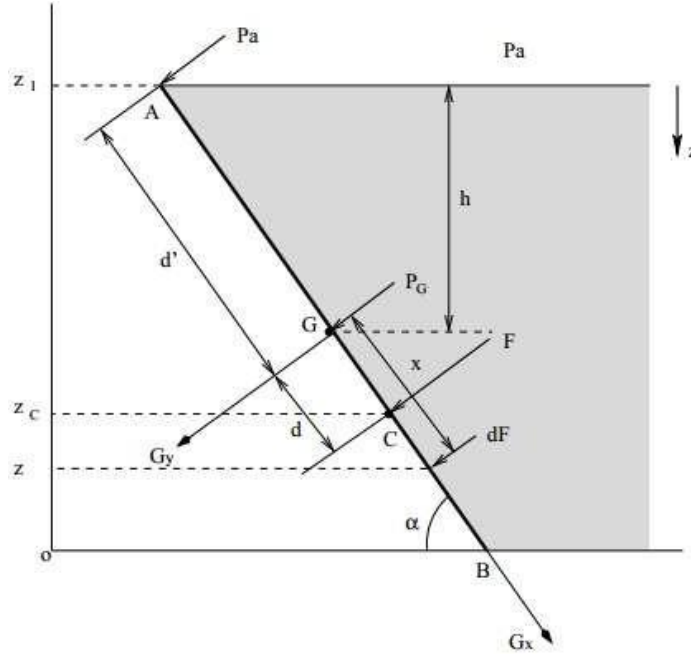


Figure II.9: Centre de poussée [3].

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = \iint_S \overrightarrow{OA} \wedge d\vec{F}$$

$$\iint_S \overrightarrow{OA} \wedge d\vec{F} = \iint_S y \cdot dF \cdot \vec{i} - \iint_S x \cdot dF \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = y_{CP} F \vec{i} - x_{CP} F \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = y_c F \vec{i} - x_c F \vec{j}$$

Par rapport à l'axe (Ox) on a :

$$y_{CP} F = \iint_S y F dS = \iint_S y (P_a + \rho g y \sin(\theta)) dS$$

$$y_{CP} F = P_a \iint_S y dS + \rho g \sin(\theta) \iint_S y^2 dS$$

avec :

$$I_{Ox} = \iint_S y^2 dS$$

$$y_{CP} P_g S = P_a y_G S + \rho g \sin(\theta) I_{Ox}$$

I_{Ox} est le moment d'inertie ou moment quadratique de la surface par rapport à l'axe de référence (Ox).

$$y_{CP} = \frac{P_a}{P_G} y_G + \frac{\rho g \sin(\theta) I_{Ox}}{P_G S}$$

Il est souvent plus facile dans la majorité des cas de connaître le moment d'inertie par rapport à un point comme le point G , c'est à dire le moment d'inertie polaire. En appliquant le théorème de Huygens on a :

$$I_{(Ox)} = I_{Gx} + S y_G^2$$

On peut écrire y_{CP} ainsi :

$$y_{CP} = y_G + \frac{\rho g \sin(\theta) I_{Gx}}{P_G S}$$

De la même manière, par rapport à l'axe (Oy) on aura :

$$x_{CP} P_G S = P_a \iint x dS + \rho g \sin(\theta) \iint x y dS$$

$$x_{CP} = \frac{P_a}{P_G S} x_G + \frac{\rho g \sin(\theta) I_{xy}}{P_G S}$$

avec :

$$I_{xy} = \iint x y dS$$

I_{xy} est le produit d'inertie de la surface par rapport aux axes de références (Ox) et (Oy).

Ce produit d'inertie est nul si l'un des axes est l'axe de symétrie de la surface.

Dans la plupart des cas d'étude, la pression atmosphérique P_a agit des deux côtés de la plaque. La pression au centre de gravité de la plaque devient alors $P_G = \rho g h_G$ et celle au point A, $P = \rho g h$ de sorte que les relations :

$$x_{CP} = \frac{I_{xy} \sin(\alpha)}{h_G S} \quad \text{et} \quad y_{CP} = y_G + \frac{I_{Gx} \sin(\alpha)}{h_G S} \quad (2.50)$$

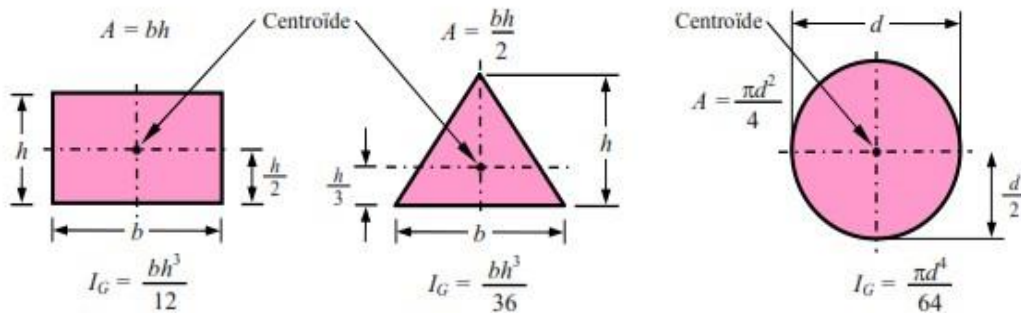
La force F exercée par un liquide sur une surface plane A est égale au produit du poids spécifique ϖ du liquide, par la profondeur h_G du centre de gravité de la surface et par la surface. L'équation est : $F = \varpi h_G A = \rho g h_G A$ d'unités $[N] = [N/m^3] \cdot m \cdot m^2$.

Le produit du poids spécifique par la profondeur du centre de gravité de la surface équivaut à l'intensité de la pression au centre de gravité de cette surface.

La ligne d'action de la force passe par le centre de poussée qui peut être repérée en appliquant la formule suivante :

$$y_{CP} = \frac{I_G}{y_G A} + y_G \quad (2.51)$$

I_G est le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe passant par le centre de gravité (voir Fig. 2.9). Les coordonnées sont mesurées le long du plan à partir d'un axe situé à l'intersection du plan et de la surface du liquide, tous les deux prolongés nécessairement.



Afin de faciliter la résolution, prenons comme référence la surface libre du fluide et comme sens positif, l'axe vertical dirigé vers le bas.

Exemple :

La porte rectangulaire AB est articulée en A (Figure II.14). Sa longueur est $AB = L = 1,5$ m et sa largeur est $W = 2$ m.

- Calculer la résultante des forces F_R exercées par l'eau sur la porte AB.

On donne : $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H = 3 \text{ m}$ et $\theta = 25^\circ$.

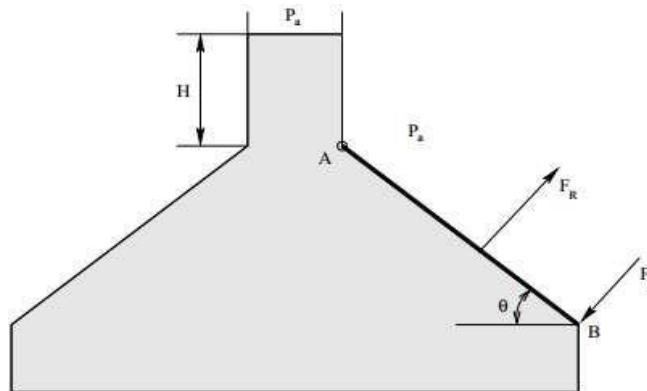


Figure II.10: Exercice d'application : Résultante des forces [3].

Réponse :

Dans le but de faciliter la résolution de cet exercice, faisons un changement de repère lié à la porte AB (Figure II.15).

1- Chaque élément de surface dS est soumis à une force élémentaire dF_R due à la pression du fluide :

$$dF_R = P_{z \text{ eff.}} dS = \rho g z dS = \rho g z W dy$$

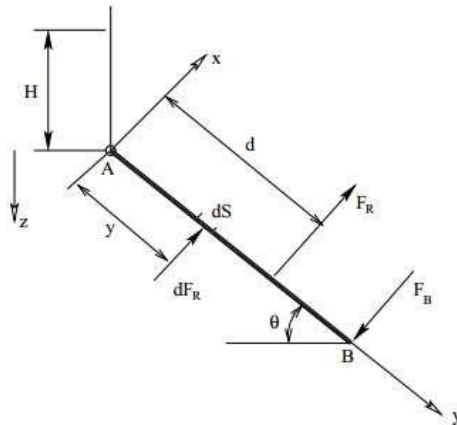


Figure II.11: Changement de repère [3].

Or chaque point de la porte est soumis à la hauteur de pression au dessus du point A
donc :

$$z = H + y \sin \theta$$

d'où l'expression globale de la force élémentaire en chaque point de la porte : dF_R

$$= \rho g W (H + y \sin \theta) dy$$

La résultante des forces est obtenue par intégration des forces élémentaires le long de la
porte : $F_R = \rho g W \int (H + y \sin \theta) dy = \rho g W [HL + L^2/2. \sin \theta] = \rho g WL [HL + L/2. \sin \theta]$

$$F_R = (999. 9, 81 .2 .1, 5. (3 + (1 ,5 /2). \sin 25) = 97, 52 \text{ kN.}$$

