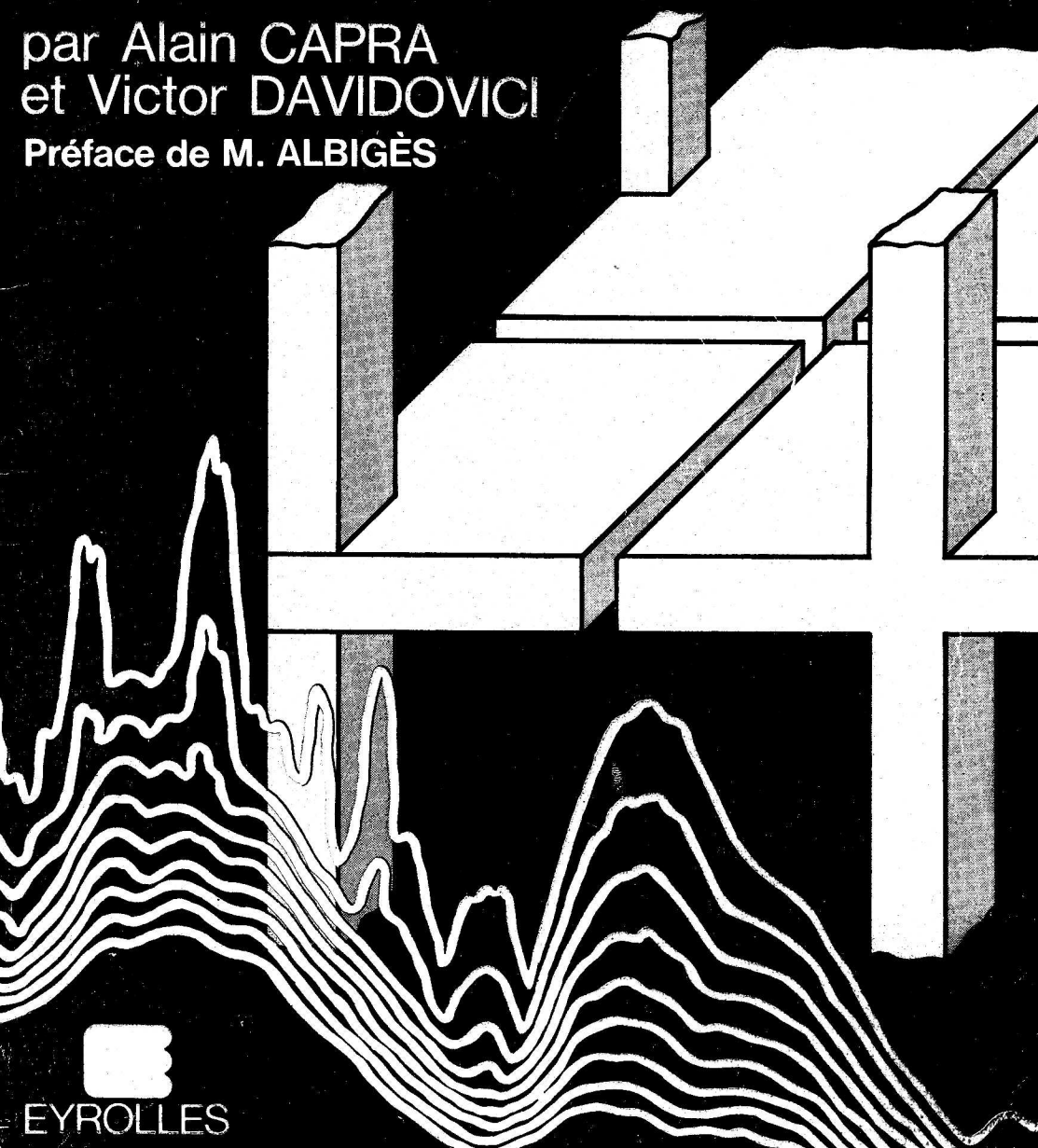


Collection UTI

CALCUL DYNAMIQUE des STRUCTURES en ZONE SISMIQUE

par Alain CAPRA
et Victor DAVIDOVICI

Préface de M. ALBIGÈS



EYROLLES

Des mêmes auteurs aux Editions Eyrolles

Guide pratique d'utilisation des règles B.A.E.L. 80 (1981)

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). »

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. »

COLLECTION U.T.I.

CALCUL DYNAMIQUE DES STRUCTURES EN ZONE SISMIQUE

par

Alain CAPRA

*Professeur de dynamique
des structures au CHEC
Ingénieur à la Direction Technique
Dragages et Travaux Publics*

et **Victor DAVIDOVICI**

*Conseiller en
Génie sismique
Direction Technique de la SOCOTEC*

PRÉFACE de

Maurice ALBIGÈS

*Directeur du Centre de Hautes Etudes de la Construction
Président Directeur Général de la SOCOTEC*

Deuxième édition
revue et corrigée


EYROLLES

61, boulevard Saint-Germain, 75005 Paris
1982

Si vous désirez être tenu au courant de nos publications, il vous suffit d'adresser votre carte de visite au :

Service « Presse », Éditions EYROLLES
61, Boulevard Saint-Germain,
75240 PARIS CEDEX 05,

en précisant les domaines qui vous intéressent.
Vous recevrez régulièrement un avis de parution des nouveautés en vente chez votre libraire habituel.

PRÉFACE

Si la survenance des séismes est encore, pour une grande part, un phénomène imprévisible, on ne considère plus, depuis quelques années, comme une inéluctable fatalité, les catastrophes (destruction des ouvrages, nombreuses pertes de vies humaines) qu'ils sont susceptibles de provoquer. De ce fait, le comportement des constructions, sous action dynamique, est devenu un chapitre de la théorie des structures qu'aucun Ingénieur de génie civil ne peut ignorer.

L'activité professionnelle des Auteurs les a souvent confrontés aux problèmes posés par les constructions édifiées en zone sismique et leur a permis d'acquérir ainsi, dans ce domaine, une grande expérience.

L'ouvrage qu'ils présentent a été conçu dans un double objectif, didactique et pratique et s'adresse donc, tant aux Etudiants qu'aux Ingénieurs expérimentés.

Dans cet esprit, et après avoir rappelé les notions générales concernant les séismes et leurs manifestations, les auteurs abordent le problème de l'oscillateur simple qui permet d'ouvrir le lecteur à la compréhension des phénomènes dynamiques, d'introduire la notion de spectre de réponse et de susciter l'intuition du comportement des structures sous l'action des séismes.

Le chapitre suivant est consacré aux cas habituels de structure constituée par des oscillateurs multiples. L'étude théorique est conduite par la méthode usuelle de la décomposition modale.

Les auteurs passent ensuite en revue les diverses méthodes pratiques de calculs en détaillant toutes les étapes de l'étude et en précisant celle qui est la mieux adaptée au type de structure envisagée. Ils donnent des indications sur le choix du modèle dont le comportement est le mieux approprié pour rendre compte de celui de la structure réelle, tant en vue du calcul manuel que du calcul sur ordinateur.

Enfin, dans le chapitre Applications, de nombreux exemples sont traités; ils sont classés dans un ordre de complexité croissante de façon à conduire naturellement l'Ingénieur ou l'Etudiant à accéder à la compréhension et à l'intuition du phénomène physique. Les derniers exemples concernent des cas concrets, fréquemment rencontrés dans la pratique; ils permettent de familiariser le Lecteur à l'application de la théorie sur le plan des calculs manuel et automatique.

L'abord progressif des connaissances, le caractère actuel des théories étudiées, la nature pratique des méthodes de calculs examinées, les nombreux exemples traités font de cet ouvrage un outil remarquable pour tous ceux qui, Etudiants ou Ingénieurs, veulent acquérir, dans le domaine du calcul dynamique des structures, une réelle formation.

Maurice ALBIGÈS

Directeur du Centre de Hautes Etudes de la Construction
Président Directeur Général de la SOCOTEC

TABLE DES MATIÈRES

Préface	vii
1. Généralités sur les séismes	1
1.1. Ondes sismiques	1
1.2. Intensités	6
1.3. Magnitudes	9
1.4. Comportement du sol	10
2. Oscillateur simple	13
2.1. Introduction	13
2.2. Formulation de l'équation du mouvement	14
2.3. Oscillations libres	15
2.3.1. Oscillateur non-amorti	15
2.3.2. Oscillateur amorti	16
2.4. Oscillations forcées	18
2.4.1. Cas particulier de l'excitation harmonique	19
2.4.2. Cas général	21
2.5. Détermination du coefficient d'amortissement	22
2.5.1. Energie dissipée par amortissement	23
2.5.2. Mesure du coefficient d'amortissement	24
2.5.3. Valeurs pratiques du coefficient d'amortissement	26
2.6. Excitation par déplacement d'appui (cas du séisme)	27
2.6.1. Calcul du déplacement relatif	27
2.6.2. Pseudo-accelération	28
3. Spectres de réponse	30
3.1. Spectre de déplacement et de pseudo-accelération	30
3.2. Spectre de calcul	38
3.3. Spectre réglementaire	39
3.4. Influence du sol sur le spectre de réponse	40
3.5. Utilisation des spectres de réponse	42

4. Oscillateur multiple	44
4.1. Définitions	44
4.1.1. Matrice de rigidité	45
4.1.2. Matrice des masses	47
4.1.3. Matrice d'amortissement	48
4.2. Formulation de l'équation du mouvement	48
4.3. Oscillations libres	49
4.4. Oscillations forcées	52
4.5. Excitation par déplacement d'appui (cas du séisme)	54
5. Méthodes de calcul	60
5.1. Etude dans le temps d'après un accélérogramme	60
5.1.1. Calcul des modes propres de vibrations	60
5.1.2. Calcul des réponses modales	61
5.1.3. Superposition des réponses modales	61
5.1.4. Prise en compte d'une excitation sismique selon trois directions	61
5.1.5. Spectres de plancher	62
5.2. Etude à l'aide d'un spectre de réponse	62
5.2.1. Calcul des réponses modales	62
5.2.2. Sélection des modes utiles	63
5.2.3. Choix du coefficient d'amortissement	64
5.2.4. Superposition des réponses modales	65
5.2.5. Prise en compte d'une excitation sismique selon trois directions	72
5.3. Règles parasismiques P.S. 1969	73
5.3.1. Calcul du premier mode de vibration	74
5.3.2. Calcul des forces statiques équivalentes	74
5.3.2.1. Forces horizontales	74
5.3.2.2. Forces verticales	75
5.3.2.3. Couples d'axe vertical	75
5.3.3. Calcul des efforts dans la structure	75
5.4. Choix de la méthode de calcul	76
6. Modélisation des structures	78
6.1. Remarque générale sur les modes de vibration des structures	79
6.1.1. Cas des structures symétriques	79
6.1.2. Cas des structures non symétriques	81
6.2. Modélisation des structures	82
6.2.1. Modélisation pour le calcul direct des efforts	82
6.2.2. Modélisation pour le calcul des pseudo-accelerations	83
6.3. Modélisation des masses	85
6.3.1. Cas du séisme horizontal	85
6.3.2. Cas du séisme vertical	86
6.4. Modélisation du sol	87
6.4.1. Influence du sol sur la réponse d'une structure. Interaction sol-structure	87
6.4.2. Modélisation par des ressorts	89
6.4.3. Modélisation par éléments finis	90

6.5. <i>Modélisation des structures des bâtiments courants</i>	91
6.5.1. Modélisation des éléments de contreventement	93
6.5.2. Modélisation des planchers	94
7. Applications	96
7.1. <i>Oscillateur simple en rotation. Moment d'inertie massique</i>	96
7.1.1. Moment d'inertie massique	96
7.1.2. Période des oscillations libres	98
7.2. <i>Oscillateur double</i>	99
7.3. <i>Structure rigide sur sol élastique</i>	100
7.3.1. Cas du séisme vertical	101
7.3.2. Cas du séisme horizontal	101
7.3.3. Exemple de calcul	105
7.4. <i>Bâtiments à soubassement rigide</i>	107
7.5. <i>Mode local de vibration</i>	109
7.6. <i>Calcul d'un portique par la méthode du spectre de réponse. Superposition quadratique des efforts</i>	112
7.6.1. Modélisation pour le calcul des pseudo-accélérations	113
7.6.2. Calcul des modes propres de vibration	115
7.6.3. Modélisation pour le calcul des efforts	119
7.6.4. Superposition quadratique des efforts	121
7.6.5. Méthodes approchées	123
7.7. <i>Etude d'un réfrigérant</i>	125
7.8. <i>Etude d'un pylône métallique</i>	131
7.9. <i>Etude d'un bâtiment de grande hauteur</i>	133
7.10. <i>Adaptation des règles P.S. 1969 pour l'étude d'une structure particulière</i>	141

ANNEXES

A. Rappel sur le calcul matriciel	145
A.1. <i>Définitions</i>	145
A.1.1. Vecteurs	145
A.1.2. Matrices	145
A.2. <i>Opérations sur les vecteurs et les matrices</i>	147
A.2.1. Produit de deux vecteurs	147
A.2.2. Combinaison linéaire de matrices	147
A.2.3. Produit d'une matrice par un vecteur	148
A.2.4. Forme bilinéaire	149
A.2.5. Forme quadratique	149
A.2.6. Déterminant d'une matrice	150
A.2.7. Propriétés des opérations sur les vecteurs et les matrices ..	150
B. Propriétés des vecteurs modaux	151
C. Calcul approche des périodes propres par la méthode de Rayleigh	153
C.1. <i>Exposé de la méthode</i>	153

C.2. Application	155
C.2.1. Première variante	155
C.2.2. Deuxième variante	157
C.2.3. Solution exacte	157
D. Calcul des périodes propres d'oscillation. Formules résolues	159
D.1. Masse concentrée au sommet d'une console de section constante et de masse non négligeable	159
D.2. Tronc de cône	160
D.3. Masse unique située sur une poutre de masse négligeable	161
D.4. Poutres de section constante et de masse uniformément répartie	162
D.5. Plaques rectangulaires: Période du premier mode de vibration	163
BIBLIOGRAPHIE	164

GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉISMES

1.1. ONDES SISMIQUES

Naissance du séisme

Le tremblement de terre correspond à une vibration du sol provoquée par une libération soudaine de l'énergie de déformation accumulée dans la croûte terrestre ou dans la couche sous-jacente appelée manteau.

Une approche pour l'étude de ce phénomène consiste à considérer que les roches se comportent comme des matériaux élastiques et que les séismes sont produits par la relaxation brusque de contraintes lors du glissement suivant un plan de faille. On passe donc d'un premier état d'équilibre correspondant à des contraintes importantes à un second état où après glissement, ces contraintes ont disparu partiellement ou en totalité.

La rupture cesse de se propager lorsque l'énergie potentielle de déformation est épuisée; la faille ainsi créée coupe les terrains sans égard pour la morphologie superficielle et constitue une surface de moindre résistance. Si les déformations continuent dans la même région, c'est donc de préférence sur une faille déjà formée que se produit la nouvelle rupture. Cette faille « rejoue », et c'est là, beaucoup plus fréquemment que la formation d'une faille nouvelle, la cause ordinaire des séismes.

Ce concept de glissement le long d'une faille est à la base des études sur les tremblements de terre; il a été principalement développé à partir d'observations de la faille de San Andrea (Californie), dans laquelle les séismes se produisent à des profondeurs de moins de 15 kilomètres.

L'endroit où se produit le séisme est appelé foyer ou hypocentre (fig. 1.1) et le point de la surface du sol directement au-dessus est appelé épïcêtre.

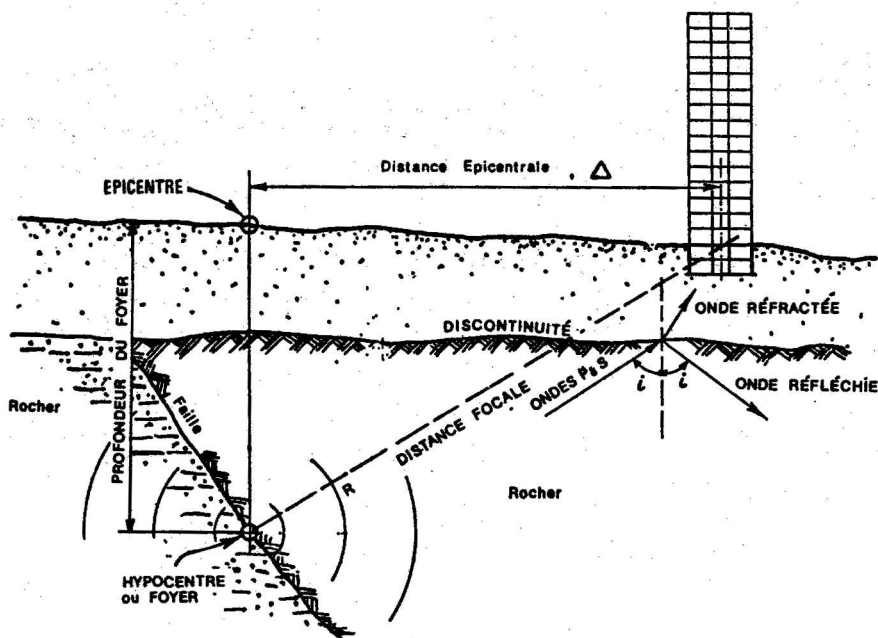


FIG. 1.1.

Propagation des ondes

A partir du foyer, la secousse sismique se propage sous forme d'ondes de divers types, qui, compte tenu de l'hétérogénéité du sol, engendrent en surface un mouvement complexe difficilement prédictible en un site donné.

On peut distinguer les types d'ondes suivants:

a) Ondes de volume

Elles prennent naissance dans le foyer et se propagent à l'intérieur de la terre sous deux formes:

* *Ondes P ou ondes longitudinales*: Ces ondes se propagent avec une vitesse de 7 à 8 km/s et s'accompagnent d'un changement de volume (compression et dilatation alternées).

* *Ondes S ou ondes transversales*: Ces ondes se déplacent avec une vitesse de 4 à 5 km/s et s'accompagnent d'une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, provoquant un cisaillement sans changement de volume.

A la différence des ondes longitudinales, les ondes transversales ne peuvent se propager dans les milieux liquides ou gazeux, en raison de l'incapacité de ces milieux à transmettre les efforts de cisaillement.

b) Ondes de surface

Les ondes de volume qui arrivent à la surface de la terre produisent des ondes de surface n'intéressant le sol que sur une profondeur extrêmement faible.

On distingue principalement:

* *Les ondes R ou ondes de Rayleigh*: Ce sont des ondes pour lesquelles les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation. Ce mouvement est semblable au mouvement de la houle (fig. 1.2) et entraîne des compressions (ou des tractions) ainsi que des cisaillements dans le sol.

* *Les ondes Q ou ondes Love*: Ce sont des ondes pour lesquelles les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface, perpendiculai-

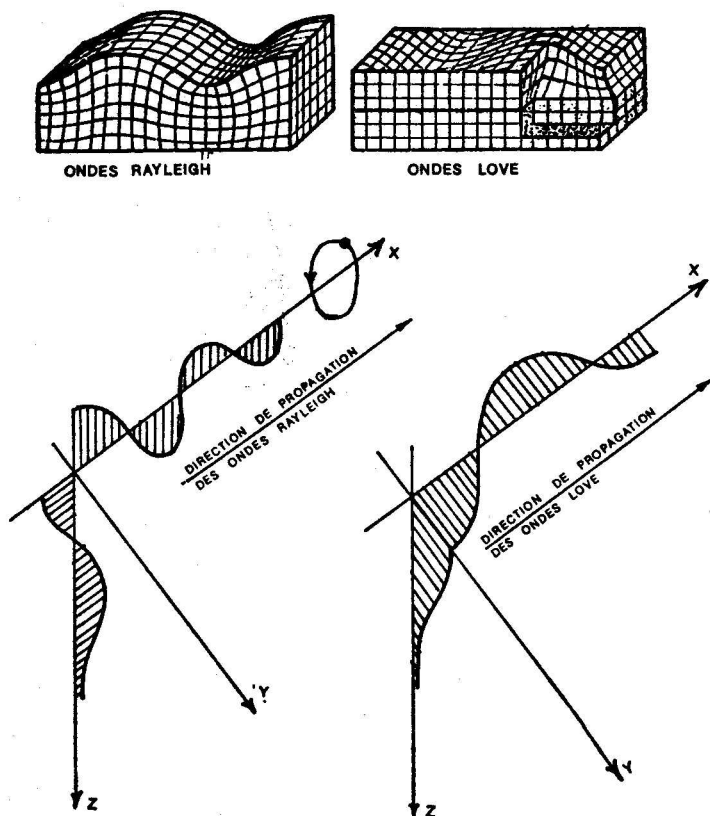


FIG. 1.2. — Ondes Rayleigh et ondes Love

rement à la direction de propagation; elles n'engendrent que des contraintes de cisaillement.

Les ondes de surface ont une vitesse de propagation de 1,5 à 5 km/s dans les terrains compacts ou rocheux et de 0,5 à 1,5 km/s dans les terrains meubles.

Si on assimile le sol à un milieu élastique et homogène caractérisé par le module d'élasticité longitudinal E , le coefficient de Poisson ν et la masse volumique ρ , la vitesse v_p des ondes P est donnée par:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (1.1)$$

et la vitesse v_s des ondes S par:

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1.2)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \\ G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \right\} \text{ constantes de Lamé} \quad (1.3)$$

Le rapport des vitesses de propagation des ondes P et S peut se mettre sous la forme:

$$\frac{v_p}{v_s} = \sqrt{\frac{2(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)}} \quad (1.4)$$

Ce rapport ne dépend que du coefficient de Poisson:

$$\text{pour } \nu = 0 \quad \frac{v_p}{v_s} = 1,41$$

$$\text{pour } \nu = 0,15 \quad \frac{v_p}{v_s} = 1,56$$

$$\text{pour } \nu = 0,25 \quad \frac{v_p}{v_s} = 1,71$$

L'onde longitudinale P se propage donc, environ une fois et demie plus vite que l'onde transversale S . C'est le train d'ondes P qui est tout d'abord enregistré par les séismographes.

Si l'on connaît les vitesses v_p et v_s ainsi que les écarts qui existent entre le temps d'arrivée des ondes P et S , on peut calculer la distance entre le foyer et le point d'enregistrement.

Ce calcul, à partir d'une seule station, ne permet pas de déterminer la direction dans laquelle se trouve le foyer, mais en utilisant simultanément les enregistrements de plus de trois stations, on pourra déterminer sa position.

Lorsqu'un front d'onde de volume rencontre la surface de séparation de deux couches de terrains ayant des propriétés physiques différentes, une onde est réfléchiée et revient en arrière dans le premier milieu, une autre est transmise par réfraction dans le second milieu.

Après réflexion ou réfraction, la nature des ondes (P ou S) peut changer: par exemple une onde P donne naissance à deux ondes réfléchies (P et S) et deux ondes réfractées (P et S).

Pendant la propagation d'une onde sismique, à chaque surface de séparation de deux milieux, il y a réfraction et passage d'un type d'onde à un autre, si bien qu'au niveau du sol, le signal sismique a un aspect tout à fait aléatoire.

Mouvements à la surface du sol

La connaissance de la nature des sources sismiques ainsi que des lois de propagation des ondes, n'est qu'une étape vers la détermination du risque sismique, le problème principal étant celui de l'identification des mouvements au niveau du sol.

Les mouvements du sol enregistrés lors d'un séisme se mettent principalement sous la forme d'un accélérogramme qui représente la variation de l'accélération dans une direction donnée en fonction du temps; on peut de même enregistrer la vitesse ou le déplacement (fig. 1.3).

En général les secousses sismiques ont une durée d'environ 30 s.

On lit sur l'accélérogramme l'accélération maximale du sol (fig. 1.3), paramètre important pour la définition du risque sismique.

Il convient de noter qu'en un point du sol donné, les mouvements lors d'un séisme s'effectuent dans toutes les directions à l'horizontale comme à la verticale.

On a constaté d'après les enregistrements effectués à ce jour, qu'il n'y a pas de direction horizontale privilégiée; par exemple les accélérogrammes du séisme de San Francisco du 22 mars 1957 enregistrés à Golden Gate Park suivant la direction Est-Ouest et Nord-Sud, montrent que les accélérations maximales sont comparables (fig. 1.4).

Les mouvements suivant les trois directions de l'espace, sont indépendants, c'est-à-dire que le mouvement dans une direction donnée ne peut être déduit du mouvement suivant les deux autres directions; il faut donc, pour l'étude de la réponse des constructions aux tremblements de terre, disposer pour un site donné d'un ensemble de trois accélérogrammes suivant deux directions horizontales et une direction verticale.

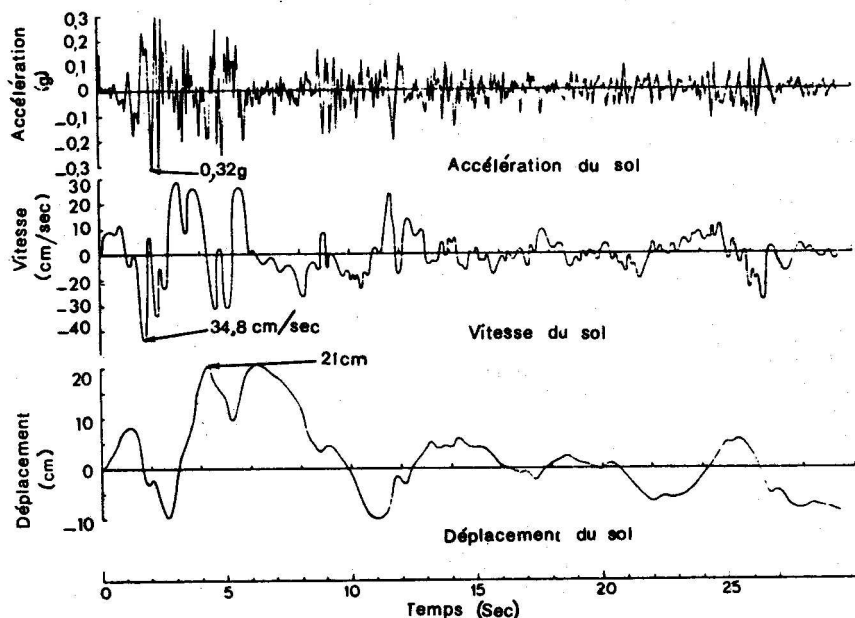


FIG. 1.3. — Séisme de El Centro (Californie) du 18 mai 1940, composante Nord-Sud

L'amplitude du mouvement vertical est nettement inférieure à celle du mouvement horizontal; il est généralement admis de prendre un rapport de 2/3 entre ces amplitudes (cf. § 5.15).

Pour un site donné, il existe très rarement un nombre suffisant d'enregistrements de séismes significatifs; ceci explique que l'on utilise souvent des enregistrements faits en Californie, région actuellement bien étudiée, ou que l'on construise des accélérogrammes artificiels qui tiennent compte de la géologie locale. L'établissement des accélérogrammes comporte donc une grande part d'approximation.

1.2. INTENSITÉ

L'intensité mesure l'importance d'un séisme en un lieu donné d'après les manifestations ressenties par la population et les dégâts qu'il a provoqués.

Pour un séisme donné, l'intensité dépend de la distance à l'épicentre; elle décroît généralement quand cette distance augmente, mais des anoma-

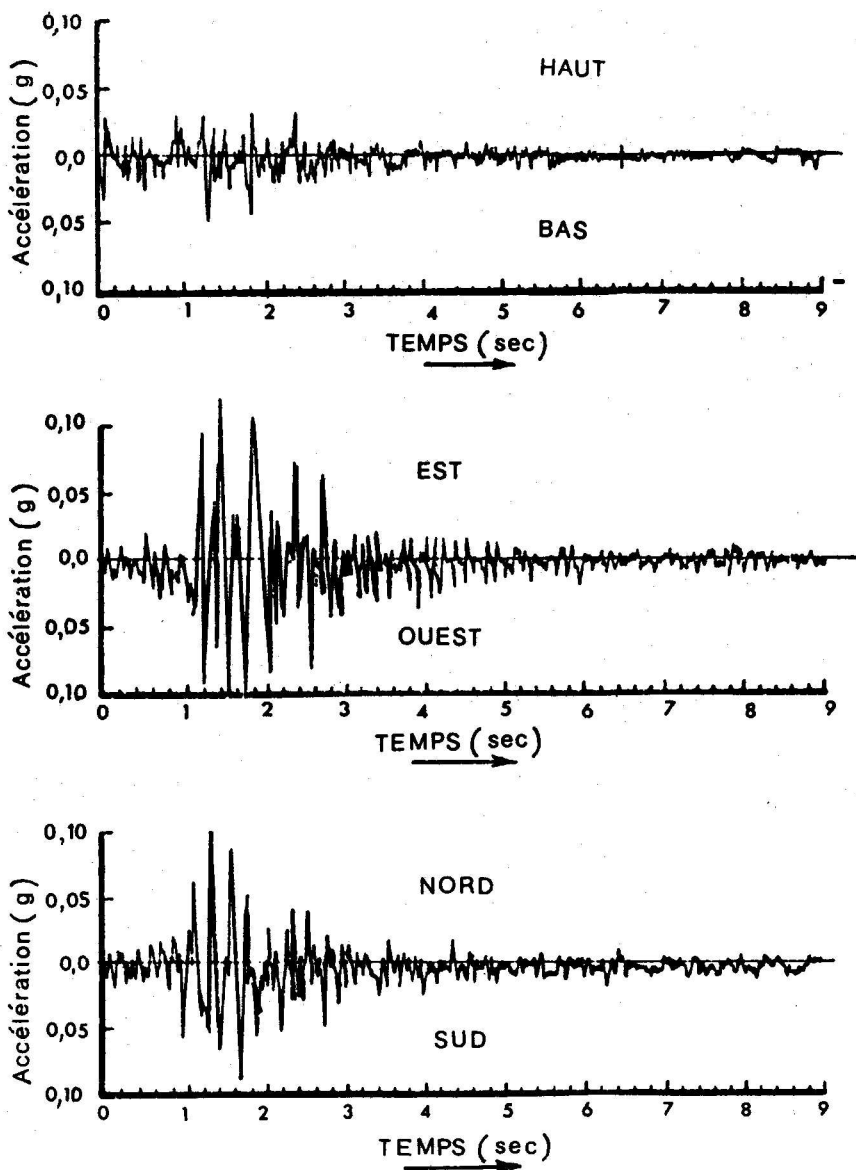


FIG. 1.4. — Séisme de San Francisco du 22 mars 1967 enregistré à Golden Gate Park

lies locales peuvent apparaître, dues à des conditions géologiques particulières.

Différentes échelles d'intensité ont été définies, qui classent les effets

sismiques suivant leur importance croissante, à l'aide de descriptions conventionnelles:

a) *L'échelle macrosismique internationale d'intensité*, et *l'échelle Mercalli*, très voisines décrivent les effets communément observés des tremblements de terre sur l'environnement, les constructions et les sens de l'homme:

Degré I — secousse imperceptible à l'homme.

Degrés II-III — secousse ressentie par un faible nombre de personnes.

Degrés IV-V — séisme ressenti par de nombreuses personnes.

Degré VI — séisme ressenti par la plupart des personnes, cloches mises en branle.

Degré VII — dommages légers aux constructions.

Degrés VIII-IX — dommages importants aux constructions, apparition de fissures dans le sol.

Degré X — destruction générale des bâtiments.

Degrés XI-XII — catastrophes.

b) *L'échelle macrosismique M.S.K.*, plus précise que les précédentes, prend en compte pour l'évaluation des dégâts, le type de construction et le pourcentage des bâtiments affectés.

Ces estimations subjectives sont utiles pour évaluer l'importance des tremblements de terre lorsque des enregistrements ne sont pas disponibles; on peut ainsi estimer le risque sismique pour un site donné et « caler » le spectre de réponse, c'est-à-dire faire correspondre à chaque degré d'intensité une valeur d'accélération maximale du sol (cf. § 3.3).

Cette méthode est peu précise, car de nombreux facteurs interviennent, tels que: la densité et la répartition de la population dans la zone sismique, le type et la qualité de la construction, la durée du tremblement de terre, etc., et rendent difficile l'établissement d'une relation entre les mouvements du sol et les effets que ce mouvement provoque.

De plus, pour une même valeur de l'accélération maximum du sol, des secousses peuvent avoir des effets différents selon leur composition fréquentielle et la nature du sous-sol.

La connaissance de l'accélération maximale du sol ne peut donc suffire pour évaluer la réponse d'une structure à un séisme. Cette réponse dépend, en effet, de la façon dont les divers modes propres de vibration de la structure sont excités. La forme de l'excitation sismique est donc essentielle, de même que sa durée.

Ainsi, pour effectuer un calcul dynamique, on doit disposer d'un *accélérogramme* exprimant les variations de l'accélération du sol, en fonction du temps, ou bien du spectre de réponse qui en est déduit (chap. 3).

1.3. MAGNITUDE

La magnitude, définie en 1935 par Richter pour les séismes de Californie, est une fonction de l'amplitude maximum qu'enregistrerait un sismographe particulier à 100 km de l'épicentre.

Cette définition de la magnitude et l'échelle qui en résulte sont actuellement utilisées d'une manière universelle.

En pratique, la magnitude d'une secousse sismique est déterminée d'après les enregistrements des mouvements du sol effectués en un certain nombre de points d'observation situés à des distances quelconques de l'épicentre.

A partir d'une étude statistique, on a pu établir une corrélation entre l'énergie E (exprimée en ergs) libérée par un séisme et la magnitude M , qui se traduit par la relation empirique simplifiée:

$$\log E = 9,9 + 1,9 M - 0,024 M^2$$

Il est à remarquer dans cette relation que l'énergie est multipliée par un facteur 43 quand la magnitude augmente de $M = 5$ à $M = 6$.

Caractéristique intrinsèque d'une secousse sismique, la magnitude mesure donc l'énergie totale libérée et ne doit évidemment pas être confondue avec l'intensité qui évalue les effets destructeurs en un lieu particulier.

L'étude de la relation existant entre la magnitude et l'intensité observée à une distance donnée de l'épicentre est l'un des problèmes importants qui se posent en matière de génie sismique.

Si l'on ne tient pas compte des conditions géologiques locales qui peuvent produire des amplifications du mouvement du sol, l'intensité diminue à mesure que l'on s'éloigne de l'épicentre. Par exemple, le tableau (*) ci-après indique la variation des intensités en fonction de la distance constatées lors du séisme de Kern County (Taft), Californie, du 21 juillet 1952, séisme ayant une magnitude de 7,6 sur l'échelle de Richter.

On peut remarquer d'après le tableau et la carte correspondante (fig. 1.5) que l'intensité décroît de la valeur 11 mesurée à Taft à 47 km de l'épicentre à la valeur 4 à 400 km. A ces valeurs de l'intensité correspondent respectivement des accélérations maximum du sol de 0,18 g et 0,004 g, cette dernière valeur donnant des effets négligeables.

Contrairement à l'intensité qui apparaît limitée supérieurement par définition au degré XII, la magnitude peut atteindre n'importe quelle valeur.

(*) B. GUTENBERG and C. RICHTER, *Earthquake magnitude intensity, energy and acceleration*, B.S.S.A. 1956.

Séismes du Kern County (Taft),
Californie, 21 juillet 1952, $M = 7,6$

Lieu	Distance épicentrale D (km)	Intensité suivant l'échelle Mercalli	Accélération maximum du sol (% g)
Taft	47	11	18
Santa Barbara	90	7	6.4
Hollywood	120	7	3.2
Pasadena	120	5.5	3.2
Westwood	120	6	2
Los Angeles	124	7	2
Vernon	130	6	3.2
San Luis Obispo	157	6	1.3
Long Beach	163	6.5	1.3
Colton	185	6	1.3
Bishop	275	5.5	1.6
Hollister	303	5	0.8
San Diego	310	4.5	0.4
San José	370	4	0.4
Hawthorne	390	4	0.32
Hoover Dam	405	4	0.26
El Centro	406	4	0.4

La plus forte magnitude qu'on ait pu estimer est celle du tremblement de terre de Lisbonne en 1755, qui aurait été de 9,25; toutefois, il n'a pas été enregistré de magnitude supérieure à 8,75. En France, les plus fortes magnitudes sont de l'ordre de 6.

Enfin, il est à noter que :

- un séisme de magnitude élevée ($M = 8$, par exemple), ne donne naissance qu'à des intensités faibles et n'a donc pas d'effet destructeur si son foyer est profond (plus de 100 km);
- un séisme de magnitude moyenne, tel que celui d'Agadir ($M = 5,75$) qui a libéré 3 400 fois moins d'énergie que le précédent, a donné naissance à des intensités XI dans la zone épicentrale parce que son foyer n'était qu'à 3 km de profondeur.

1.4. COMPORTEMENT DU SOL

Lors des tremblements de terre, une instabilité du sol peut apparaître qui entraîne des déplacements importants de la surface; il en résulte généralement des dégâts considérables dans les structures.

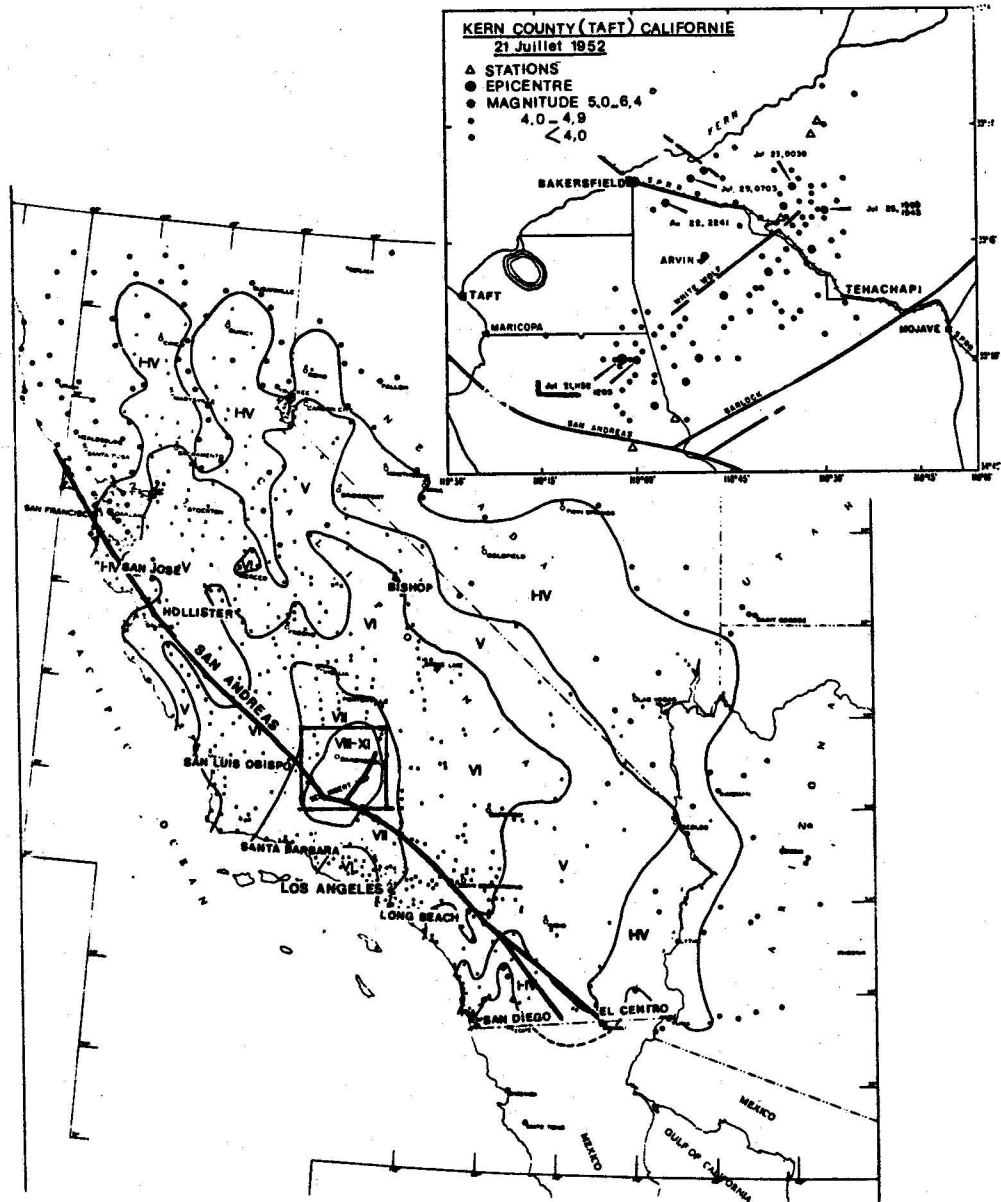


FIG. 1.5. — Séisme du Kern County (TAFT) Californie 21 juillet 1952

Ainsi, un sol ayant une structure granulaire de faible compacité, comme par exemple un remblai récent, risque de présenter des tassements importants après passage des ondes sismiques; il s'agit en quelque sorte d'une consolidation sous l'effet des vibrations.

Lorsque le terrain est en pente, ce phénomène peut aussi provoquer des glissements.

Dans les sols saturés d'eau et composés de matériaux à structure granulaire de faible compacité, les vibrations font apparaître des pressions interstitielles supplémentaires dont l'importance est parfois suffisante pour mettre les grains en flottaison. Ce phénomène appelé liquéfaction provoque une instabilité dont la conséquence est parfois le renversement des bâtiments comme à Niigata (Japon) lors du séisme de 1967.

Il est évidemment impossible de justifier la stabilité d'une construction lorsque le sol présente un danger de tassement important ou de liquéfaction; on doit, dans ce cas, si le site est imposé, améliorer par divers procédés le terrain de fondations (compactage, chargement, stabilisation, drainage, etc.).

Par la suite, on étudiera la réponse d'une structure à une excitation sismique dans l'hypothèse d'un sol stable et ne présentant pas de déformation permanente.

OSCILLATEUR SIMPLE

2.1. INTRODUCTION

Un oscillateur simple est constitué d'une masse m reliée à un point fixe par un ressort et un amortisseur (fig. 2.1) et pouvant se déplacer dans une seule direction. La masse est soumise à une force $p(t)$ variable avec le temps, qui la met en mouvement.

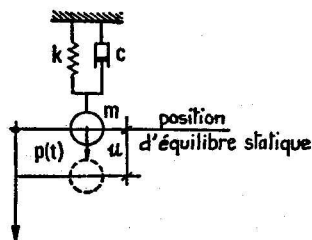


FIG. 2.1. — Oscillateur simple

L'étude de l'oscillateur simple est essentielle car le calcul dynamique d'une structure élastique comportant plusieurs masses se ramène à celui d'un certain nombre d'oscillateurs simples caractérisés chacun par une période de vibration et un coefficient d'amortissement.

Cette période de vibration est celle du mouvement libre, pour lequel il n'y a pas de force appliquée $p(t)$, et que l'on doit étudier au préalable (§ 2.3).

Si les masses de la structure sont soumises à des forces variables dans le temps, leur mouvement est déterminé par l'étude des vibrations forcées des oscillateurs simples associés (§ 2.4); dans ce cas la force $p(t)$ appliquée à la masse n'est plus nulle et les mouvements qu'elle provoque dépendent

essentiellement de la période l'oscillateur, comme on le voit dans le cas de l'excitation harmonique qui met en lumière le phénomène de la résonance (§ 2.4.1).

Si la structure est soumise aux effets d'un séisme, il n'y a pas de forces directement appliquées aux masses, mais un mouvement du sol. Pour un oscillateur simple cela revient à étudier les vibrations forcées par déplacement d'appui ce qui peut se ramener au cas précédent en considérant une force $p(t)$ fictive (§ 2.6).

2.2. FORMULATION DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT

Le ressort et l'amortisseur sont définis par les paramètres k et c . On note:

- u le déplacement de la masse par rapport à la position d'équilibre
- \dot{u} sa vitesse
- \ddot{u} son accélération.

Lors du mouvement, la masse est soumise aux forces suivantes, comptées positives lorsqu'elles tendent à provoquer un déplacement positif:

- la force de rappel du ressort, supposée proportionnelle au déplacement: $F_1 = -k \cdot u$
- la force due à l'amortisseur, supposée proportionnelle à la vitesse: $F_2 = -c \cdot \dot{u}$
- la force imposée $p(t)$.

La loi fondamentale de la dynamique, reliant les forces aux accélérations s'écrit:

$$F_1 + F_2 + p(t) = m \ddot{u} \quad (2.1)$$

soit

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t) \quad (2.2)$$

On en déduit l'équation du mouvement:

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \omega^2 u = \frac{1}{m} p(t) \quad (2.3)$$

avec:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2.4)$$

Le coefficient ω est appelé pulsation et se mesure en radian par seconde.

2.3. OSCILLATIONS LIBRES

En l'absence de la force extérieure $p(t)$, la masse oscille librement. Ce mouvement peut, par exemple, être obtenu en relâchant l'oscillateur après l'avoir écarté de sa position d'équilibre.

D'après (2.3), l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (2.5)$$

La solution prend une forme différente selon que l'oscillateur est amorti ou non.

2.3.1. Oscillateur non amorti

Dans ce cas le coefficient c est nul et l'équation du mouvement :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (2.6)$$

a une solution de la forme :

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.7)$$

Les coefficients A et φ sont des constantes que l'on détermine par des conditions aux limites.

Si l'on se donne par exemple, le déplacement u_0 et la vitesse \dot{u}_0 à l'origine des temps, le déplacement u a pour expression :

$$u = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (2.8)$$

Le mouvement est sinusoïdal, de période T mesurée en secondes :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.9)$$

La fréquence f du mouvement, mesurée en Hertz, a pour valeur :

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.10)$$

REMARQUE

Dans la relation (2.9) on doit utiliser les unités du système international :

- la masse est exprimée en kilogrammes (ou en tonnes),
- le coefficient k en Newton par mètre (ou kilo Newton par mètre).

Si on exprime k en kilogrammes-force par mètre (ou tonnes-force par mètre) comme il est usuel de le faire, il convient d'effectuer un changement d'unités et la relation (2.9) devient:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{gk}} \quad (2.11)$$

avec $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

m exprimé en tonnes,

k exprimé en tonnes-force par mètre,

T en secondes.

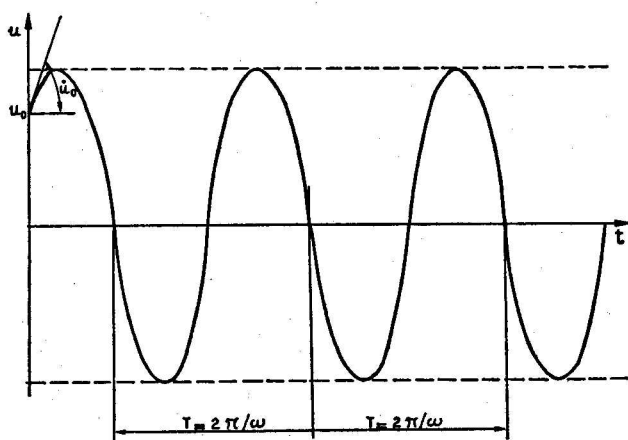


FIG. 2.2. — Oscillations libres non amorties

2.3.2. Oscillateur amorti

La forme de la solution dépend de la valeur du coefficient d'amortissement c .

Si on pose:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.12)$$

on doit distinguer les cas suivants:

a) *Amortissement critique* $\xi = 1$

La solution de l'équation (2.5) est de la forme:

$$u(t) = (A + Bt) e^{-\omega t} \quad (2.13)$$

Les constantes A et B peuvent s'exprimer en fonction du déplacement u_0 et de la vitesse \dot{u}_0 à l'origine des temps; on obtient alors:

$$u(t) = [u_0 (1 + \omega t) + \dot{u}_0 t] e^{-\omega t} \quad (2.14)$$

Le mouvement ne comporte pas d'oscillation (fig. 2.3).

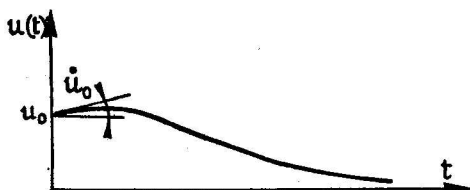


FIG. 2.3. — Oscillations libres amorties. Amortissement critique

b) *Oscillateur suramorti* $\xi > 1$

La solution est de la forme

$$u(t) = (A e^{\omega_D t} + B e^{-\omega_D t}) e^{-\xi \omega t} \quad (2.15)$$

avec

$$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.16)$$

comme dans le cas précédent, le mouvement ne présente pas d'oscillation.

c) *Oscillateur sous-amorti* $\xi < 1$

C'est le seul cas intéressant en pratique pour le calcul dynamique des structures, celles-ci ayant toujours un amortissement inférieur à l'amortissement critique.

La solution de l'équation (2.5) est de la forme:

$$u(t) = (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) e^{-\xi \omega t} \quad (2.17)$$

avec

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.18)$$

Si on introduit les conditions initiales u_0 et \dot{u}_0 à l'origine du temps, on obtient:

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t \right) e^{-\xi \omega t} \quad (2.19)$$

Le mouvement est pseudo-périodique (fig. 2.4), l'amplitude des extrema décroissant avec le temps à cause de l'amortissement.

La pseudo-période a pour valeur:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_D} \quad (2.20)$$

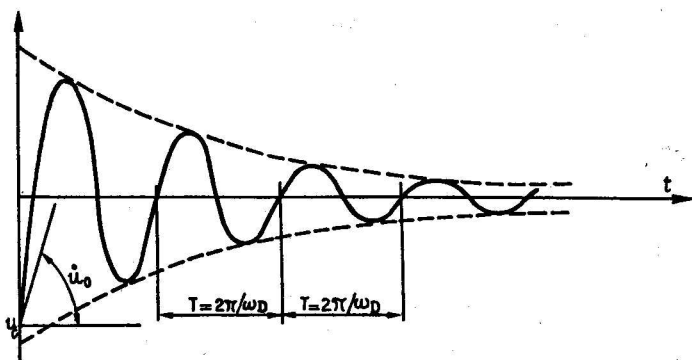


FIG. 2.4. — Oscillations libres sous-amorties

Dans les cas courants le coefficient ξ est inférieur à 20%; on voit donc d'après (2.18) que l'on peut confondre ω_D et ω avec une précision meilleure que 2%.

La pseudo-période de l'oscillateur a donc une valeur très voisine de celle de la période du même oscillateur supposé non amorti, ce qui en pratique permet de les confondre.

Le rapport des amplitudes de deux maxima décalés d'un nombre entier j de pseudo-périodes est donné par :

$$\frac{u_n}{u_{n+j}} = e^{-\xi\omega T} = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}j} \quad (2.21)$$

Pour des valeurs usuelles du coefficient d'amortissement et pour des valeurs de j égales à 5 et 10, on obtient :

100 ξ	5	10
$\frac{u_{n+1}}{u_n}$	0,73	0,53
$\frac{u_{n+5}}{u_n}$	0,21	0,04
$\frac{u_{n+10}}{u_n}$	0,04	0,002

On constate donc que, dans les cas usuels, le mouvement est presque entièrement amorti après dix oscillations seulement.

2.4. OSCILLATIONS FORCÉES

On considère un oscillateur simple initialement au repos ($u_0 = 0$, $\dot{u}_0 = 0$) et soumis à une force variable $p(t)$.

Avant l'étude du cas général (§ 2.4.2) on examinera tout d'abord le cas particulier de l'excitation harmonique.

2.4.1. Cas particulier de l'excitation harmonique

Une excitation est harmonique si la force $p(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps:

$$p(t) = p_0 \sin \alpha t \quad (2.22)$$

Une telle force est par exemple, engendrée par une machine tournant avec une vitesse angulaire α .

L'équation du mouvement est déduite de (2.3):

$$\ddot{u} + 2 \xi \omega \dot{u} + \omega^2 u = \frac{p_0}{m} \sin \alpha t \quad (2.23)$$

Dans le cas d'un oscillateur sous-amorti ($\xi < 1$) la solution est de la forme:

$$u = (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) e^{-\xi \omega t} + \frac{p_0}{k} \lambda \sin (\alpha t - \theta) \quad (2.24)$$

avec:

$$\beta = \frac{\alpha}{\omega} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \xi \beta)^2}}$$

$$\theta = \text{Arctg} \frac{2 \xi \beta}{1 - \beta^2}$$

Les coefficients A et B peuvent être calculés en exprimant qu'au temps $t = 0$, le déplacement et la vitesse sont nuls.

On remarque que le déplacement est la somme de deux termes:

— le premier terme définit le *mouvement transitoire* qui est amorti et disparaît donc rapidement (fig. 2.5 a);

— le deuxième terme définit le *mouvement permanent* qui s'effectue avec la même pulsation α que la force excitatrice (fig. 2.5 b).

Après une phase transitoire, le régime permanent s'établit (fig. 2.5 c), défini par la relation:

$$u = \frac{p_0}{k} \lambda \sin (\alpha t - \theta) \quad (2.25)$$

Contrairement au cas des oscillations libres qui s'effectuent avec une pseudo-période propre à l'oscillateur, la pulsation du mouvement permanent est celle de la force excitatrice.

Le coefficient $\frac{p_0}{k}$ représente le déplacement statique du ressort sous

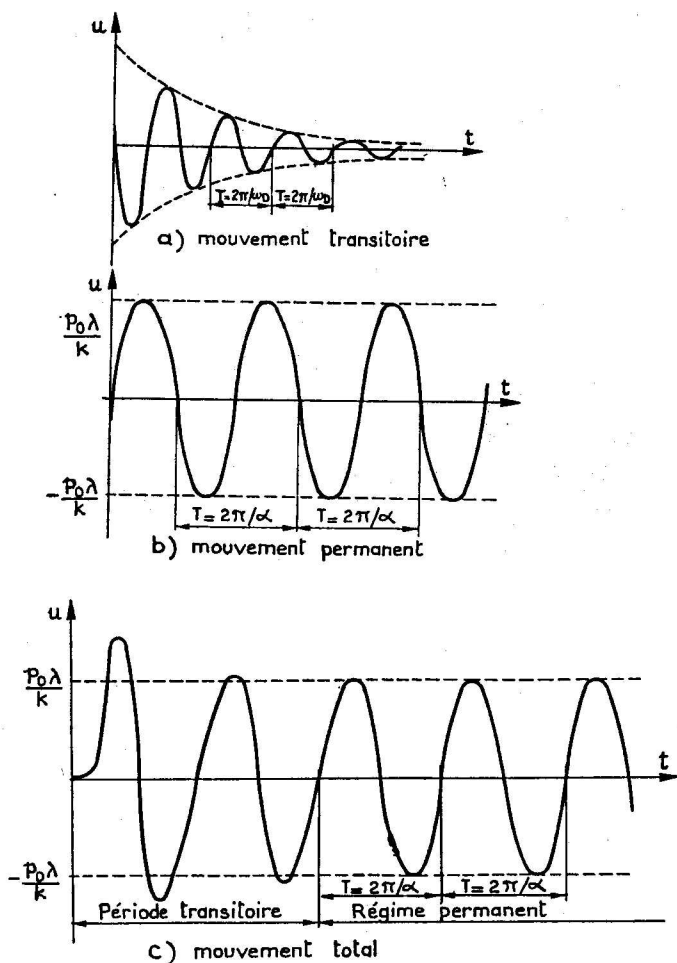


FIG. 2.5. — Oscillations forcées. Cas de l'excitation harmonique

l'action de la force p_0 ; le coefficient λ est le coefficient d'amplification dynamique qui dépend de l'amortissement et du rapport β des pulsations (fig. 2.6).

On voit donc que la réponse d'un oscillateur à une excitation donnée dépend essentiellement de sa pulsation propre:

— Pour un oscillateur infiniment raide (ω infini, $\beta = 0$) il n'y a pas d'amplification de la déformée statique, le mouvement est sinusoïdal d'amplitude $\frac{p_0}{k}$.

— Pour un oscillateur très souple (grandes valeurs de β) le coefficient d'amplification a une valeur très faible, le mouvement est sinusoïdal d'amplitude $\frac{P_0}{m \alpha^2}$.

— Lorsque la pulsation de l'oscillateur est égale à celle de la force excitatrice ($\beta = 1$) celui-ci entre en résonance, le coefficient d'amplification ayant alors pour valeur :

$$\lambda = \frac{1}{2\xi}$$

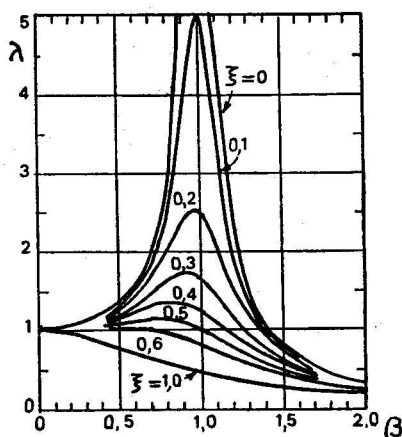


FIG. 2.6. — Excitation harmonique.
Coefficient d'amplification
du déplacement

2.4.2. Cas général

On considère une force $p(t)$ de forme quelconque. Il peut s'agir d'une force périodique engendrée par une machine (fig. 2.7 a) ou, d'une impulsion due à un choc (fig. 2.7 b).

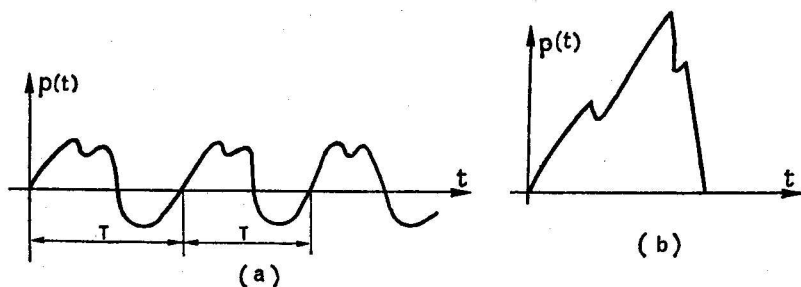


FIG. 2.7. — a) Force périodique. b) Impulsion

La solution de l'équation du mouvement (2.3) est fournie par l'intégrale de Duhamel:

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi \omega (t-\tau)} \cdot \sin [\omega_D (t - \tau)] \cdot d\tau \quad (2.26)$$

Pendant le temps d'application de la force $p(t)$ la masse est soumise à

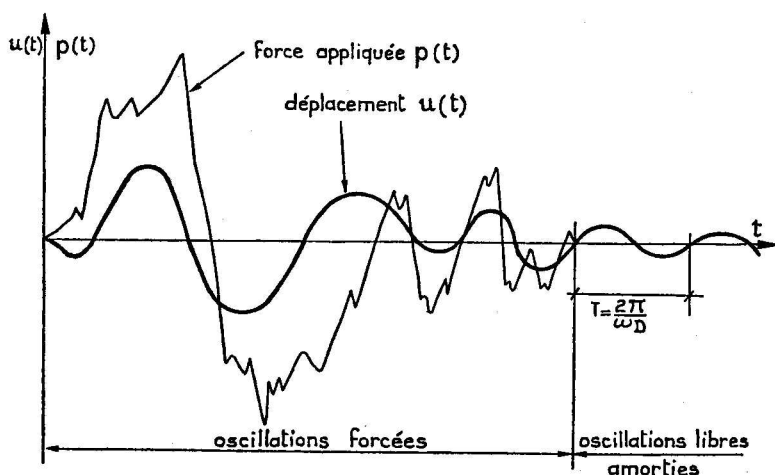


FIG. 2.8. — Oscillations forcées. Cas général

des oscillations forcées, auxquelles succèdent des oscillations libres amorties (fig. 2.8).

Dans le cas d'un oscillateur non amorti, l'intégrale de Duhamel prend la forme:

$$u(t) = \frac{1}{m \omega} \int_0^t p(\tau) \sin [\omega (t - \tau)] d\tau \quad (2.27)$$

2.5. DÉTERMINATION DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT

Pour mesurer le coefficient d'amortissement d'un oscillateur simple, une méthode consiste à le soumettre à une excitation harmonique qui le met en vibration forcée. Pendant un cycle il est ainsi possible de calculer l'énergie dissipée dans l'amortisseur et d'en déduire la valeur du coefficient d'amortissement (§ 2.5.1).

Cette méthode peut être appliquée à un oscillateur dont le ressort n'est pas parfaitement élastique et fournit alors les constantes k et c d'un oscillateur simple équivalent. On détermine ainsi la valeur du coefficient d'amor-

tissement à prendre en compte pour les divers matériaux de construction (§ 2.5.2).

2.5.1. Energie dissipée par amortissement

On considère un oscillateur simple amorti de pulsation ω soumis à une force :

$$p(t) = p_0 \sin \omega t$$

ayant la même pulsation.

L'oscillateur est donc mis en résonance; la partie permanente du mouvement est définie par les relations (2.24) et (2.25) dans lesquelles le coefficient β est pris égal à l'unité.

$$u(t) = -a \cos \omega t \quad (2.28)$$

avec

$$a = \frac{p_0}{2k\xi}$$

La force F_1 dans le ressort a pour valeur

$$F_1 = ku(t) \quad (2.29)$$

La relation entre cette force et le déplacement est donc représentée par une droite parcourue alternativement dans un sens, puis dans l'autre (fig. 2.9).

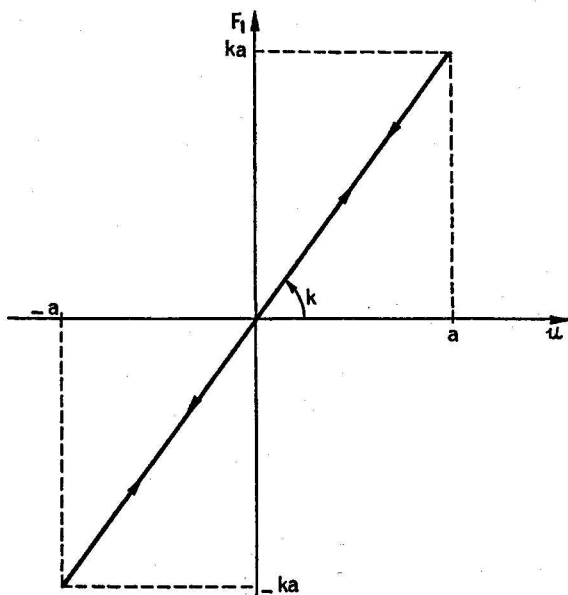


FIG. 2.9. — Force F_1 dans le ressort

La force F_2 dans l'amortisseur est proportionnelle à la vitesse:

$$F_2 = c\dot{u} = 2m\xi\omega\dot{u} = 2k\xi a \sin \omega t \quad (2.30)$$

En fonction du déplacement cette expression s'écrit:

$$\frac{F_2^2}{(2k\xi a)^2} = \sin^2 \omega t = 1 - \frac{u^2}{a^2} \quad (2.31)$$

La relation entre la force F_2 et le déplacement est donc représentée par une ellipse (fig. 2.10).

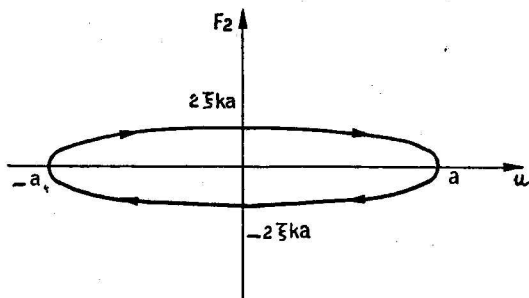


FIG. 2.10. — Force F_2 dans l'amortisseur

Lors d'un cycle complet l'énergie emmagasinée sous forme potentielle dans le ressort est entièrement restituée; par contre une énergie w est dépensée dans l'amortisseur, dont la valeur est égale à celle de l'aire de l'ellipse:

$$w = 2\pi a^2 k \xi \quad (2.32)$$

Le coefficient d'amortissement ξ a donc pour expression:

$$\xi = \frac{w}{2\pi a^2 k} \quad (2.33)$$

La relation entre la force totale $F_1 + F_2$ appliquée à la masse et le déplacement est représentée par la figure 2.11 obtenue en superposant les figures 2.9 et 2.10:

2.5.2. Mesure du coefficient d'amortissement

On considère un oscillateur simple ne comportant pas d'amortisseur et dont le ressort est constitué par un matériau donné. Il s'agit par exemple d'une console en béton armé supportant une masse concentrée.

On met cet oscillateur en vibration en le relâchant après l'avoir écarté de sa position d'équilibre, et pendant un cycle complet, on trace la relation entre la force F appliquée à la masse par le ressort et le déplacement.

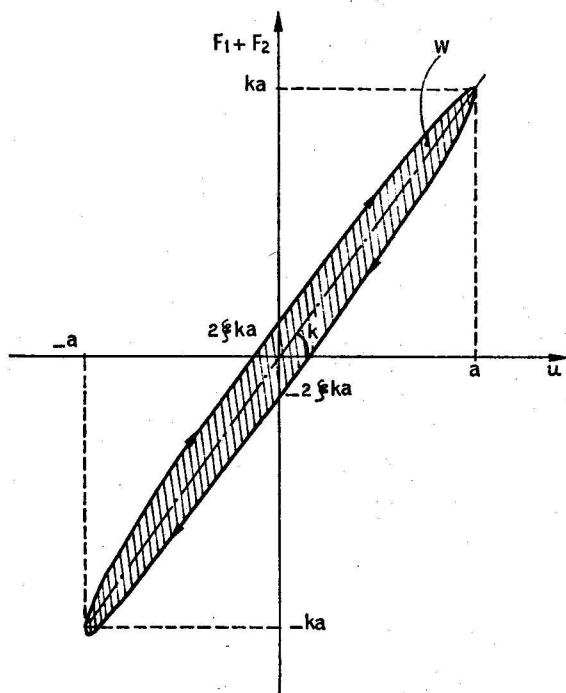


FIG. 2.11. — Force totale $F_1 + F_2$ appliquée à la masse

Si le ressort possède un comportement élastique linéaire, cette relation est représentée par une droite; si le matériau constituant le ressort n'est pas parfaitement élastique, la relation est représentée par une courbe fermée, les déformations n'étant plus, dans ce cas, réversibles (fig. 2.12). On note a la déformée maximum.

Lors d'un cycle, une énergie w est dépensée, mesurée par l'aire délimitée par la courbe.

Pour se ramener au cas de l'oscillateur simple, on fera l'hypothèse que le ressort fonctionne de manière élastique, son coefficient de raideur k étant donné par la pente d'une droite tracée environ à mi-chemin des courbes aller et retour d'un cycle (fig. 2.12); afin de tenir compte de l'énergie w dépensée, on rajoute un amortisseur fictif qui en absorbe autant, et dont le coefficient d'amortissement est donné par l'expression (2.33).

On peut donc déterminer facilement ce coefficient par un essai, les paramètres a , k et w étant déduits de la courbe représentative de la relation entre la force appliquée à la masse et le déplacement, pour un cycle de vibration donné.

Lorsqu'on augmente l'amplitude a du mouvement, le matériau constituant le ressort est plus sollicité, et son comportement s'éloigne de plus

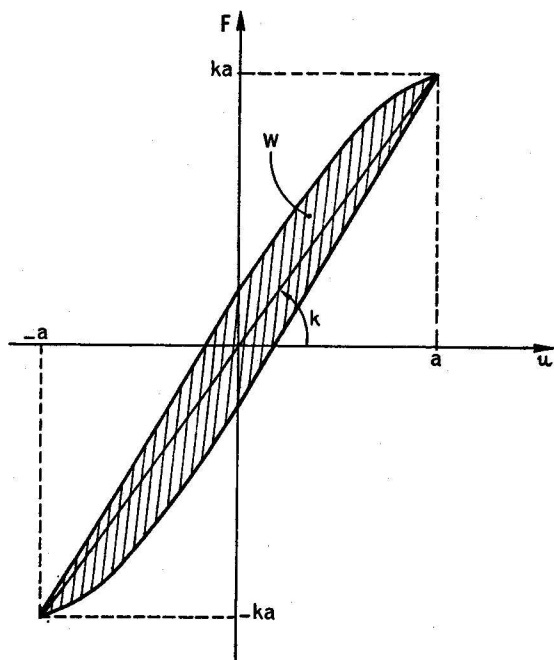


FIG. 2.12. — Force F appliquée à la masse. Cas d'un matériau non élastique

en plus d'un comportement élastique; il s'ensuit une augmentation du coefficient d'amortissement ξ . On ne peut donc parler dans l'absolu d'un coefficient d'amortissement propre à un matériau; on adoptera en pratique des valeurs conventionnelles.

2.5.3. Valeurs pratiques du coefficient d'amortissement

Selon le matériau utilisé on pourra adopter les valeurs ⁽¹⁾ suivantes:

Matériau	Charpente métallique soudée	Béton précontraint	Charpente métallique boulonnée	Béton armé
100 ξ	4	5	7	7

Pour le sol de fondation, le coefficient d'amortissement peut avoir une valeur supérieure à celles données ci-dessus, selon la nature du terrain et l'importance des contraintes qui s'y développent. En l'absence de renseignements, on adoptera une valeur $\xi = 7\%$.

⁽¹⁾ U.S. Atomic Energy Commission. Regulation Guide 1,61, October 1973.

2.6. EXCITATION PAR DÉPLACEMENT D'APPUI (cas du séisme)

On considère une masse m liée à une console verticale encadrée dans le sol en un point A (fig. 2.13), ce qui constitue l'équivalent d'un oscillateur simple.

Pour tenir compte du mouvement du sol en cas de séisme, on impose au point A un déplacement horizontal $v_s(t)$ variable avec le temps.

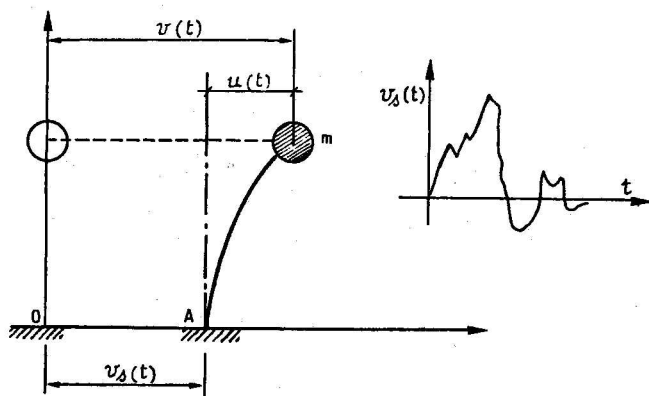


FIG. 2.13. — Excitation par déplacement d'appui

Les déplacements de la masse m sont mesurés, soit dans un *repère relatif* lié au point A (déplacement $u(t)$) soit dans un *repère absolu* (déplacement $v(t)$).

Ces déplacements sont liés par la relation:

$$v(t) = u(t) + v_s(t) \quad (2.34)$$

On en déduit par dérivation la relation entre les accélérations:

$$\ddot{v}(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{v}_s(t) \quad (2.35)$$

2.6.1. Calcul du déplacement relatif

La masse est soumise aux forces horizontales suivantes:

— une force de rappel due à la console qui est proportionnelle au *déplacement relatif* u :

$$F_1 = -ku$$

— une force d'amortissement supposée proportionnelle à la *vitesse relative* \dot{u} :

$$F_2 = -c\dot{u}$$

Ces forces sont liées à l'accélération absolue \ddot{v} par la relation

$$F_1 + F_2 = m\ddot{v} \quad (2.36)$$

On en déduit l'équation du mouvement:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m} \dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (2.37)$$

Soit, compte tenu de (2.35):

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \omega^2 u = \frac{p(t)}{m} \quad (2.38)$$

avec

$$p(t) = -m\ddot{v}_s(t) \quad (2.39)$$

On voit qu'on se ramène à l'étude d'un oscillateur simple dans le repère *relatif* en supposant la masse soumise à une force fictive $p(t) = -m\ddot{v}_s(t)$ proportionnelle à l'accélération *absolue* du point d'appui A .

La solution est donnée par l'intégrale de Duhamel (2.26) qui prend la forme particulière:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (2.40)$$

avec $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$.

On constate que la valeur du déplacement ne dépend que de la pulsation ω , du coefficient d'amortissement ξ et de l'accélération \ddot{v}_s du sol.

2.6.2. Pseudo-accélération

Lorsque le déplacement relatif u de la masse a été calculé, on peut en déduire la force de rappel du ressort:

$$F_1 = -ku \quad (2.41)$$

On peut aussi effectuer un calcul indirect en supposant la masse soumise à une accélération fictive dite « pseudo-accélération » ayant pour valeur:

$$\gamma = \omega^2 u \quad (2.42)$$

L'effort dans le ressort est ensuite évalué par un *calcul statique* sous l'action de la force:

$$F = m\gamma$$

appliquée à la masse et supposée constante (fig. 2.14).

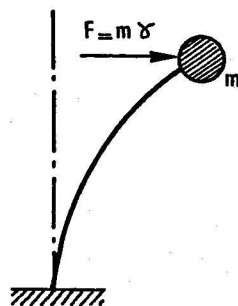


FIG. 2.14. — Calcul statique à partir de la pseudo accélération γ

La force de rappel du ressort a donc pour valeur

$$F_1 = -F = -m \omega^2 u$$

En tenant compte de la relation

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

on retrouve bien la valeur calculée plus haut:

$$F_1 = -ku$$

Les deux méthodes sont donc équivalentes et l'emploi de la deuxième, qui est moins directe, ne peut se justifier que pour des raisons pratiques.

En effet, dans de nombreux cas, l'étude de la réponse d'un bâtiment à une excitation sismique est effectuée à l'aide d'un modèle très simple, qui permet le calcul global des efforts mais pas leur répartition entre les divers éléments de la structure.

On utilise donc ce modèle simple pour calculer les pseudo-accélération des masses qui constituent ensuite un cas de charge statique pour une structure modélisée plus finement, ce qui permet d'évaluer les efforts dans tous les éléments (§ 6.2.2).

Dans le cas d'un oscillateur non amorti, l'équation du mouvement (2.37) s'écrit:

$$\ddot{v} = -\omega^2 \cdot u = -\gamma$$

On constate donc que, pour l'oscillateur non amorti, la pseudo-accélération est égale à l'accélération absolue, au signe près; pour l'oscillateur amorti elle n'en constitue qu'une approximation.

SPECTRES DE RÉPONSE

3.1. SPECTRE DE DÉPLACEMENT ET DE PSEUDO-ACCÉLÉRATION

On considère un oscillateur simple lié au sol et caractérisé par sa pulsation ω et son coefficient d'amortissement ξ . Il est soumis aux effets d'un séisme, c'est-à-dire que son point d'appui se déplace avec une accélération $\ddot{v}_g(t)$ donnée par un accélérogramme, comme par exemple celui du séisme d'El Centro du 18 mai 1940 (fig. 3.1).

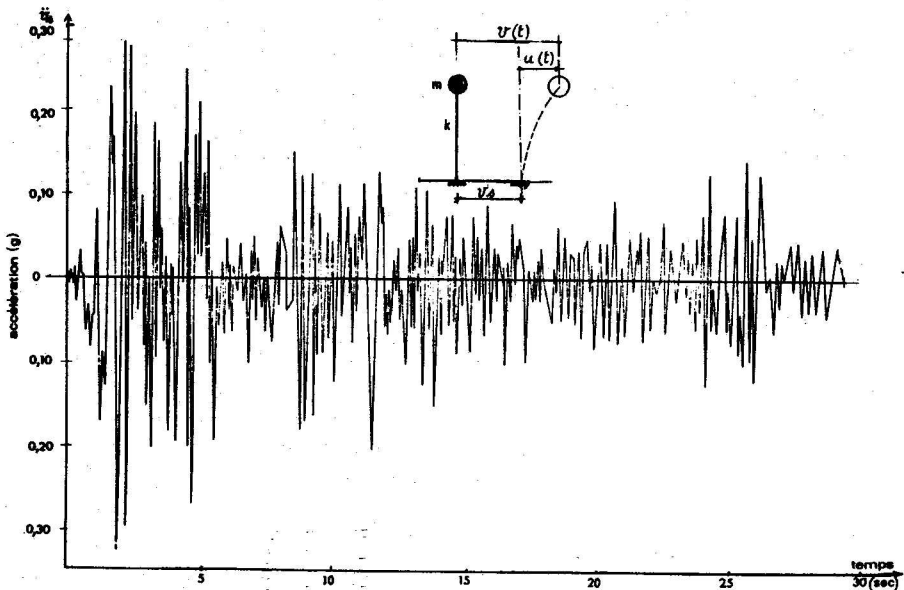


FIG. 3.1. — Accélérogramme de la composante N-S du séisme de El Centro (18 mai 1940)

A un instant t quelconque, le déplacement relatif $u(t)$ de la masse peut être calculé par l'intégrale de Duhamel (2.40):

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin[\omega_D(t-\tau)] \cdot d\tau$$

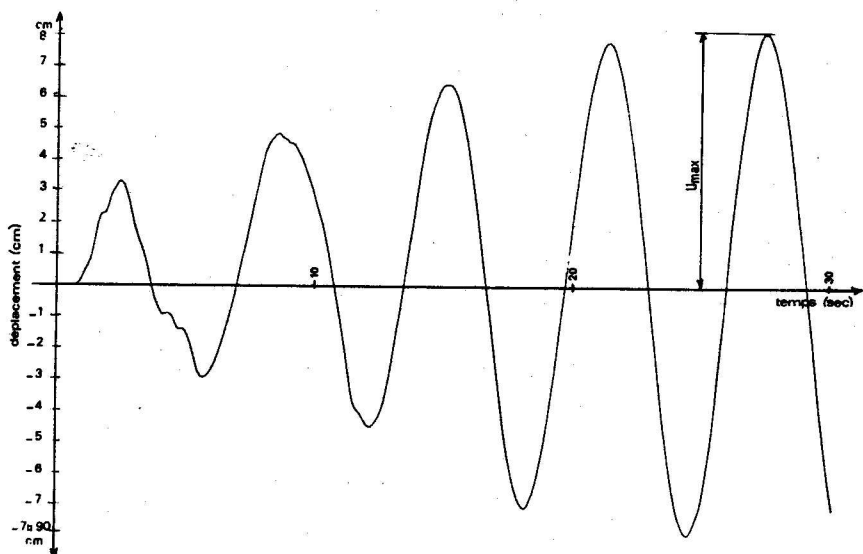
avec $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$.

La fonction $\ddot{v}_g(t)$ étant connue, le déplacement $u(t)$ ne dépend que des paramètres ω et ξ .

Les figures 3.2 et 3.3 indiquent les déplacements relatifs d'un oscillateur simple pour l'accélérogramme de la figure 3.1 et diverses valeurs des paramètres ω et ξ .

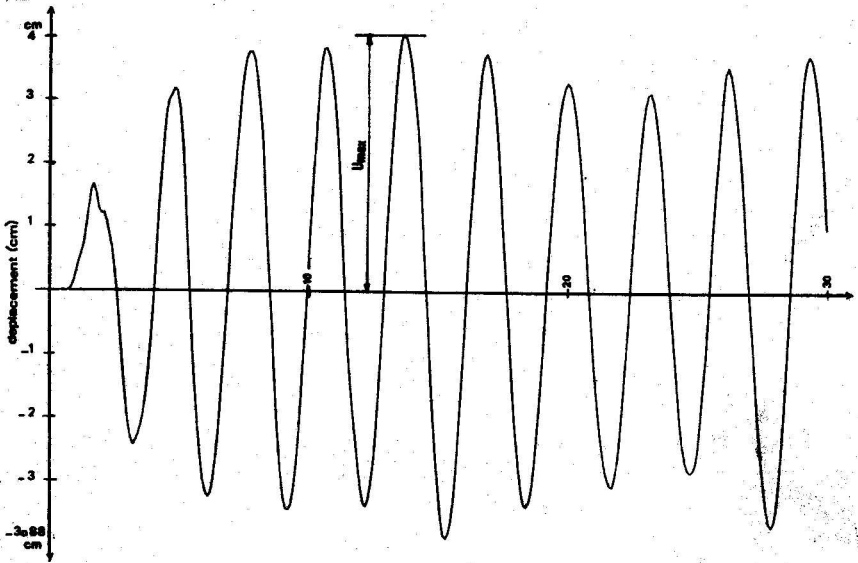
La valeur maximale U_{\max} du déplacement relatif dépend uniquement des paramètres ω et ξ ; pour une valeur de ξ donnée, on peut donc tracer la courbe reliant le déplacement maximum U_{\max} et la période $T = 2\pi/\omega$ (fig. 3.4).

Cette courbe est appelée spectre de déplacement de la secousse sismique.

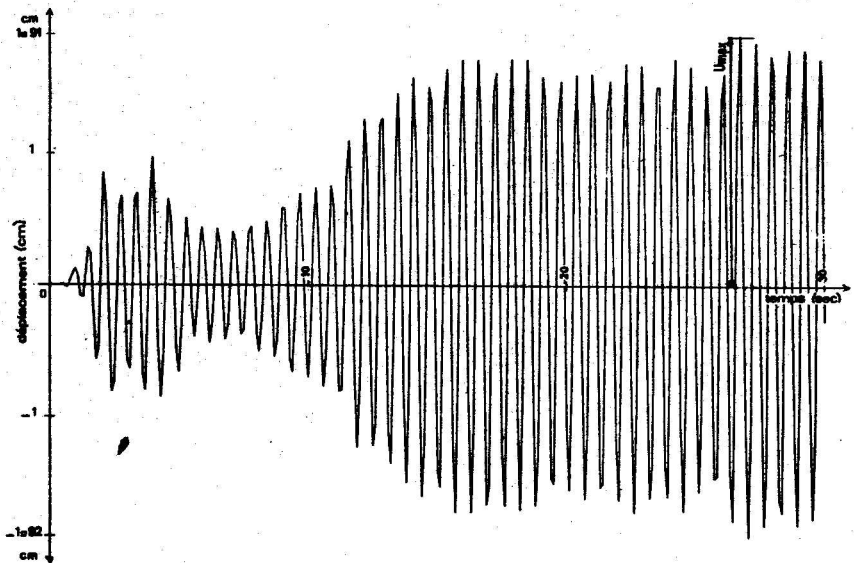


a) $\omega = 1$ $\xi = 0\%$

FIG. 3.2. — Réponse d'un oscillateur simple à la composante N.-S. du séisme de El Centro

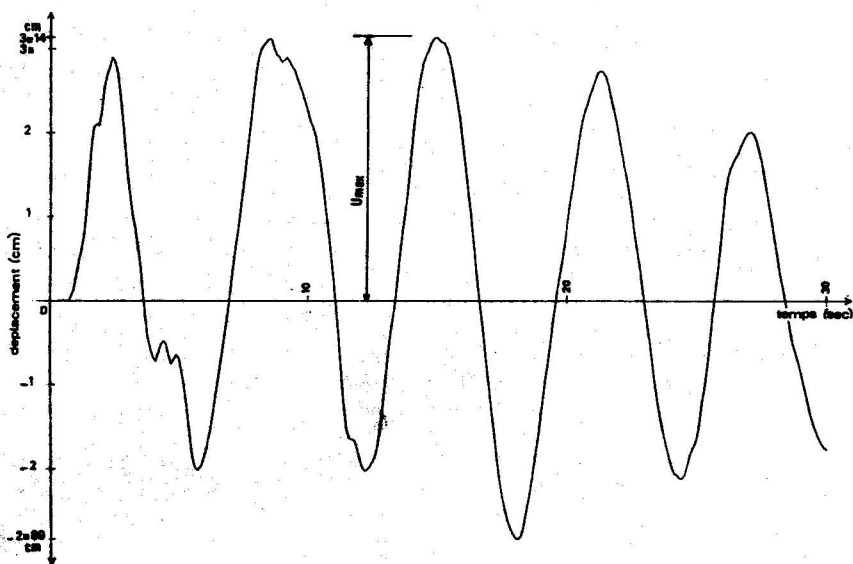


b) $\omega = 2$ $\xi = 0\%$

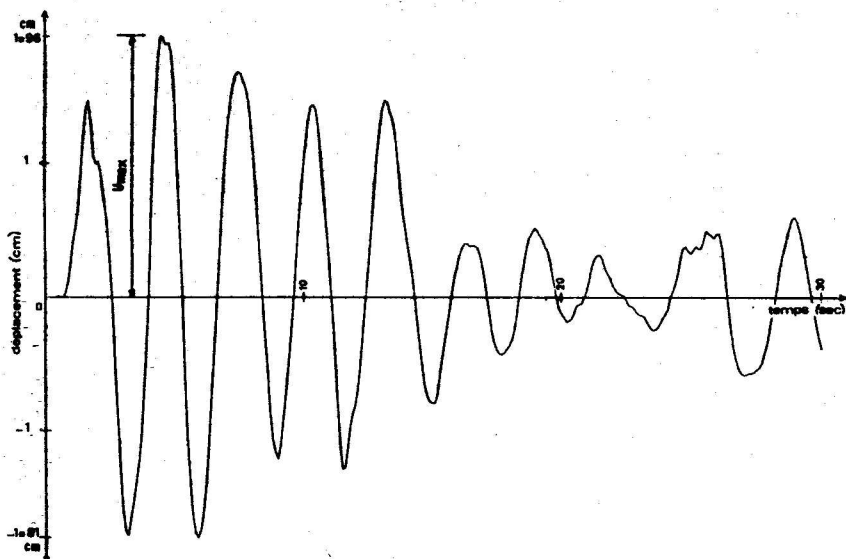


c) $\omega = 10$ $\xi = 0\%$

FIG. 3.2. — Réponse d'un oscillateur simple à la composante N.-S. du séisme de El Centro



a) $\omega = 1$ $\xi = 10\%$



b) $\omega = 2$ $\xi = 10\%$

FIG. 3.3. — Réponse d'un oscillateur simple à la composante N.-S. du séisme de El Centro

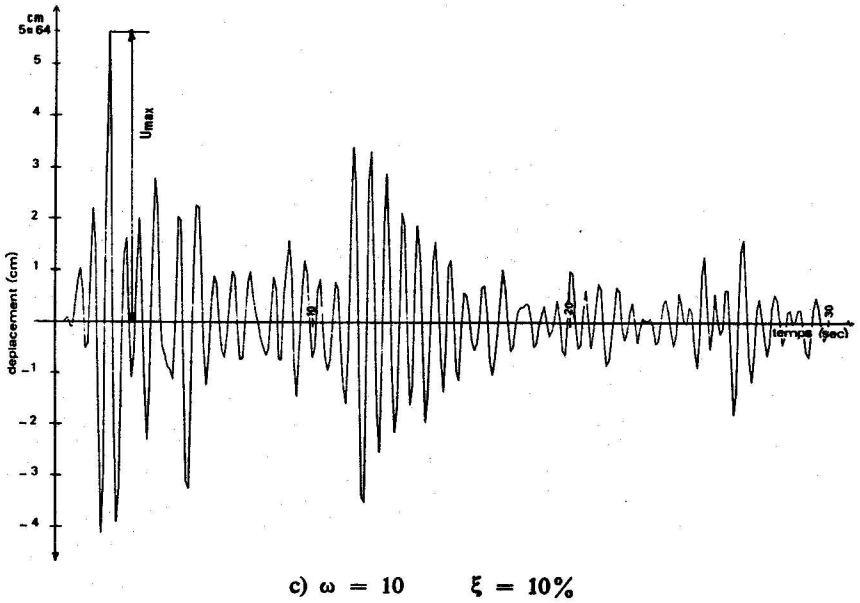


FIG. 3.3. — Réponse d'un oscillateur simple à la composante N.-S. du séisme de El Centro

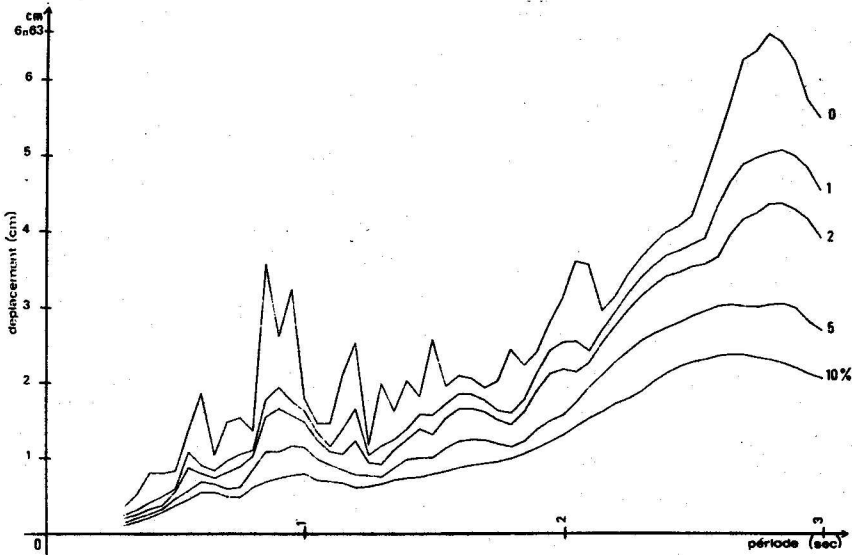


FIG. 3.4. — Spectre de déplacement de la composante N.-S. du séisme de El Centro (1940)

L'intérêt de ce spectre est de permettre par une simple lecture d'évaluer le déplacement maximum d'un oscillateur quelconque, donc les efforts maxima.

Cette manière de procéder est à la base de la méthode la plus couramment utilisée pour le calcul dynamique des structures (§ 5.2).

Par contre, le spectre ne fournit pas la valeur du temps à laquelle se produit le déplacement maximum; pour certaines applications, on doit donc recourir à l'emploi direct de l'accélérogramme (§ 5.1).

On peut tracer de la même façon la courbe donnant la valeur maximum γ_{\max} de la pseudo-accelération en fonction de la période (fig. 3.5), puisque, d'après la relation 2.3, le déplacement relatif maximum et la pseudo-accelération maximum sont liés par la relation:

$$\gamma_{\max} = \omega^2 U_{\max} \quad (3.1)$$

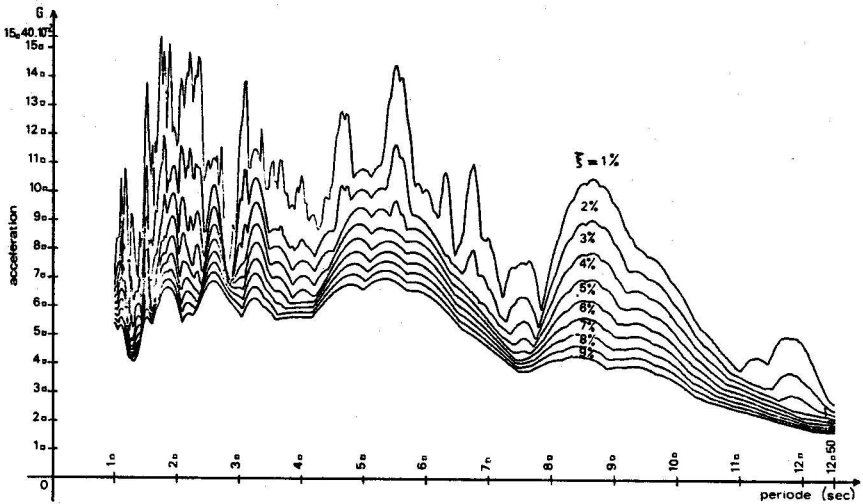


FIG. 3.5. — Spectre d'accélération de la composante N.-S. du séisme de El Centro (1940)

Les spectres de déplacement et de pseudo-accelération peuvent être représentés sur la même figure si on utilise des coordonnées logarithmiques.

En effet, si l'on pose:

$$Z = \omega \cdot U_{\max} = \frac{2\pi}{T} U_{\max} \quad (3.2)$$

on peut écrire:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\max} &= \omega Z = \frac{2\pi}{T} Z \\ U_{\max} &= \frac{Z}{\omega} = \frac{T}{2\pi} Z \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Z est appelé pseudo-vitesse de l'oscillateur et constitue une approximation de sa vitesse absolue.

En mettant les expressions 3.3 sous une forme logarithmique, on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \log \gamma_{\max} &= \log Z - \log \frac{T}{2\pi} \\ \log U_{\max} &= \log Z + \log \frac{T}{2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Ainsi on peut repérer les valeurs $\log U_{\max}$, $\log Z$ et $\log \gamma_{\max}$ sur le même graphique en utilisant la première et la deuxième bissectrices comme axes de coordonnées (fig. 3.6).

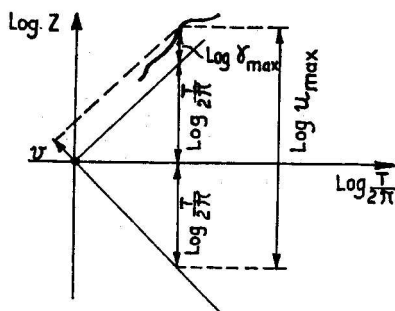


FIG. 3.6.

La lecture des spectres devra être effectuée conformément aux indications de la figure 3.7; dans le cas du séisme d'El Centro, les spectres ont l'allure indiquée sur la figure 3.8.

Pour un oscillateur infiniment raide, la période est nulle et le déplacement relatif de la masse par rapport au sol est nul (fig. 3.9). La valeur de la pseudo-accélération lue sur le spectre pour $T = 0$ est donc égale à la valeur maximum de l'accélération absolue du sol.

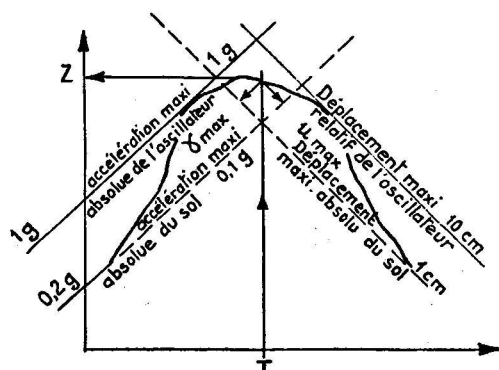


FIG. 3.7.

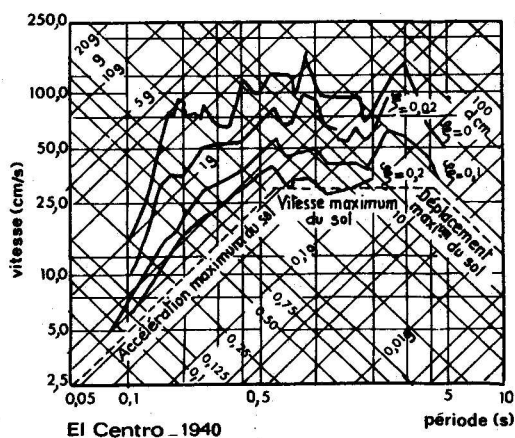


FIG. 3.8.

Pour un oscillateur infiniment souple, la période T est infinie et la masse ne se déplace pas dans le repère absolu (fig. 3.10). Le spectre de déplacement

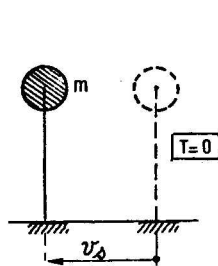


FIG. 3.9.

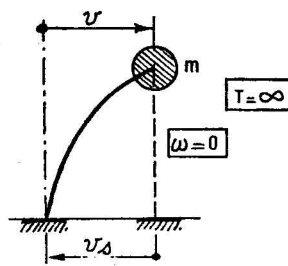


FIG. 3.10.

a donc pour valeur asymptotique la valeur maximum du déplacement absolu du sol.

3.2. SPECTRE DE CALCUL

Lorsqu'il s'agit de déterminer le spectre de réponse à prendre en compte pour le calcul des constructions en un site donné, il est bien entendu exclu d'utiliser un seul accélérogramme, même si par chance il a été enregistré au voisinage du site.

En effet, l'accélérogramme du séisme contre lequel on veut se prémunir n'est a priori pas prévisible. Il convient donc de déterminer un spectre de calcul qui sera l'enveloppe d'un ensemble de spectres correspondant à des accélérogrammes enregistrés dans des sites comparables du point de vue de la nature du sol.

Les accélérogrammes utilisés résultent de séismes d'importance différente et les spectres de réponse que l'on en déduit ne sont pas directement comparables. Il faut donc au préalable appliquer à chaque spectre une affinité pour qu'ils aient tous la même valeur d'intensité spectrale. Les spectres ainsi obtenus sont alors appelés « spectres normalisés ».

Housner a défini l'intensité spectrale comme étant l'aire du spectre de vitesse comprise entre l'axe T et les droites d'abscisse 0,10 et 2,5 secondes (fig. 3.11); cette plage de périodes couvrant la plupart des cas rencontrés.

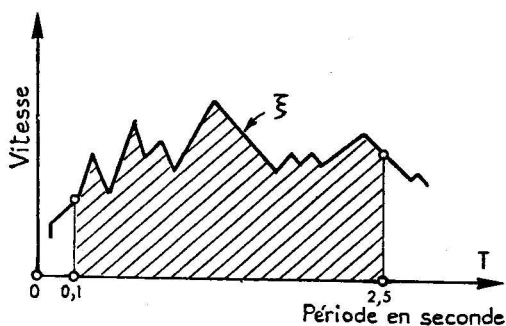


FIG. 3.11.

L'intensité spectrale prend en compte la réponse de la majorité des constructions et constitue donc une mesure de l'importance de la secousse sismique.

On peut aussi normaliser les spectres en prenant en compte l'accélération maximum du sol au lieu de l'intensité spectrale.

Le spectre de calcul est obtenu en faisant l'enveloppe des divers spectres normalisés; il doit ensuite être « calé » en lui faisant subir une affinité pour tenir compte:

- de l'intensité probable du séisme;
- de l'importance pour la collectivité du bâtiment étudié.

La figure 3.12 représente l'allure que peuvent avoir de tels spectres de calcul.

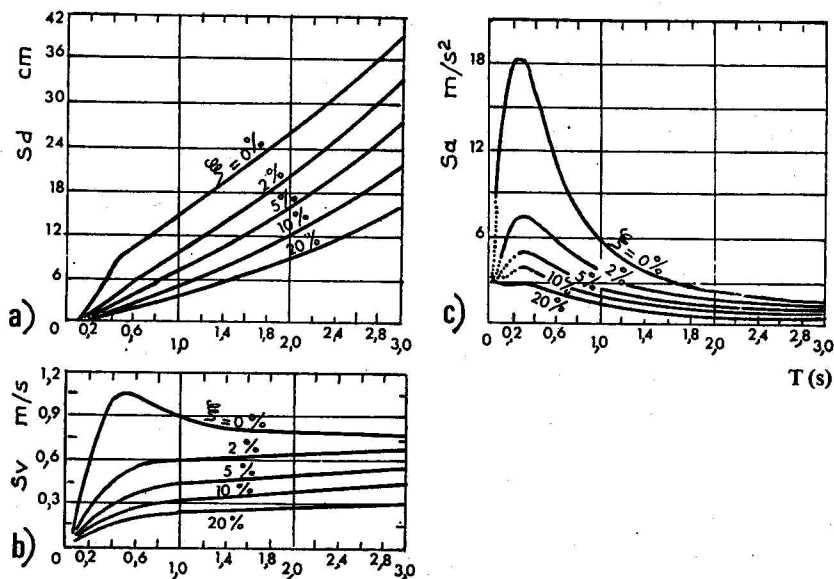


FIG. 3.12. — Spectre de calcul. — a) Spectre de déplacement S_d .
b) Spectre de vitesse S_v . — c) Spectre d'accélération S_a

3.3. SPECTRE RÉGLEMENTAIRE

Les règlements parasismiques imposent des spectres déduits des spectres de calcul et modifiés pour tenir compte forfaitairement de l'intervention des modes supérieurs ou du comportement non-linéaire des structures.

Ainsi, on remarque sur la figure 3.13 qui représente un des spectres des règles P.S. 1969 que celui-ci comporte un palier dans la zone des faibles périodes, ce qui est donc en contradiction avec la forme des spectres de calcul indiqués par la figure 3.12 c; ceci permet de tenir compte indirectement des modes supérieurs qui se situent dans la zone des faibles périodes et qui sont négligés par le calcul dans les cas courants.

Ce spectre (coefficient β) est caractéristique d'un séisme d'intensité nominale 8; pour des intensités i_N différentes, les valeurs lues sur le spectre doivent être multipliées par le coefficient d'intensité α :

$$\alpha = 2^{(i_N - 8)} \quad (3.5)$$

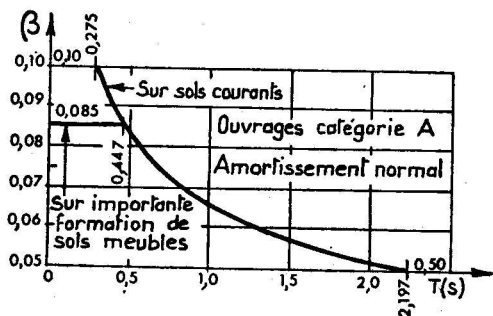


FIG. 3.13. — Spectre des règles P.S. 1969

3.4. INFLUENCE DU SOL SUR LE SPECTRE DE RÉPONSE

La forme du spectre de réponse est très sensible à la nature du sol de fondation.

En effet, les ondes sismiques se propagent dans le rocher, puis en certains endroits à travers des sédiments dont les caractéristiques vont influencer sur le mouvement du sol enregistré en surface.

Pour une même secousse sismique les spectres seront donc différents selon qu'ils correspondent à un affleurement rocheux ou à un dépôt sédimentaire.

Dans le cas du tremblement de terre de San Francisco de 1957, on a pu établir les spectres de réponse à la surface du sol en divers points de la ville (fig. 3.14) (1).

On peut constater que les enregistrements effectués sur les affleurements de rocher sont très semblables, l'accélération maximum du sol variant de 0,10 g à 0,12 g. Par contre, au point de mesure situé dans la zone de sédiments argileux (Southern Pacific Co. Building), le spectre a une forme complètement différente: si le pic du spectre est écrêté, par contre la réponse pour des périodes supérieures à 0,5 s est notablement augmentée.

(1) B. SEED, *Caractéristiques dynamiques des sols-structures*. Journées franco-phones « Urbanisme Vertical », 25 et 26 octobre 1970.

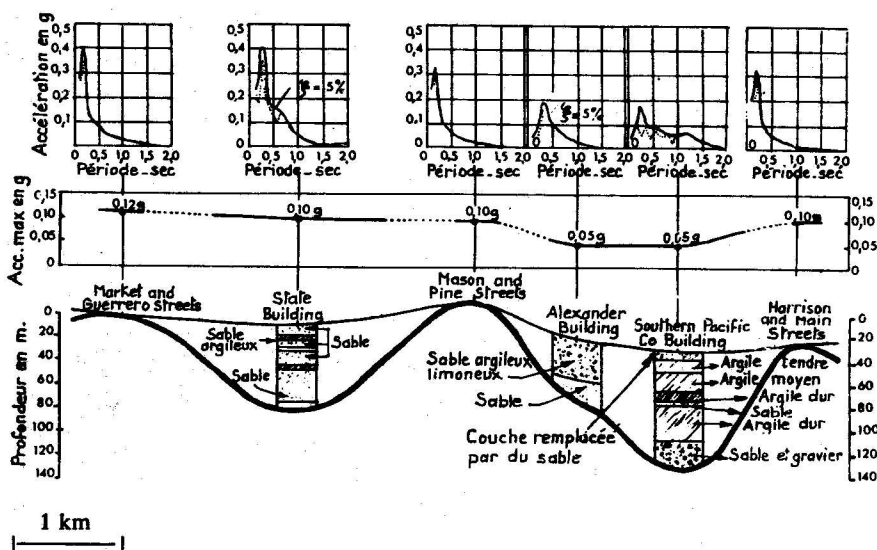


FIG. 3.14. — Conditions du sol et caractéristiques des enregistrements de mouvement du sol: tremblement de terre de San Francisco, 1957

On comprend donc pourquoi les bâtiments courants, qui ont une période du premier mode de vibrations supérieure à 0,5 s, ont subi des dégâts plus importants lorsqu'ils se trouvaient au-dessus des sédiments argileux plutôt que sur le rocher, bien que l'accélération maximum du sol (0,05 g) ait été divisée par deux.

En conséquence, lorsqu'il s'agit de choisir un spectre de réponse pour un site donné, il est très important de connaître la nature du sol de fondation,

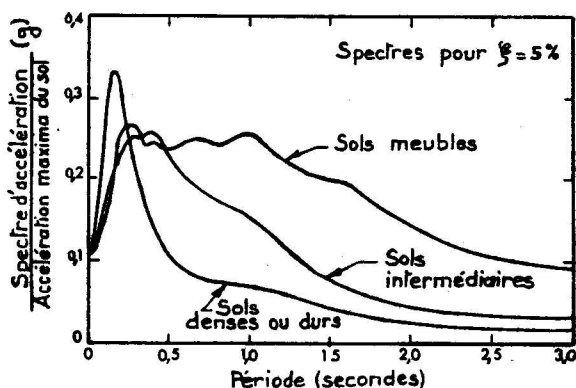


FIG. 3.15.

puisque les sols durs transmettent de préférence les hautes fréquences et les sols mous les basses fréquences.

On a donc en pratique à choisir entre une des formes spectrales indiquées sur la figure 3.15 (1).

3.5. UTILISATION DES SPECTRES DE RÉPONSE

La méthode la plus couramment employée pour le calcul dynamique des structures est basée sur l'utilisation des spectres de réponse (cf. § 5.2).

En effet, toute structure est assimilable à un oscillateur multiple, mais on peut démontrer (§ 4.4) que son étude se ramène à celle d'un certain nombre d'oscillateurs simples.

La détermination des forces maximum développées dans le ressort de chacun de ces oscillateurs permet d'évaluer les efforts maximums dans la structure.

Selon que l'on dispose d'un spectre de déplacement ou d'un spectre d'accélération, leur utilisation s'effectue comme suit:

a) Utilisation d'un spectre de déplacement

En fonction de la période T et du coefficient d'amortissement ξ de l'oscillateur, le spectre de déplacement relatif donne la valeur U_{\max} du déplacement relatif maximum. Ce déplacement imposé au ressort fournit directement la valeur de la force:

$$F = k \cdot U_{\max} \quad (3.6)$$

b) Utilisation d'un spectre d'accélération

En fonction de la période T et du coefficient d'amortissement ξ de l'oscillateur, le spectre fournit la valeur maximum γ_{\max} de la pseudo-accelération. On en déduit la valeur de la force statique (§ 2.6.2) appliquée à la masse et équilibrée par le ressort:

$$F' = m \cdot \gamma_{\max} \quad (3.7)$$

Cette méthode est dite « statique équivalente » puisque l'oscillateur est étudié sous l'effet d'une force appliquée comme dans les calculs statiques

(1) B. SEED et al., *Site dependent spectra for earthquake — resistant design*. B.S.S.A., février 1976.

habituels; elle est à la base des règles parasismiques françaises (Règles P.S. 1969) qui permettent le calcul des accélérations, donc des forces appliquées aux masses des structures.

Les valeurs des forces F et F' sont identiques et les deux méthodes conduisent au même résultat puisque par construction les spectres de réponse sont liés par la relation:

$$\gamma_{\max} = \omega^2 U_{\max}$$

ce qui entraîne:

$$\gamma_{\max} = \omega^2 U_{\max} = \frac{k}{m} U_{\max}$$

soit:

$$m \cdot \gamma_{\max} = k \cdot U_{\max} \quad (3.8)$$

OSCILLATEUR MULTIPLE

4.1. DÉFINITION

Un oscillateur multiple est composé de plusieurs masses reliées entre elles et à une base fixe par des ressorts et des amortisseurs.

On peut donc ranger dans cette catégorie toute structure à comportement élastique linéaire, modélisée à l'aide de barres ou d'éléments finis et comportant une masse associée à chacun des nœuds (fig. 4.1). Les masses réparties sur les barres sont dans ce cas supposées concentrées sur les nœuds les plus voisins. Dans un but de simplification, le dessin des figures sera effectué par la suite pour une console verticale uniquement.

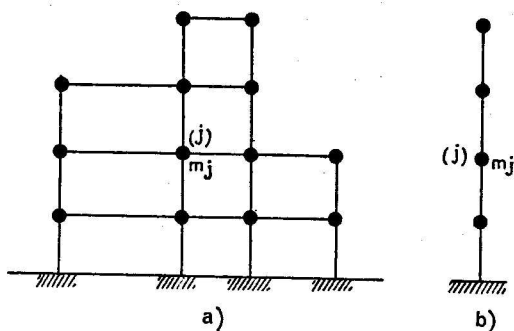


FIG. 4.1. — Exemples d'oscillateurs multiples
a) Portique plan
b) Console verticale

Chaque nœud possède au maximum six degrés de liberté, c'est-à-dire six mouvements possibles: trois translations et trois rotations, mais en pratique, on pourra souvent n'en considérer qu'un nombre réduit. Ainsi, dans le cas d'une structure plane, chaque nœud possède en principe trois degrés de liberté (deux translations et une rotation, fig. 4.2 a), mais on peut toutefois considérer un modèle simplifié à deux degrés de liberté par nœud

(les deux translations, fig. 4.2 b), ou même un seul (une des deux translations, fig. 4.2 c).

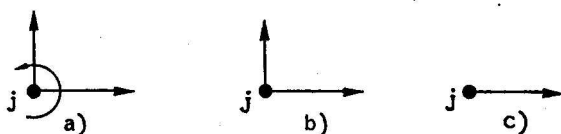


FIG. 4.2. — Options possibles pour les modèles plans
a) 3 degrés de liberté. — b) 2 degrés de liberté. — c) 1 degré de liberté

Les propriétés de l'oscillateur sont définies par un certain nombre de coefficients que l'on met sous forme de matrice; on trouvera en annexe A un rappel des opérations élémentaires en calcul matriciel.

4.1.1. Matrice de rigidité

On considère une structure à p nœuds comportant au total n degrés de liberté numérotés de 1 à n .

Dans le cas général, il existe six degrés de liberté par nœud; le nombre n a donc pour valeur:

$$n = 6 \cdot p$$

On appelle:

— f_j la force extérieure, ou le moment, appliquée à la structure dans le sens du degré de liberté j ,

— u_j le déplacement (translation ou rotation) selon le degré de liberté j .

La force f_j est comptée positive si elle provoque un déplacement u_j positif.

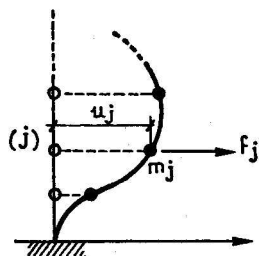


FIG. 4.3.

L'ensemble des forces extérieures constitue le vecteur-force F à n composantes:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

On considère de même le vecteur des déplacements :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

La structure est supposée élastique : il existe donc des relations linéaires entre les forces extérieures et les déplacements.

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{11} u_1 + k_{12} u_2 + \dots + k_{1j} u_j + \dots + k_{1n} u_n \\ f_2 &= k_{21} u_1 + k_{22} u_2 + \dots + k_{2j} u_j + \dots + k_{2n} u_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_i &= k_{i1} u_1 + k_{i2} u_2 + \dots + k_{ij} u_j + \dots + k_{in} u_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_n &= k_{n1} u_1 + k_{n2} u_2 + \dots + k_{nj} u_j + \dots + k_{nn} u_n \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les expressions (4.3) peuvent se mettre sous la forme :

$$F = K \cdot U \quad (4.4)$$

où K représente la matrice de rigidité, de dimension $n \times n$:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

REMARQUE

Dans les cas simples, on pourra calculer les coefficients k_{ij} en évaluant les forces qu'il faut appliquer aux nœuds de la structure pour que tous les déplacements, sauf un, soient nuls.

En effet, si tous les déplacements sont nuls, sauf le déplacement u_j auquel on impose la valeur $u_j = 1$, les relations (4.3) deviennent :

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{1j} \\ &\dots \dots \dots \\ f_i &= k_{ij} \\ &\dots \dots \dots \\ f_n &= k_{nj} \end{aligned} \quad (4.6)$$

On constate que la colonne de rang j de la matrice de rigidité est identique au vecteur force correspondant à ce cas de déplacement imposé. On

peut donc calculer les coefficients de cette matrice en évaluant les forces aux nœuds pour n cas de déplacements imposés.

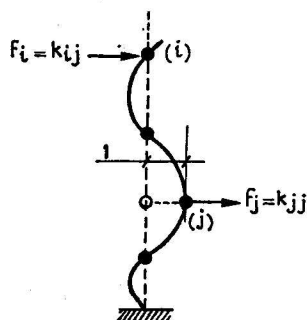


FIG. 4.4. — Calcul des coefficients de la matrice de rigidité

4.1.2. Matrice des masses

On suppose que toute la masse de la structure est concentrée aux nœuds; à chaque nœud, on associe donc en général trois masses et trois moments d'inertie massique correspondant aux six degrés de liberté.

On note:

- m_j la masse relative au degré de liberté j ,
- \ddot{u}_j l'accélération dans la direction du degré de liberté j .

Les masses étant concentrées, l'accélération d'une seule d'entre elles n'impose de force d'inertie qu'à elle-même, ce qui ne serait pas le cas s'il existait des masses réparties entre deux nœuds.

Lorsque toutes les masses sont accélérées, les forces d'inertie ont pour valeur:

$$\begin{aligned} f_1 &= m_1 \ddot{u}_1 \\ f_2 &= m_2 \ddot{u}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_j &= m_j \ddot{u}_j \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= m_n \ddot{u}_n \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ces relations s'écrivent:

$$F = M \cdot \dot{U} \quad (4.8)$$

\dot{U} représente le vecteur des accélérations:

$$\dot{U} = \begin{vmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_j \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

M est la matrice des masses, diagonale, et de dimension $n \times n$:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & m_j \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & m_n \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.1.3. Matrice d'amortissement

Pour un oscillateur simple, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse relative \dot{u} :

$$f = -c \cdot \dot{u}$$

Pour un oscillateur multiple, cette relation est généralisée sous la forme:

$$F = -C \cdot \dot{U} \quad (4.11)$$

où F représente le vecteur force, \dot{U} le vecteur des vitesses relatives:

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_j \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

et C , la matrice d'amortissement de dimension $n \times n$:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Le coefficient c_{ij} a pour valeur celle de la force développée dans la direction du degré de liberté i lorsque la vitesse \dot{u}_j est unitaire, toutes les autres vitesses étant nulles.

4.2. FORMULATION DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT

On considère un oscillateur multiple pouvant se déformer par rapport à sa base qui reste fixe, et caractérisé par des matrices K , M et C de rigidité, de masse et d'amortissement.

On applique aux nœuds des forces $p_j(t)$ variables dans le temps et regroupées sous forme d'un vecteur:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_j(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

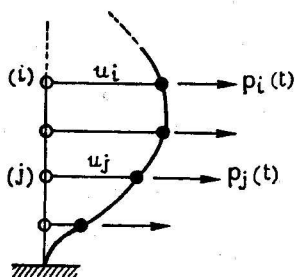


FIG. 4.5. — Forces variables dans le temps

Pour une déformation relative U donnée, les masses sont soumises aux forces suivantes:

— les forces élastiques de rappel que l'on déduit de l'expression (4.4):

$$F_A = -K \cdot U$$

— les forces d'amortissement données par (4.11):

$$F_a = -C \cdot \dot{U}$$

— les forces extérieures $P(t)$.

L'équation du mouvement s'écrit:

$$F_R + F_A + P(t) = M \cdot \ddot{U}$$

soit:

$$\boxed{M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t)} \quad (4.15)$$

4.3. OSCILLATIONS LIBRES

On a vu que, pour les valeurs usuelles du coefficient d'amortissement, la pseudo-période d'un oscillateur simple amorti diffère très peu de la période du même oscillateur supposé non amorti.

De même, l'étude des oscillations libres de l'oscillateur multiple supposé *non amorti*, donne une bonne approximation du mouvement réel et fournit tous les éléments nécessaires pour le calcul des oscillations forcées.

On cherche le mouvement de chacune des masses en l'absence de forces extérieures $P(t)$; ce mouvement se produit par exemple quand on relâche une masse de l'oscillateur après l'avoir écartée de sa position d'équilibre.

D'après la relation (4.15), l'équation du mouvement s'écrit:

$$M\dot{U} + KU = 0 \quad (4.16)$$

Une solution particulière est donnée par l'expression:

$$U = a D \sin(\omega t + \theta) \quad (4.17)$$

où a , ω et θ sont des constantes et D un vecteur constant dont les coordonnées d_j sont les n déplacements des nœuds:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Le vecteur des accélérations a pour valeur:

$$\dot{U} = -\omega^2 a D \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 U \quad (4.18)$$

L'équation (4.16) s'écrit donc:

$$(-\omega^2 M D + K D) a \sin(\omega t + \theta) = 0 \quad (4.19)$$

Cette relation doit être vérifiée quelle que soit la valeur du temps t ; on en déduit donc:

$$(K - M \omega^2) D = 0 \quad (4.20)$$

L'expression (4.20) représente un système de n équations à n inconnues qui sont les composantes du vecteur D . Une solution différente de zéro n'est possible que si le déterminant de la matrice $K - M \omega^2$ est nul:

$$|K - M \omega^2| = 0 \quad (4.21)$$

Si on développe ce déterminant, on obtient une équation de degré n en ω^2 . La résolution de cette équation fournit les valeurs des pulsations $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J, \dots, \omega_n$ relatives aux n modes de vibration possibles.

$$\text{Le vecteur des déformations } D_J = \begin{pmatrix} d_1^J \\ \vdots \\ d_k^J \\ \vdots \\ d_n^J \end{pmatrix}$$

qui correspond au mode de vibration J , de pulsation ω_J , est donné par la relation (4.20):

$$(K - M \omega_J^2) D_J = 0 \quad (4.22)$$

Le déterminant de la matrice $K - M \omega_J^2$ étant nul, il existe une solution différente de zéro pour le vecteur D_J , qui peut être calculée, à une constante près, en fixant arbitrairement une composante (par exemple la première).

Dans le cas d'une console verticale supportant des masses régulièrement réparties, lorsque seuls les mouvements horizontaux sont pris en

compte, les modes propres de vibration classés par ordre croissant de pulsation ont l'allure indiquée sur la figure 4.6.

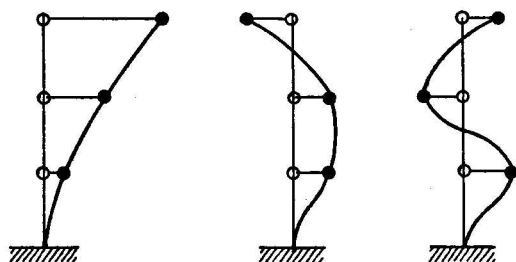
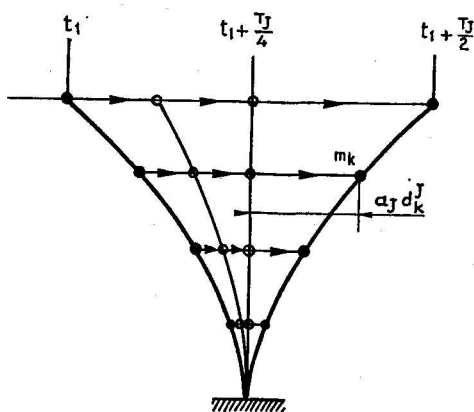


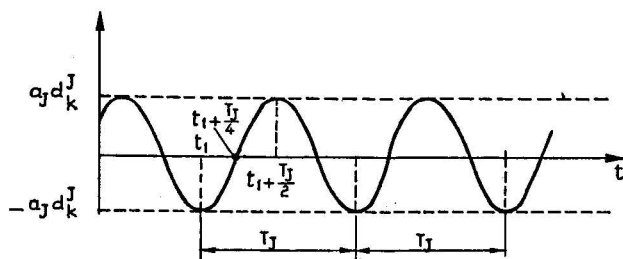
FIG. 4.6. — Modes propres de vibration d'une console

La déformée de la structure en fonction du temps, lorsqu'elle vibre sur le mode J , est donnée par la relation (4.17):

$$U(t) = a_J D_J \sin(\omega_J t + \theta_J) = \sin(\omega_J t + \theta_J) \begin{pmatrix} a_J d_1^J \\ \vdots \\ a_J d_k^J \\ \vdots \\ a_J d_n^J \end{pmatrix} \quad (4.23)$$



a) Mouvement d'ensemble



b) Mouvement de la masse m_k

FIG. 4.7. — Vibration libre suivant le mode J

Le mouvement est périodique de période:

$$T_J = \frac{2\pi}{\omega_J} \quad (4.24)$$

L'allure de la déformation se conserve pendant le mouvement (fig. 4.7 a) et le déplacement de la masse m_k suit une loi sinusoïdale en fonction du temps, d'amplitude $a_J d_k^J$ (fig. 4.7 b).

Dans le cas général, la solution est obtenue en superposant les mouvements selon les n modes de vibration,

$$U(t) = \sum_{J=1}^n a_J D_J \sin(\omega_J t + \theta_J) \quad (4.25)$$

Les coefficients a_J et θ_J sont déterminés par les conditions aux limites. Par exemple, si le mouvement est obtenu en relâchant l'oscillateur après l'avoir écarté de sa position d'équilibre, on écrira qu'à l'origine des temps la vitesse de chaque masse est nulle et le déplacement imposé.

REMARQUE

Les vecteurs modaux D_J possèdent les propriétés suivantes, démontrées en annexe B:

$$\begin{aligned} D_J^t K D_I &= 0 & \text{si } I \neq J \\ D_J^t M D_I &= 0 & \text{si } I \neq J \\ \omega_J^2 &= \frac{D_J^t K D_J}{D_J^t M D_J} \end{aligned} \quad (4.26)$$

D_J^t est le vecteur transposé du vecteur modal

$$D_J = \begin{pmatrix} d_1^J \\ \vdots \\ d_k^J \\ \vdots \\ d_n^J \end{pmatrix}$$

soit:

$$D_J^t = | d_1^J \ d_2^J \ \dots \ d_k^J \ \dots \ d_n^J |$$

4.4. OSCILLATIONS FORCÉES

Lorsque les masses sont soumises à des forces extérieures variables $P(t)$, le mouvement est défini par la relation (4.15):

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t)$$

qui représente un système de n équations différentielles du deuxième ordre reliant les n composantes $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n$ du vecteur déplacement U .

La matrice de rigidité K n'étant pas diagonale, contrairement à celle des masses, chacune de ces équations peut faire intervenir tous les déplacements u_j ; on ne peut donc résoudre directement.

On tourne cette difficulté en décomposant le vecteur U selon les n modes de vibration qui servent donc de base pour les déplacements:

$$U = \sum_{I=1}^n y_I D_I \quad (4.27)$$

Le problème se ramène alors au calcul des coefficients y_I qui sont des fonctions du temps.

Si on note \dot{y}_I et \ddot{y}_I les dérivées première et seconde de y_I par rapport au temps, l'équation (4.15) s'écrit:

$$M \sum_{I=1}^n \ddot{y}_I D_I + C \sum_{I=1}^n \dot{y}_I D_I + K \sum_{I=1}^n y_I D_I = P(t) \quad (4.28)$$

Pour calculer le coefficient y_J on multiplie les deux membres de cette équation par le vecteur D_J^t transposé du vecteur modal D_J :

$$D_J^t M \sum_{I=1}^n \ddot{y}_I D_I + D_J^t C \sum_{I=1}^n \dot{y}_I D_I + D_J^t K \sum_{I=1}^n y_I D_I = D_J^t P(t) \quad (4.29)$$

D'après les relations (4.26) les termes $\ddot{y}_I D_J^t M D_I$ et $y_I D_J^t K D_I$ obtenus en développant la relation (4.29) sont nuls si I est différent de J ; on fera l'hypothèse qu'il en est de même pour les termes $D_J^t C D_I$. On verra plus loin qu'il n'est pas nécessaire d'explicitier les termes de la matrice C , l'amortissement étant défini par un coefficient unique analogue au coefficient d'amortissement ξ d'un oscillateur simple; cette hypothèse n'est donc pas contraignante.

Après développement et élimination des termes nuls de l'équation (4.29), on obtient:

$$D_J^t M D_J \ddot{y}_J + D_J^t C D_J \dot{y}_J + D_J^t K D_J y_J = D_J^t P(t) \quad (4.30)$$

On définit de nouveaux paramètres relatifs au mode de vibration J en posant:

$$\left. \begin{aligned} m_J &= D_J^t M D_J \\ k_J &= D_J^t K D_J \\ \omega_J &= \sqrt{\frac{k_J}{m_J}} \\ c_J &= D_J^t C D_J = 2 \xi_J \omega_J m_J \\ p_J(t) &= D_J^t P(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

L'équation (4.30) s'écrit donc :

$$m_J (\ddot{y}_J + 2 \xi_J \omega_J \dot{y}_J + \omega_J^2 y_J) = p_J(t) \quad (4.32)$$

On obtient une équation différentielle en y_J analogue à celle d'un oscillateur simple (2.2) qui est de la forme :

$$m (\ddot{u} + 2 \xi \omega \dot{u} + \omega^2 u) = p(t)$$

La solution est donnée par l'intégrale de Duhamel (2.26) :

$$y_J(t) = \frac{1}{m_J \omega_{DJ}} \int_0^t p_J(\tau) e^{-\xi_J \omega_J (t-\tau)} \sin [\omega_{DJ} (t-\tau)] d\tau \quad (4.33)$$

avec $\omega_{DJ} = \omega_J \sqrt{1 - \xi_J^2}$.

Le vecteur déplacement U est ensuite obtenu par la superposition de toutes les réponses modales :

$$U = \sum_{J=1}^n y_J(t) D_J$$

On voit donc que l'étude d'un oscillateur multiple à n degrés de liberté peut se ramener à l'étude de n oscillateurs simples.

En pratique, on ne calcule toutefois que le nombre de coordonnées y_J nécessaires pour obtenir la précision souhaitée, la superposition d'un nombre réduit de modes suffisant en général pour représenter correctement le mouvement.

REMARQUES

1 — On constate en comparant les expressions (4.26) et (4.31) que l'on retrouve bien la valeur de la pulsation ω_J correspondant au mode J de vibration libre de l'oscillateur non amorti.

2 — Pour définir l'amortissement on peut se donner la valeur du coefficient ξ_J pour chaque mode, sans être tenu d'évaluer les termes de la matrice d'amortissement C .

4.5. EXCITATION PAR DÉPLACEMENT D'APPUI (cas du séisme)

On considère un oscillateur multiple relié à une base rigide (fig. 4.8) à laquelle on impose un mouvement de translation, soit à l'horizontale, soit à la verticale.

Un tel modèle permet d'étudier l'effet sur une structure du mouvement du sol provoqué par un séisme.

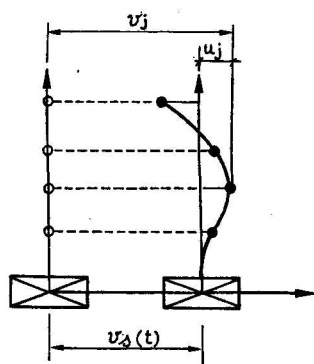


FIG. 4.8. — Modèle d'oscillateur multiple à base rigide

La structure peut être supposée soit encadrée sur la base (fig. 4.9 a), soit reliée à celle-ci par des ressorts (fig. 4.9 b) ou des éléments finis (fig. 4.9 c) modélisant le sol.

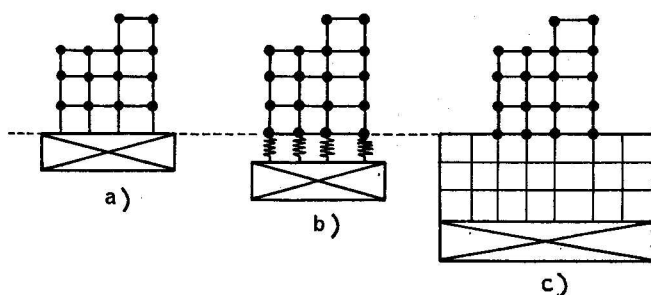


FIG. 4.9. — Types de modèles

La position de la masse m_j lors du mouvement peut être définie par :

- son déplacement absolu v_j par rapport à un repère fixe ;
- son déplacement relatif u_j par rapport à un repère lié à la base et se déplaçant avec celle-ci.

On note $v_s(t)$ le déplacement absolu de la base, supposé par exemple se produire à l'horizontale.

Le repère relatif, lié à la base, se déduit du repère absolu par une translation d'ensemble d'amplitude $v_s(t)$.

On peut donc écrire la relation entre les déplacements :

$$v_j(t) = u_j(t) + v_s(t) \delta_j \quad (4.34)$$

le coefficient δ_j prend la valeur :

$\delta_j = 1$ pour les degrés de liberté correspondant à une translation de même

direction que celle de la base (fig. 4.10 a); dans ce cas, les déplacements sont liés par la relation:

$$v_j(t) = u_j(t) + v_s(t)$$

$\delta_j = 0$ pour les autres degrés de liberté (fig. 4.10 b); dans ce cas, les déplacements relatif et absolu sont égaux:

$$v_j(t) = u_j(t)$$

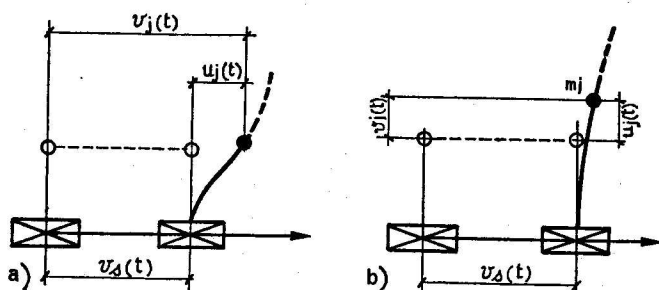


FIG. 4.10. — Relation entre les déplacements
a) $v_j(t) = u_j(t) + v_s(t)$ b) $v_j(t) = u_j(t)$

La relation (4.34) généralisée à tous les degrés de liberté prend la forme:

$$V = U + \Delta v_s(t) \quad (4.35)$$

avec:

$$V = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_j(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Pour une déformation relative U donnée, les masses sont soumises aux forces suivantes:

— les forces élastiques de rappel: $F_R = -K \cdot U$

— les forces d'amortissement: $F_A = -C \cdot \dot{U}$

Si l'on note \ddot{V} le vecteur des accélérations absolues, l'équation du mouvement s'écrit:

$$F_R + F_A = M \cdot \ddot{V}$$

soit

$$\boxed{M\ddot{V} + C\dot{U} + KU = 0} \quad (4.37)$$

On se ramène à une équation différentielle portant sur les déplacements relatifs en utilisant l'expression (4.35) que l'on dérive deux fois par rapport au temps:

$$\dot{V} = \ddot{U} + \Delta \ddot{v}_s(t) \quad (4.38)$$

$\ddot{v}_s(t)$ représente l'accélération absolue de la base qui est donnée par l'accélérogramme de la secousse sismique considérée. En remplaçant dans (4.37) \dot{V} par sa valeur, on obtient:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M\Delta\ddot{v}_s(t) \quad (4.39)$$

On voit que l'on retrouve l'équation (4.15), à condition de poser:

$$P(t) = -\ddot{v}_s(t) M\Delta = -\ddot{v}_s(t) \begin{vmatrix} m_1 \delta_1 \\ \vdots \\ m_j \delta_j \\ \vdots \\ m_n \delta_n \end{vmatrix} \quad (4.40)$$

$$\delta_j = 0 \text{ ou } 1.$$

On est donc ramené à l'étude d'un oscillateur multiple soumis à des forces extérieures variables dans le temps.

Ces forces sont les forces d'inertie qui agiraient sur les masses si la structure se déplaçait en bloc avec sa base, sans subir de déformation.

En effet, l'accélération absolue des masses est dans ce cas égale à $\ddot{v}_s(t)$ dans la direction du déplacement, nulle dans les autres directions: la force d'inertie appliquée à la masse m_j est donc soit égale à $-m_j \ddot{v}_s(t)$, soit nulle, ce qui correspond bien à la valeur donnée par l'expression (4.40).

La solution de l'équation du mouvement (4.39) est donnée par les expressions (4.27) et (4.33) qui, compte tenu de (4.40), prennent la forme:

$$U = \sum_{j=1}^n u_j(t) \Phi_j \quad (4.41)$$

$$u_j(t) = \frac{-1}{\omega_{DJ}} \int_0^t \ddot{v}_s(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin [\omega_{DJ} (t-\tau)] d\tau \quad (4.42)$$

Φ_j est un vecteur proportionnel au vecteur modal D_j ; ses termes sont sans dimension:

$$\Phi_j = a_j D_j \quad (4.43)$$

$$\text{avec } a_j = \frac{D_j^t M \Delta}{D_j^t M D_j}$$

L'expression (4.42) est identique à l'expression (2.40) qui donne le déplacement d'un oscillateur simple dont la base est soumise à une accélération $\ddot{v}_s(t)$:

$$u(t) = \frac{-1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\xi_J \omega_J (t-\tau)} \sin [\omega_D (t - \tau)] d\tau$$

On voit donc que, pour calculer la réponse selon le mode J , on se ramène à l'étude d'un oscillateur simple de pulsation ω_J et de coefficient d'amortissement ξ_J .

Pour un accélérogramme donné, l'intégrale de Duhamel (4.42) permet le calcul du déplacement relatif en fonction du temps. La répartition des déplacements pour les diverses masses s'effectue ensuite à l'aide du vecteur Φ_J .

Si, au lieu d'un accélérogramme, on utilise un spectre de déplacement on pourra calculer les *déplacements relatifs maxima* pour le mode J par la formule:

$$U_J = u_J \Phi_J \quad (4.44)$$

où u_J représente la valeur lue sur le spectre.

Si on utilise un spectre d'accélération, le vecteur Γ_J des *pseudo-accélé-rations maxima* à appliquer aux masses est donné par:

$$\Gamma_J = \gamma_J \Phi_J \quad (4.45)$$

où γ_J représente la valeur lue sur le spectre, liée à celle du paramètre u_J par la relation:

$$\gamma_J = \omega_J^2 u_J \quad (4.46)$$

Cas particulier

On considère une structure représentée par un modèle plan dans lequel on ne prend en compte qu'un degré de liberté par nœud (fig. 4.11).

Ainsi on calcule la réponse à un séisme horizontal en supposant que les n masses se déplacent uniquement à l'horizontale, le déplacement vertical étant négligé.

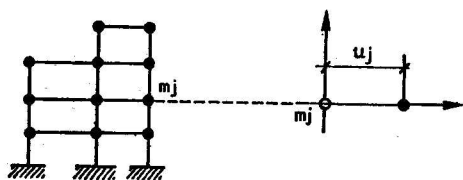


FIG. 4.11. — Modèle à un seul degré de liberté par nœud

Dans ce cas particulier, le vecteur Δ a toutes ses composantes égales à 1:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

En écrivant le vecteur modal D_J sous la forme:

$$D_J = \begin{pmatrix} d_1^J \\ \vdots \\ d_k^J \\ \vdots \\ d_n^J \end{pmatrix}$$

la relation (4.43) devient:

$$\Phi_J = a_J D_J \quad (4.48)$$

$$\text{avec: } a_J = \frac{\sum_{k=1}^n m_k d_k^J}{\sum_{k=1}^n m_k (d_k^J)^2}$$

La composante de rang i du vecteur Φ_J a donc pour valeur:

$$\varphi_i^J = d_i^J \frac{\sum_{k=1}^n m_k d_k^J}{\sum_{k=1}^n m_k (d_k^J)^2} \quad (4.49)$$

Le coefficient φ_i^J noté γ dans les Règles P.S. 1969 est un coefficient de répartition des déplacements ou des accélérations aux divers nœuds; pour un oscillateur simple sa valeur est égale à l'unité.

MÉTHODE DE CALCUL

Pour les structures à comportement élastique linéaire, deux méthodes de calcul sont utilisables, basées sur le principe de la décomposition modale.

La première méthode consiste en l'étude des efforts dans la structure en fonction du temps; elle nécessite la donnée d'un accélérogramme et impose, en pratique, l'usage de l'ordinateur.

La deuxième méthode consiste en la recherche du maximum de réponse sur chacun des modes propres, dont on déduit la valeur maximum probable des efforts; elle nécessite la connaissance du spectre de réponse de la secousse sismique.

Cette dernière méthode, sous une forme simplifiée, constitue la base des Règles parasismiques 1969.

5.1. ÉTUDE DANS LE TEMPS D'APRÈS UN ACCÉLÉROGRAMME

La structure est supposée soumise à un séisme qui provoque des mouvements du sol dans une direction donnée, définis par un accélérogramme.

Elle est représentée par un modèle dont on calcule la matrice de raideur K et la matrice des masses M ; l'amortissement est défini par un coefficient ξ que l'on suppose en général identique pour tous les modes.

Le calcul des efforts en fonction du temps se décompose de la manière suivante:

5.1.1. Calcul des modes propres de vibration

On effectue la recherche des modes propres de vibration de la structure supposée non amortie.

En pratique, seuls les premiers modes dans un classement par valeur décroissante de périodes propres sont à retenir, car eux seuls sont excités de façon notable. De plus, les modes élevés n'ont, en général, pas de sens physique car ils peuvent provenir d'un manque de précision du modèle, dû, par exemple, à la concentration des masses aux nœuds.

Aussi, on se contente, dans les cas courants, de calculer un nombre de modes N restreint par rapport au maximum possible (par exemple les 20 premiers).

Pour chaque mode, on détermine la pulsation ω_J , le vecteur des déplacements D_J , puis le vecteur Φ_J qui lui est proportionnel.

5.1.2. Calcul des réponses modales

A un instant t donné, on calcule la coordonnée $u_J(t)$ relative au mode J à l'aide de l'intégrale de Duhamel (4.42), puis le vecteur des déplacements relatifs $U_J(t)$:

$$U_J(t) = u_J(t) \Phi_J \quad (5.1)$$

5.1.3. Superposition des réponses modales

Le déplacement des nœuds de la structure à l'instant t est donné par:

$$U(t) = \sum_{J=1}^N u_J(t) \Phi_J \quad (5.2)$$

On en déduit la déformation de tous les éléments reliant les nœuds entre eux, donc les efforts.

5.1.4. Prise en compte d'une excitation sismique selon trois directions

Les mouvements du sol sont définis par trois accélérogrammes correspondant à deux directions horizontales perpendiculaires et à la direction verticale. Dans un but de simplification, il est en général admis d'utiliser un accélérogramme unique pour les deux directions horizontales, ce même accélérogramme étant pondéré par un coefficient égal à 2/3 pour la direction verticale (1); on se donne de plus un décalage dans le temps pour le mouvement du sol selon chacune des trois directions, choisi de manière à éviter toute corrélation entre ces mouvements.

A un instant donné, on calcule les déformations et les efforts correspondant à chaque direction d'excitation, et on effectue la somme des résultats obtenus.

(1) U.S. NRC Standard Review Plan, Section 3.7.1. *Seismic Input*.

5.1.5. Spectres de plancher

La méthode d'analyse dans le temps permet de calculer à tout instant le déplacement relatif d'un nœud quelconque d'une structure; on en déduit la valeur de l'accélération absolue de ce nœud dans une direction donnée.

L'accélérogramme ainsi obtenu, permet de calculer un « spectre de plancher » qui représente la réponse d'un oscillateur simple lié au nœud considéré de la structure.

Le spectre de plancher sert à calculer la réponse d'un équipement suffisamment léger pour ne pas perturber le mouvement du nœud auquel il est lié; ce calcul est identique à celui utilisé pour un oscillateur simple lié au sol lorsque le séisme est défini par son spectre de réponse (§ 5.2).

Dans le cas d'un équipement lourd, la méthode du « spectre de plancher » ne peut être utilisée; il faut alors inclure cet équipement dans le modèle général de la structure.

5.2. ÉTUDE À L'AIDE D'UN SPECTRE DE RÉPONSE

La structure est supposée soumise à un séisme, agissant dans une direction donnée, et défini par son spectre de réponse.

Le calcul des modes propres s'effectue comme indiqué au § 5.11 et la suite de l'étude comporte les phases suivantes:

5.2.1. Calcul des réponses modales

On étudie la réponse pour chaque mode propre séparément; deux variantes sont possibles selon la nature du spectre utilisé:

a) Si on utilise un spectre des déplacements, les déplacements maxima selon le mode J sont donnés par:

$$U_J = u_J \Phi_J \quad (5.3)$$

u_J étant la valeur lue sur le spectre.

Les efforts dans chaque élément de la structure sont ensuite calculés d'après les déformations qui résultent de ces déplacements.

b) Si on utilise un spectre des accélérations, les pseudo-accélérations à appliquer aux masses sont données par le vecteur:

$$\Gamma_J = \gamma_J \Phi_J \quad (5.4)$$

γ_J étant la valeur lue sur le spectre.

Les forces statiques équivalentes sont le produit des masses par les pseudo-accélérations. Appliquées à la structure, elles engendrent des déplacements et des efforts que l'on peut calculer par les méthodes usuelles de la résistance des matériaux. La méthode est schématisée sur la figure 5.1.

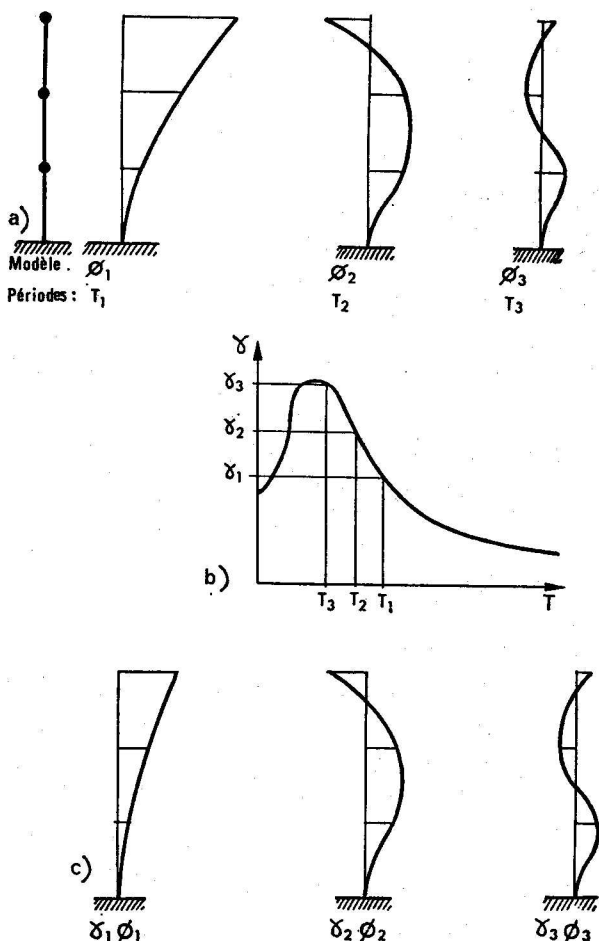


FIG. 5.1. — Principes de l'étude à l'aide d'un spectre de réponse
 a) Calcul des vecteurs propres. — b) Lecture du spectre. — c) Réponses modales

5.2.2. Sélection des modes utiles

Pour la suite de l'étude, on ne conserve que les modes qui donnent des efforts notables, la sélection s'effectuant d'après la valeur maximum de l'énergie potentielle emmagasinée dans la structure lors du mouvement.

Pour le mode J , cette énergie a pour expression :

$$E_J = \frac{1}{2} U_J^t K U_J \quad (5.5)$$

U_J^t représente le vecteur transposé du vecteur U_J des déplacements relatifs maxima selon le mode J .

On constate en général que deux à trois modes au plus sont à retenir, l'un d'eux étant nettement prépondérant par rapport aux autres.

REMARQUE

Pour un élément de structure donné, cette méthode ne permet pas, à coup sûr, de sélectionner les modes prépondérants: il peut en effet se produire des cas où l'élément est dimensionné par un mode local de vibration qui donne peu d'énergie à l'échelle de la structure et n'est donc pas détecté.

De tels modes locaux se produisent lorsqu'une masse est attachée à

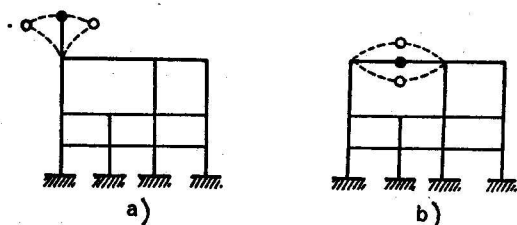


FIG. 5.2. — Modes locaux de vibration

un élément qui peut se déformer d'une façon relativement indépendante du reste de la structure, comme par exemple une console (fig. 5.2 a) ou une poutre (fig. 5.2 b).

On devra détecter l'existence de ces modes locaux au moment de la modélisation, et en tenir compte pour le calcul des efforts dans les éléments concernés.

5.2.3. Choix du coefficient d'amortissement

Pour effectuer la lecture des spectres de réponse, il convient pour chaque mode de déterminer un coefficient d'amortissement. Deux cas peuvent se présenter:

a) L'oscillateur est constitué de matériaux ayant le même coefficient d'amortissement; on adopte alors pour chaque mode un coefficient identique lu sur le tableau du § 2.5. Cela revient à supposer que l'amortissement provient du matériau lui-même; on néglige donc la présence d'éléments non structuraux comme les cloisons, faute de pouvoir quantifier leur influence.

b) L'oscillateur est constitué de matériaux ayant des coefficients d'amortissement différents. On ne peut dans ce cas utiliser un coefficient unique pour tous les modes. En effet, selon le mode de vibration considéré, un matériau sera plus ou moins sollicité que les autres, ce qui change la valeur de l'amortissement de la structure.

Pour un mode donné, l'importance de la déformation imposée à chaque matériau peut être évaluée globalement par l'énergie potentielle correspondante. On calcule un coefficient d'amortissement moyen de la structure en pondérant les coefficients d'amortissement de chacun des matériaux par les énergies (1).

Dans le cas de trois matériaux, par exemple le sol, le béton armé, la charpente métallique soudée (fig. 5.3), auxquels correspondent des coefficients ξ_1 , ξ_2 , et ξ_3 , on calcule pour chaque mode les énergies potentielles E_1 , E_2 , et E_3 . La valeur de l'amortissement moyen ξ est donné par l'expression :

$$\xi = \frac{E_1 \xi_1 + E_2 \xi_2 + E_3 \xi_3}{E_1 + E_2 + E_3} \quad (5.6)$$

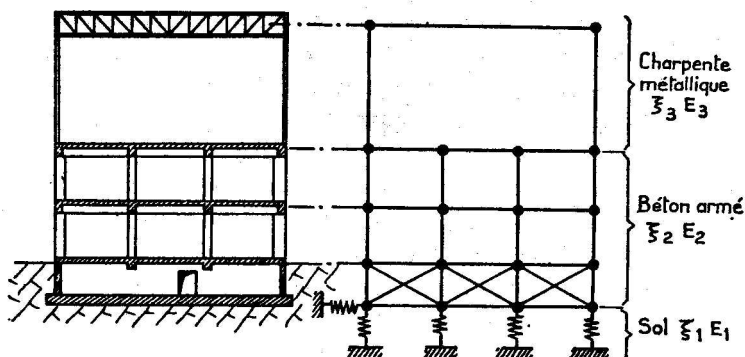


FIG. 5.3. — Calcul d'un coefficient d'amortissement moyen

5.2.4. Superposition des réponses modales

Le calcul à l'aide d'un spectre permet de connaître le maximum de la réponse pour chacun des modes étudiés, mais ne donne pas d'indication sur la valeur du temps correspondant à ce maximum.

Pour évaluer les efforts dans la structure, un calcul pessimiste consiste à supposer les maxima concomitants, ce qui revient à combiner les modes en les pondérant par un coefficient égal à ± 1 .

Dans le cas de trois modes propres, on considère donc les combinaisons :

$$1 + 2 + 3$$

$$1 + 2 - 3$$

$$1 - 2 + 3$$

$$1 - 2 - 3$$

ainsi que les combinaisons opposées.

(1) U.S. NRC Standard Review Plan, 3.7.2. *Seismic system analysis.*

Cette méthode, acceptable lorsqu'un mode est nettement prépondérant vis-à-vis des autres, est très défavorable dans les autres cas.

On pourra alors effectuer des calculs moins pessimistes en utilisant la méthode de la *superposition quadratique* ⁽¹⁾ qui tient compte de la non concomitance des réponses modales maxima.

Cette méthode peut être appliquée de la manière suivante:

a) *Vérification effectuée d'après la valeur d'un seul paramètre*

On appelle x_j la valeur maximum que prend un paramètre x pour le mode de vibration J ; cette valeur est issue d'un calcul *linéaire* effectué à partir de la déformée modale.

Dans le cas des poutres en béton armé, un tel paramètre peut être l'effort tranchant pour la vérification des cadres, le moment fléchissant pour le calcul en flexion simple si l'effort normal est négligeable, etc.

On ne peut ranger dans cette catégorie de paramètres la section des armatures d'une poutre ou d'un poteau calculée en flexion composée puisque ce calcul n'est pas linéaire.

Lorsque les fréquences des N modes propres pris en compte sont différentes entre elles d'au moins 10%, on fait l'hypothèse que les déplacements selon ces modes sont des variables aléatoires indépendantes.

Pour le mode de vibration J , dire que le paramètre x a pour valeur maximum x_j revient alors à affirmer que la probabilité pour que x excède x_j est inférieure à une valeur jugée négligeable.

Lorsque tous les modes agissent ensemble, la valeur maximum \bar{x} du paramètre x est celle qui correspond à la même probabilité de ne pas être dépassée. On démontre que la valeur de \bar{x} est donnée par la moyenne quadratique:

$$\bar{x} = \sqrt{\sum_{j=1}^N x_j^2} \quad (5.7)$$

Deux modes ayant des fréquences voisines à 10% près ne peuvent pas être considérés comme indépendants; on les regroupe alors en un mode unique en additionnant les valeurs absolues des paramètres x_j correspondant, avant d'effectuer le calcul de la moyenne quadratique.

Si, par exemple, les deux premiers modes sont voisins, on applique donc la formule:

$$\bar{x} = \sqrt{(|x_1| + |x_2|)^2 + \sum_{j=3}^N x_j^2} \quad (5.8)$$

⁽¹⁾ Regulatory guide 1-92, U.S. Atomic Energy Commission.

Si l'on note x_0 la valeur du paramètre x pour le cas de charge statique qui doit être superposé au cas de charge dynamique, on doit prendre en compte dans les calculs les valeurs extrêmes:

$$x_0 + \bar{x} \quad \text{et} \quad x_0 - \bar{x}$$

b) *Vérification effectuée d'après la valeur de deux paramètres*

On note x_J et y_J les valeurs extrêmes concomitantes que prennent deux paramètres x et y , lorsque la déformée correspondant au mode J est maximum. Ces valeurs doivent être prises avec leur signe, et être issues d'un calcul linéaire effectué à partir de la déformée modale.

Ces paramètres peuvent être:

— Le moment fléchissant et l'effort normal pour le calcul des armatures longitudinales d'une poutre en béton armé.

— L'effort tranchant et l'effort normal pour le calcul des armatures transversales d'une poutre en béton précontraint.

Lorsque les N modes pris en compte ne sont pas voisins en fréquence, la valeur maximum de chaque paramètre pris individuellement est donnée par la moyenne quadratique:

$$\bar{x} = \sqrt{\sum_{J=1}^N x_J^2} \quad \bar{y} = \sqrt{\sum_{J=1}^N y_J^2} \quad (5.9)$$

La corrélation entre les paramètres est, d'autre part, définie par le coefficient:

$$\rho = \frac{\sum_{J=1}^N x_J y_J}{\bar{x} \bar{y}} \quad (5.10)$$

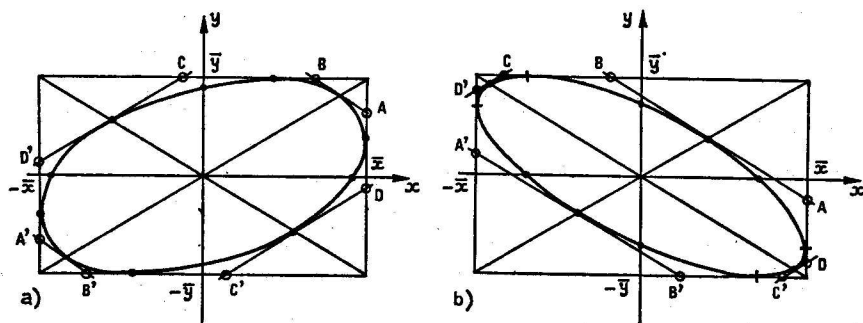
On démontre ⁽¹⁾ que les couples probables (x, y) sont situés à l'intérieur d'une ellipse inscrite dans un rectangle de côté $2\bar{x}$ et $2\bar{y}$ (fig. 5.4), d'équation:

$$\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\bar{y}}\right)^2 - 2\rho \frac{xy}{\bar{x}\bar{y}} = 1 - \rho^2 \quad (5.11)$$

Selon le signe de ρ on obtient la disposition correspondant à la figure 5.4 a ($\rho > 0$) ou à la figure 5.4 b ($\rho < 0$).

Dans un but de simplification, l'ellipse peut être remplacée par l'octogone circonscrit (fig. 5.4) défini par les points:

⁽¹⁾ A. K. GUPTA and M. P. SINGH, *Design of column sections subjected to three components of earthquake*. Nuclear Engineering and Design 41 (1977), p. 129-133.

FIG. 5.4. — Domaine probable du couple (x, y) a) Cas $\rho > 0$. b) Cas $\rho < 0$

$$A \begin{cases} \bar{x} \\ \bar{y} (\sqrt{2(1 + \rho)} - 1) \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \bar{x} (\sqrt{2(1 + \rho)} - 1) \\ \bar{y} \end{cases}$$

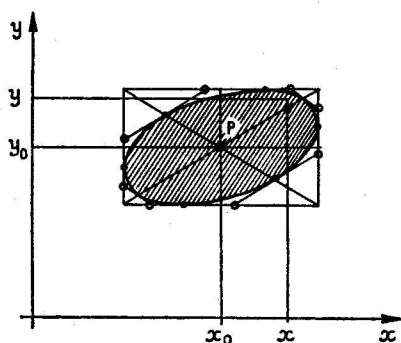
(5.12)

$$C \begin{cases} \bar{x} (1 - \sqrt{2(1 - \rho)}) \\ \bar{y} \end{cases}$$

$$D \begin{cases} \bar{x} \\ \bar{y} (1 - \sqrt{2(1 - \rho)}) \end{cases}$$

et les points A', B', C', D' symétriques des précédents par rapport à l'origine.

Si l'on note x_0 et y_0 la valeur des paramètres x et y pour le cas de charge statique qui doit être superposé au cas de charge dynamique, on doit prendre en compte tous les points situés à l'intérieur de l'ellipse, celle-ci étant centrée au point P de coordonnées x_0, y_0 (fig. 5.5).

FIG. 5.5. — Couples (x, y) à prendre en compte

Dans les cas usuels, la forme des courbes d'interaction entre deux paramètres est telle que le point le plus défavorable est situé sur l'ellipse. A titre d'exemple, on a tracé sur la figure 5.6 les courbes d'interaction entre le moment et l'effort normal d'une section de béton armé symétrique, chaque courbe correspondant à une section totale d'acier donnée.

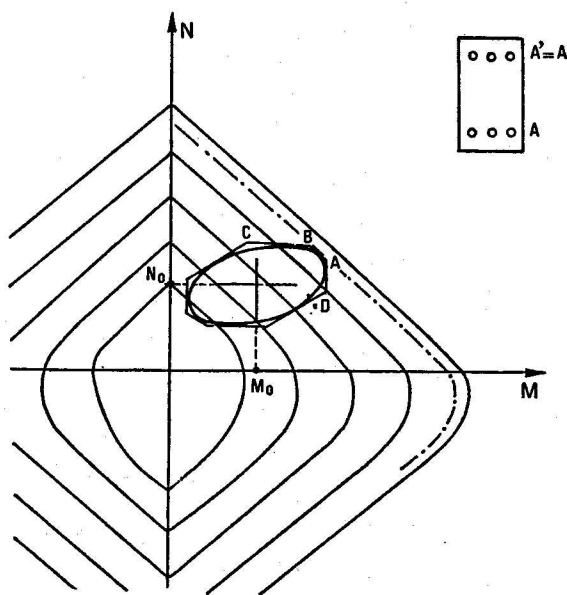


FIG. 5.6. — Utilisation d'un abaque d'interaction

Si on fait un calcul approché en remplaçant l'ellipse par l'octogone circonscrit, le point le plus défavorable est l'un des sommets. On doit effectuer une vérification avec huit couples de paramètres; celui correspondant par exemple au point B est donné par:

$$\begin{cases} x_0 + \bar{x} (\sqrt{2(1+\rho)} - 1) \\ y_0 + \bar{y} \end{cases} \quad (5.13)$$

Lorsque deux modes sont voisins, l'écart entre fréquences propres étant inférieur à 10%, on les additionne (ou on les soustrait si cela est plus défavorable) et on les traite ensuite comme s'ils formaient un mode unique. Sous cette réserve, les conclusions du présent paragraphe restent valables.

c) Vérification effectuée d'après la valeur de trois paramètres

On note x_j, y_j, z les valeurs extrêmes concomitantes que prennent

trois paramètres x , y , z lorsque la déformée correspondant au mode J est maximum. Ces valeurs doivent être prises avec leur signe et être issues d'un calcul linéaire effectué à partir de la déformée modale.

Ces paramètres sont par exemple l'effort normal et les deux moments fléchissants pour le calcul en flexion déviée d'une section de béton armé.

Lorsque les N modes pris en compte ne sont pas voisins en fréquence, la valeur maximum de chaque paramètre pris individuellement est donnée par la moyenne quadratique:

$$\bar{x} = \sqrt{\sum_{J=1}^N x_J^2} \quad \bar{y} = \sqrt{\sum_{J=1}^N y_J^2} \quad (5.14)$$

$$\bar{z} = \sqrt{\sum_{J=1}^N z_J^2}$$

La corrélation entre les paramètres est d'autre part définie par les coefficients:

$$\rho_1 = \frac{\sum_{J=1}^N x_J y_J}{\bar{x} \bar{y}} \quad \rho_2 = \frac{\sum_{J=1}^N x_J z_J}{\bar{x} \bar{z}} \quad \rho_3 = \frac{\sum_{J=1}^N y_J z_J}{\bar{y} \bar{z}} \quad (5.15)$$

Les points (x, y, z) probables sont situés à l'intérieur d'un ellipsoïde inscrit dans un parallélépipède de côté $2\bar{x}$, $2\bar{y}$ et $2\bar{z}$, qui peut être défini par le contour apparent de ses projections sur les trois plans de coordonnées (fig. 5.7).

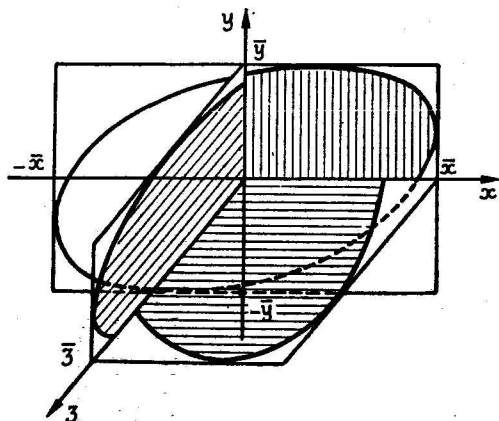


FIG. 5.7. — Contour apparent des projections d'un ellipsoïde sur les trois plans de coordonnées

Cet ellipsoïde peut être remplacé par le polyèdre circonscrit dont les 24 sommets ont pour coordonnées :

$$\begin{array}{ll}
 1 \left| \begin{array}{l} \bar{x} \\ \bar{y} (\sqrt{2(1+\rho_3)} - 1) \\ \bar{z} (\sqrt{2(1+\rho_2)} - 1) \end{array} \right. & 2 \left| \begin{array}{l} \bar{x} (\sqrt{2(1+\rho_3)} - 1) \\ \bar{y} \\ \bar{z} (\sqrt{2(1+\rho_1)} - 1) \end{array} \right. \\
 3 \left| \begin{array}{l} \bar{x} (\sqrt{2(1+\rho_2)} - 1) \\ \bar{y} (\sqrt{2(1+\rho_1)} - 1) \\ \bar{z} \end{array} \right. & 4 \left| \begin{array}{l} \bar{x} (1 - \sqrt{2(1-\rho_3)}) \\ \bar{y} \\ \bar{z} (1 - \sqrt{2(1-\rho_1)}) \end{array} \right. \\
 5 \left| \begin{array}{l} \bar{x} (1 - \sqrt{2(1-\rho_2)}) \\ \bar{y} (1 - \sqrt{2(1-\rho_1)}) \\ \bar{z} \end{array} \right. & 6 \left| \begin{array}{l} \bar{x} \\ \bar{y} (1 - \sqrt{2(1-\rho_3)}) \\ \bar{z} (1 - \sqrt{2(1-\rho_2)}) \end{array} \right. \\
 7 \left| \begin{array}{l} \bar{x} \\ \bar{y} (\sqrt{2(1+\rho_3)} - 1) \\ \bar{z} (1 - \sqrt{2(1-\rho_2)}) \end{array} \right. & 8 \left| \begin{array}{l} \bar{x} (1 - \sqrt{2(1-\rho_3)}) \\ \bar{y} \\ \bar{z} (\sqrt{2(1+\rho_1)} - 1) \end{array} \right. \\
 9 \left| \begin{array}{l} \bar{x} (\sqrt{2(1+\rho_2)} - 1) \\ \bar{y} (1 - \sqrt{2(1-\rho_1)}) \\ \bar{z} \end{array} \right. & 10 \left| \begin{array}{l} \bar{x} \\ \bar{y} (1 - \sqrt{2(1-\rho_3)}) \\ \bar{z} (\sqrt{2(1+\rho_2)} - 1) \end{array} \right. \\
 11 \left| \begin{array}{l} \bar{x} (\sqrt{2(1+\rho_3)} - 1) \\ \bar{y} \\ \bar{z} (1 - \sqrt{2(1-\rho_1)}) \end{array} \right. & 12 \left| \begin{array}{l} \bar{x} (1 - \sqrt{2(1-\rho_2)}) \\ \bar{y} (\sqrt{2(1+\rho_1)} - 1) \\ \bar{z} \end{array} \right.
 \end{array} \quad (5.16)$$

Les douze autres sommets sont déduits des précédents par symétrie par rapport à l'origine.

Les vérifications seront effectuées pour les coordonnées de ces sommets.

Si l'on note x_0 , y_0 , et z_0 la valeur des paramètres x , y et z pour le cas

de charge statique à superposer au cas de charge dynamique, les coordonnées correspondant par exemple au sommet symétrique du sommet 8 ont pour valeur:

$$\begin{cases} x_0 - \bar{x} (1 - \sqrt{2(1 - \rho_2)}) \\ y_0 - \bar{y} \\ z_0 - z (\sqrt{2(1 + \rho_1)} - 1) \end{cases} \quad (5.17)$$

d) Cas particulier des Règles P.S. 1969

Dans le cas des structures faiblement amorties, ces règles imposent de prendre en compte les trois premiers modes de vibration auxquels correspondent respectivement les valeurs x_1 , x_2 , x_3 d'un paramètre x quelconque.

La valeur maximum \bar{x} du paramètre x est donnée par:

$$\bar{x} = \sqrt{x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2} \quad (5.18)$$

Les coefficients λ_2 et λ_3 , compris entre 0 et 1 dépendent de la valeur de la période du premier mode.

Il n'est pas indiqué dans les Règles ce qu'il convient de faire lorsqu'un calcul doit être effectué en tenant compte des valeurs concomitantes de plusieurs paramètres, mais on voit qu'il revient au même d'utiliser l'expression 5.7 en ayant pondéré, au préalable, les modes 2 et 3 par les coefficients $\sqrt{\lambda_2}$ et $\sqrt{\lambda_3}$.

Si on adopte ce procédé dans le cas de deux paramètres x et y , on calcule les coefficients:

$$\begin{cases} \bar{x} = \sqrt{x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2} \\ \bar{y} = \sqrt{y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2} \\ \rho = \frac{x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \lambda_3 x_3 y_3}{\bar{x} \bar{y}} \end{cases} \quad (5.19)$$

On détermine ensuite les divers couples (x, y) à prendre en compte suivant les indications du paragraphe b) précédent.

5.2.5. Prise en compte d'une excitation sismique selon trois directions

Les mouvements du sol sont définis par trois spectres correspondant à deux directions horizontales perpendiculaires et à la direction verticale; il est en général admis d'utiliser un spectre unique pour les deux directions horizontales, et le même spectre pondéré par un coefficient égal à 2/3 pour

la direction verticale ⁽¹⁾. On suppose que les mouvements du sol selon les trois directions ne sont pas corrélés entre eux.

Pour chaque direction de séisme, un certain nombre de modes sont excités, en général différents d'une direction à l'autre. Puisqu'on admet qu'il n'existe de corrélation ni entre les modes ni entre les directions, tous les modes excités sont regroupés et traités comme indiqué en 5.2.4. On applique donc la règle de la superposition quadratique *sans faire de distinction entre les directions d'excitation*.

5.3. ÉTUDE D'APRÈS LES RÈGLES PARASISMIQUES P.S. 1969

Les Règles P.S. 1969 s'appliquent principalement aux bâtiments courants dont les éléments de contreventement ont une raideur variant peu d'un étage à l'autre, et qui présentent une masse régulièrement répartie.

Le bâtiment est supposé soumis à une excitation horizontale et une excitation verticale concomitantes, mais l'étude de la réponse n'est effectuée que pour l'excitation horizontale seule.

On calcule les forces statiques équivalentes qui doivent être appliquées aux masses dans la direction horizontale et dans la direction verticale, et des couples de torsion d'ensemble d'axe vertical.

Dans les cas courants, on évalue seulement la période du premier mode de vibration; la structure est en général assimilée à une console, encadrée à la base, le déplacement horizontal des nœuds étant seul pris en compte (fig. 5.8).

Les masses sont supposées concentrées aux nœuds; on note A_j le déplacement de la masse m_j .

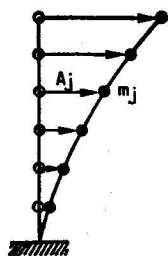


FIG. 5.8. — Modélisation d'un bâtiment sous forme de console

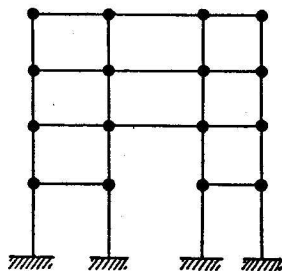


FIG. 5.9. — Structure ne pouvant être modélisée par une console

⁽¹⁾ U.S. NRC Standard Review Plan, Section 3.7.1. *Seismic Input*.

Ce modèle comporte un seul degré de liberté par niveau et ne peut donc permettre l'étude d'un bâtiment dont un plancher serait discontinu (fig. 5.9) ou ne pourrait pas être supposé indéformable dans son plan.

Pour les structures complexes, qui ne peuvent être modélisées par une console verticale, il est nécessaire de calculer plusieurs modes de vibration. L'étude est comparable à celle décrite au § 5.2, la réponse étant obtenue par superposition quadratique des réponses modales.

5.3.1. Calcul du premier mode de vibration

Pour le calcul de la période du premier mode de vibration, on peut, soit utiliser les formules forfaitaires données par les Règles P.S. 1969, soit effectuer un calcul dynamique en employant une des deux méthodes numériques suivantes :

a) Méthode de Vianelo Stodola

La déformée et la période du premier mode de vibration sont évaluées par itération; les modes suivants peuvent ensuite être déterminés, mais au prix de calculs très laborieux.

b) Méthode de Rayleigh

La période du premier mode est déterminée d'une manière approchée en partant d'une déformée arbitraire mais plausible. La précision obtenue est très suffisante en pratique, ce qui fera employer de préférence cette méthode, plus rapide que la précédente.

Une description et un exemple de calcul sont donnés en annexe C. Il convient toutefois de noter qu'en général on ne prend pas en compte dans le calcul des périodes, certains éléments structuraux (portiques, poteaux, éléments de refend à faible inertie) ou non structuraux (cloisons, murs-rideaux), ce qui fausse les résultats. Il est donc conseillé, pour la majorité des bâtiments courants, d'utiliser les formules forfaitaires du P.S. 1969.

5.3.2. Calcul des forces statiques équivalentes

5.3.2.1. Forces horizontales

Chaque masse m_j est soumise à une force horizontale H_j ayant pour valeur :

$$H_j = \alpha \beta \gamma \delta m_j \quad (5.20)$$

- le coefficient α définit l'intensité sismique;
- le coefficient β est une fonction de la période. Le produit $\alpha \beta$ est équivalent à un spectre de réponse;
- le coefficient δ dépend de la nature du sol et du type de la fondation;
- le coefficient γ a pour expression :

$$\gamma = A_j \frac{\sum_{k=1}^n m_k A_k}{\sum_{k=1}^n m_k A_k^2} \quad (5.21)$$

le terme A_k représentant le déplacement relatif de la masse m_k selon le premier mode de vibration. Si ce déplacement modal n'a pas été calculé, on peut supposer que la déformée varie linéairement depuis le bas du bâtiment, où elle est nulle, jusqu'au sommet (fig. 5.10). Cette approximation grossière de la déformée modale permet en effet d'évaluer la résultante des forces statiques équivalentes avec une précision suffisante.

On peut remarquer, aux notations près, que l'expression (5.21) est identique à l'expression (4.49) précédemment définie au § 4.5.

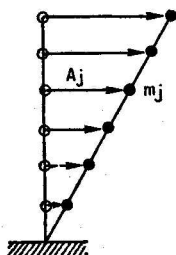


FIG. 5.10. — Déformée approchée pour le calcul du coefficient γ

5.3.2.2. Forces verticales

La masse m_j est soumise à une force verticale V_j ayant pour valeur :

$$\begin{aligned} V_j &= \pm \frac{H_j}{\sqrt{\alpha}} && \text{pour } \alpha \geq 1 \\ V_j &= \pm H_j && \text{pour } \alpha < 1 \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.3.2.3. Couples d'axe vertical

Si le centre de gravité des masses ne coïncide pas avec celui des raideurs des éléments de contreventement, des mouvements de torsion autour d'un axe vertical peuvent se produire au cours d'un séisme; l'accélération des masses d'un plancher n'est donc pas uniforme.

Pour en tenir compte, il y a lieu d'ajouter à l'excentricité initiale une excentricité supplémentaire qui correspond donc à la prise en compte d'un couple d'axe vertical.

5.3.3. Calcul des efforts dans la structure

La structure est soumise aux forces statiques équivalentes précédem-

ment déterminées. Pour les forces horizontales on est ramené à un calcul de contreventement s'effectuant par les méthodes usuelles.

5.4. CHOIX DE LA MÉTHODE DE CALCUL

Le choix de la méthode de calcul la plus adaptée dépend essentiellement du type de la structure. On distinguera, par la suite, les bâtiments courants, les bâtiments faiblement amortis et les structures complexes.

a) Types de constructions

On appelle *bâtiment courant*, une construction présentant les caractéristiques suivantes :

— Les éléments de contreventement sont continus et leur raideur varie régulièrement suivant la hauteur.

— Les masses sont régulièrement réparties.

— La distribution intérieure des cloisons, comparable à celle d'un bâtiment d'habitation, permet de considérer l'amortissement comme normal au sens des Règles P.S. 1969.

— Le terrain de fondation est peu déformable vis-à-vis de la structure qui peut donc être considérée comme encastree.

Les *bâtiments faiblement amortis* présentent la même régularité de structure et de masse que les bâtiments courants ; ils s'en distinguent, toutefois, par l'absence de cloisons. On range donc dans cette catégorie les structures industrielles à ossature nue, les garages, les halls de stockage et par assimilation les cheminées, les pylônes, ...

On appelle *structures complexes* toutes celles qui n'ont pas été visées précédemment, soit à cause de l'irrégularité de la distribution des masses ou des raideurs, soit à cause de la déformabilité du sol qui ne permet pas de faire l'hypothèse d'un encastrement parfait à la base.

b) Choix de la méthode

Pour les *bâtiments courants*, on emploiera les Règles P.S. 1969 qui conduisent à des calculs très simples et n'imposent pas de connaître les caractéristiques exactes du sol, l'influence de celui-ci étant évalué de manière forfaitaire par le coefficient δ .

Pour ce type de bâtiments, seul le premier mode de vibration correspond à des efforts notables ; on calcule donc sa période, puis les pseudo-accélérations des masses ; la répartition des forces entre les éléments de contreventement s'effectue ensuite par les méthodes usuelles, avec emploi éventuel de l'ordinateur.

Pour les *bâtiments faiblement amortis*, on utilise de préférence les Règles P.S. 1969, et dans ce cas, on peut être amené à calculer les trois premiers modes de vibration ; pour chaque mode, on évalue les pseudo-

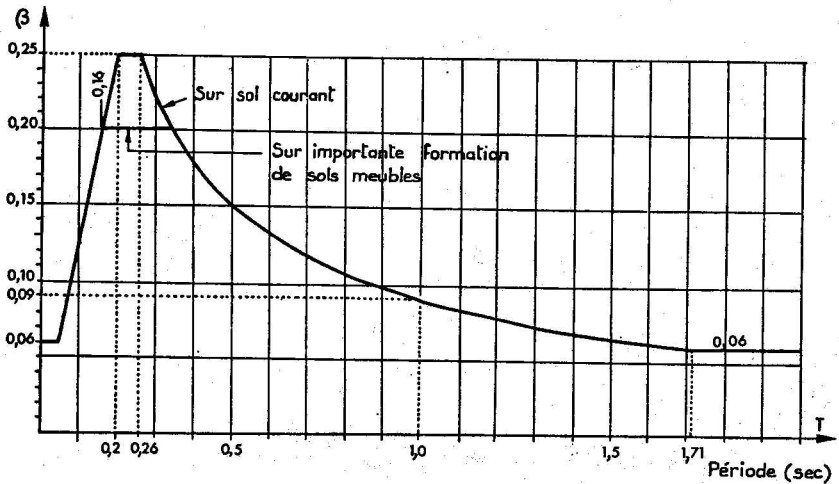


FIG. 5.11. — Spectre d'accélération règles P.S. 69 (§ 3,114-12)

accélération, puis les efforts dans la structure; on effectue ensuite une superposition quadratique des efforts. Sauf dans les cas très simples, l'emploi de l'ordinateur pour le calcul des modes propres est indispensable.

Pour les *structures complexes*, on ne peut utiliser les Règles P.S. 1969 qui limitent le calcul aux trois premiers modes de vibration: en effet, il existe des cas où les efforts les plus importants correspondent à un mode de rang élevé (cf. application 7.7).

On doit alors effectuer une étude à l'aide d'un spectre de réponse (§ 5.2). Le spectre utilisé peut être spécifique du site et élaboré spécialement; on peut aussi adopter celui indiqué dans les Règles P.S. 1969 (fig. 5.11) au § 3.114.12.

Une fois sélectionnés les modes utiles (§ 5.2.2), qui ne sont pas forcément les trois premiers, on évalue les pseudo-accélération et les efforts correspondant à chacun d'eux; on effectue ensuite la superposition quadratique des efforts.

Compte tenu de la complexité de ce type de structure et du nombre élevé de modes qui doivent être calculés a priori, l'emploi de l'ordinateur s'avère indispensable.

* * *

Dans tous les cas, le calcul des efforts peut être aussi effectué à partir d'un accélérogramme. Toutefois, cette méthode est coûteuse puisque, pour être certain de trouver la réponse maximum, on est contraint d'effectuer des calculs pour de nombreuses valeurs du temps; on la réservera donc principalement aux cas où la réponse des équipements doit être évaluée, ce qui s'effectue en pratique par l'intermédiaire des spectres de plancher.

MODÉLISATION DES STRUCTURES

La détermination d'un modèle tenant compte le plus correctement possible de la masse et de la raideur de tous les éléments d'une structure est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à une secousse sismique.

Si le calcul des masses et de leur position peut être effectué avec une bonne précision, par contre, celui des raideurs est souvent très approché:

En effet, dans le cas des constructions en béton armé, les inerties des sections sont modifiées par la fissuration et il existe une imprécision sur la valeur des modules et des largeurs des tables de compression.

Pour les ossatures métalliques, le calcul des raideurs est plus précis, mais, dans le cas des charpentes boulonnées, une erreur est introduite par le jeu dans les assemblages.

Par ailleurs, quel que soit le type de structure, il faut tenir compte de l'imprécision souvent très importante des données relatives au sol de fondation.

Compte tenu de toutes ces imprécisions, il est donc inutile de détailler excessivement un modèle dans le seul but de restituer la raideur de la structure; par contre, il faut prévoir un nombre suffisant de masses concentrées ce qui, dans la plupart des cas, donne la limite des simplifications admissibles pour le modèle.

Des règles simples déduites de considérations sur la forme des modes excités par un séisme d'une direction donnée, permettent le choix du nombre minimum de masses.

On peut être ainsi conduit à établir des modèles différents selon la direction du séisme étudié.

6.1. REMARQUES GÉNÉRALES SUR LES MODES DE VIBRATION DES STRUCTURES

6.1.1. Cas des structures symétriques

On considère une structure modélisée dans l'espace, symétrique par rapport à deux plans verticaux perpendiculaires, aussi bien du point de vue des raideurs que des masses.

Les masses (fig. 6.1) sont concentrées aux nœuds et les planchers sont supposés indéformables dans leur plan.

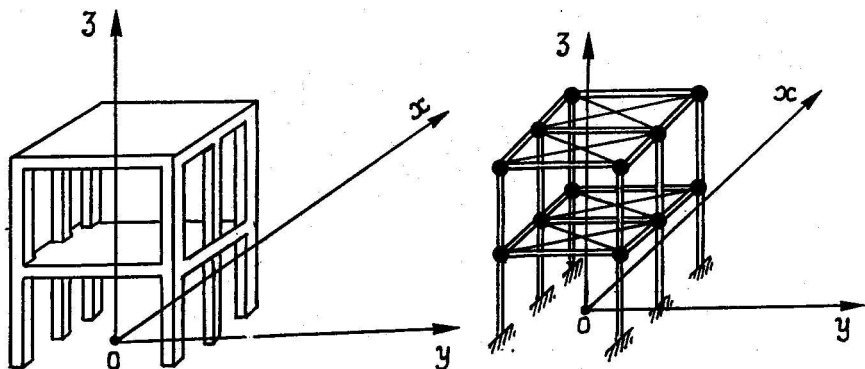


FIG. 6.1. — Structure symétrique. Modélisation

Les modes propres de vibration peuvent être groupés en quatre catégories :

1) Modes de vibration « horizontaux » dans le plan oxz

Les nœuds se déplacent dans des plans parallèles au plan oxz , les déplacements horizontaux, dans la direction ox étant prépondérants par rapport aux déplacements verticaux (fig. 6.2); seuls les éléments de structure contenus dans ces plans subissent des efforts.

2) Modes de vibration dans le plan oyz

Ces modes sont analogues aux précédents, les déplacements principaux des nœuds s'effectuant dans la direction oy .

3) Modes de vibration « verticaux »

Les nœuds se déplacent à la verticale uniquement (fig. 6.3).

Si les masses sont distribuées au prorata des sections des poteaux, tous les nœuds d'un même plancher se déplacent de la même quantité, en conséquence, les poutres restent droites (pas de flexion) et les poteaux sont soumis à une compression (ou une traction) centrée.

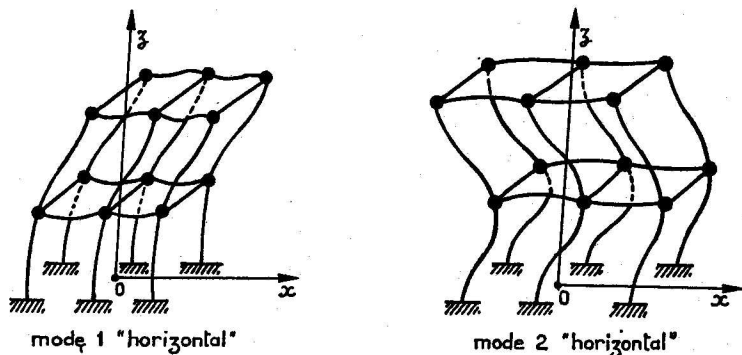


FIG. 6.2. — Structure symétrique. Modes "horizontaux"

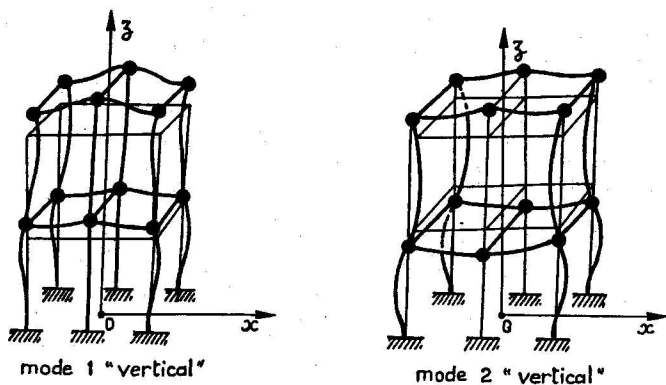


FIG. 6.3. — Structure symétrique. Modes "verticaux"

Dans le cas contraire, les nœuds ne se déplacent pas tous de la même quantité et des effets de flexion apparaissent dans les poutres et les poteaux.

4) Modes de vibration de "torsion"

La structure subit une torsion autour de l'axe oz ; les nœuds se déplacent dans des plans horizontaux de manière symétrique par rapport à cet axe (fig. 6.4).

Pour un séisme dans la direction ox , l'étude du mouvement peut être effectuée en supposant les masses soumises à une accélération variable dans le temps, égale à celle du sol (§ 4.5). La structure est donc soumise à des forces de direction ox , symétriques par rapport au plan oxz , et seuls les modes de vibration dans le plan oxz peuvent être excités.

Les modes de torsion correspondent à des déplacements dans la direction ox symétriques par rapport à l'axe oz et ne sont donc pas affectés.

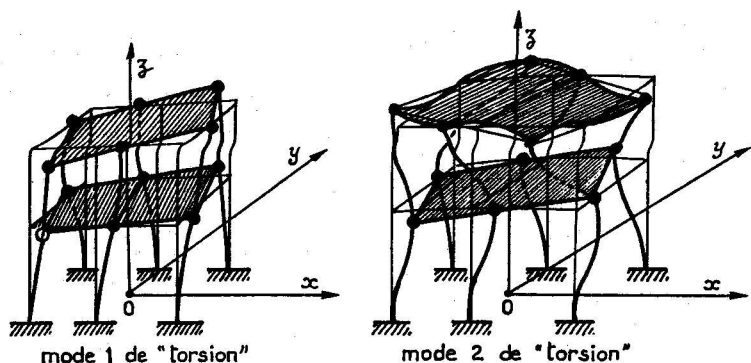


FIG. 6.4. — Structure symétrique. Modes de "torsion"

On constate de même que seuls les modes de vibration dans le plan oyz sont excités par un séisme de direction oy , et que les modes verticaux sont seuls excités par le séisme vertical.

Pour une direction horizontale de séisme donnée, on peut étudier la structure à l'aide d'un modèle plan obtenu en superposant les différents portiques parallèles; certains nœuds sont donc confondus et les masses correspondantes cumulées (fig. 6.5).

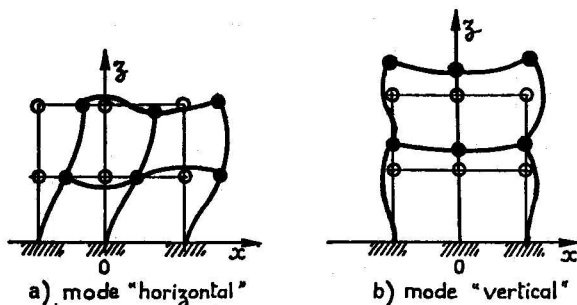


FIG. 6.5. — Structure symétrique. Modèle plan équivalent

Ce modèle peut servir aussi à l'étude du séisme vertical; on calcule ainsi l'accélération moyenne des nœuds qui ont été confondus.

6.1.2. Cas des structures non symétriques

On considère une structure, modélisée dans l'espace, qui possède des dissymétries soit du point de vue des raideurs, soit du point de vue des masses.

Le classement des modes propres de vibration peut s'effectuer comme précédemment en quatre catégories, mais, pour un mode donné, chaque nœud se déplace selon les trois directions, un des déplacements restant, toutefois, prépondérant par rapport aux autres.

Ainsi, pour les modes de vibration dans le plan oxz , le déplacement principal s'effectue dans la direction ox , mais un déplacement dans la direction oy est possible, dû à une torsion du bâtiment par rapport à un axe vertical.

Un séisme de direction ox peut exciter tous les modes, y compris des modes de torsion, mais n'entraîne, en général, d'efforts notables que pour les modes de vibration dans le plan oxz .

Pour les bâtiments courants, ne présentant pas de dissymétries excessives, on pourra donc étudier l'effet d'un séisme, horizontal ou vertical, à l'aide d'un modèle plan.

On aura recours à un modèle dans l'espace pour des structures dont la masse est nettement excentrée par rapport aux éléments de contreventement, des modes de torsion pouvant alors être excités.

6.2. MODÉLISATION DES STRUCTURES

La structure est modélisée à l'aide de barres ou d'éléments finis reliant les nœuds entre eux.

On appelle nœuds principaux ceux qui sont situés au croisement de deux éléments, nœuds secondaires les autres (fig. 6.6).

Deux variantes de la méthode de calcul sont possibles conduisant à deux types de modélisations différentes.

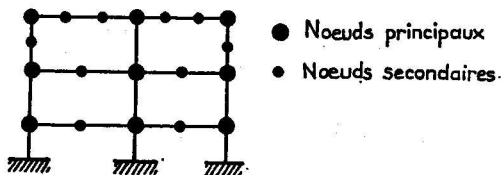


FIG. 6.6.
Disposition des nœuds

6.2.1. Modélisation pour le calcul direct des efforts

Une méthode de calcul consiste à utiliser un modèle unique qui fournit les efforts à partir des données sismiques (accélérogrammes ou spectres de réponse).

Pour obtenir des résultats aisément exploitables, on doit modéliser les éléments principaux, poutres, poteaux, voiles, en prévoyant éventuellement

un nombre suffisant de nœuds secondaires afin que la variation des efforts le long de ces éléments soit correctement évaluée. Bien entendu, ce modèle permet aussi le calcul des efforts dus aux cas de charges statiques.

On utilise, en principe, un modèle dans l'espace; toutefois, si la structure peut être considérée comme symétrique et les planchers indéformables dans leur plan, on peut à titre de simplification, utiliser un modèle constitué d'une série de portiques (fig. 6.7) situés dans le même plan et reliés par des bielles représentant les planchers.

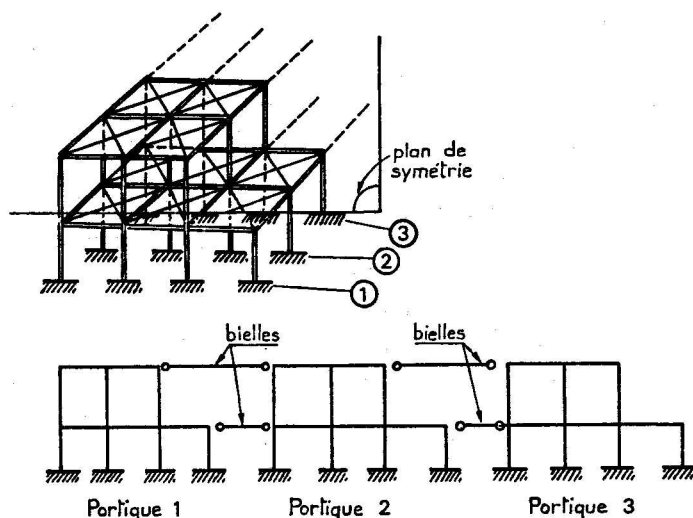


FIG. 6.7.

6.2.2. Modélisation pour le calcul des pseudo-accélérations

Afin de limiter le coût des calculs dynamiques, on peut avoir intérêt à procéder en deux phases successives :

— On calcule d'abord les pseudo-accélérations à l'aide d'un modèle simplifié.

— On considère ensuite ces accélérations comme des cas de charges statiques que l'on impose à un modèle plus détaillé en vue du calcul des efforts.

Le modèle simplifié est obtenu en condensant certains éléments et en limitant au maximum le nombre de nœuds secondaires, de façon, toutefois, à respecter le fonctionnement global de la structure.

Pour un bâtiment ne présentant pas de dissymétries excessives, on peut utiliser un modèle plan obtenu en cumulant les différents éléments de contreventement parallèles.

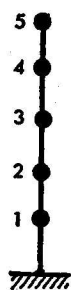


FIG. 6.8. — Modèle simple pour l'étude du séisme horizontal

Pour l'étude des effets d'un séisme horizontal, on peut même, dans certains cas, assimiler un bâtiment à une console verticale, en prenant en compte uniquement les déplacements horizontaux (fig. 6.8).

Les pseudo-accélération calculées pour chacun des modes excités, constituent autant de cas de charges statiques pour l'évaluation des efforts à l'aide du modèle plus détaillé. Pour combiner les divers modes, on applique ensuite la méthode de la superposition quadratique au niveau de ces efforts.

Sur la figure 6.9 sont résumées les opérations que l'on doit effectuer pour calculer la valeur maximum d'un paramètre comme, par exemple, le moment fléchissant M dans une poutre; le bâtiment, modélisé par une console, est supposé soumis à un séisme de direction horizontale.

Une méthode approchée consiste à calculer en chaque nœud du modèle simplifié, la moyenne quadratique des pseudo-accélération modales; on obtient donc la valeur maximum (positive ou négative) de cette accélération.

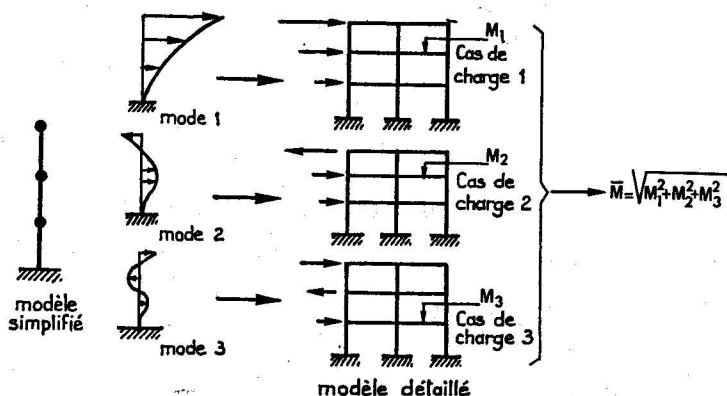


FIG. 6.9. — Superposition quadratique. Méthode exacte

On en déduit un cas de charge statique unique (fig. 6.10) en prenant comme signe pour l'accélération celui qui correspond au mode de vibration prépondérant.

Cette méthode n'est évidemment pas rigoureuse, mais, dans le cas des bâtiments courants le premier mode est nettement prépondérant par rapport aux autres et elle peut être valablement utilisée.

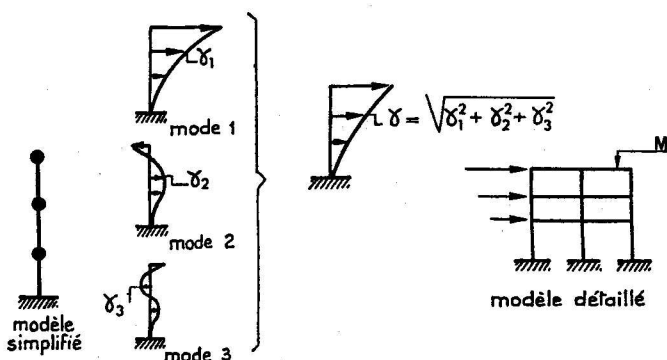


FIG. 6.10. — Superposition quadratique. Méthode approchée

6.3. MODÉLISATION DES MASSES

La masse d'une structure doit être concentrée en un certain nombre de nœuds suivant des règles qui diffèrent selon la direction du séisme. On peut donc être amené, dans certains cas, à établir deux modèles pour la même structure. Toutefois on utilise en général un modèle unique, plus complexe, mais qui permet à lui seul de prendre en compte toutes les directions de séisme étudiées.

6.3.1. Cas du séisme horizontal

Pour un séisme dans une direction horizontale, les modes propres excités correspondent, en général, à des déplacements verticaux faibles par rapport aux déplacements horizontaux; on n'introduit donc pas d'erreur notable en concentrant aux nœuds principaux la masse des planchers, considérés comme rigides dans leur plan.

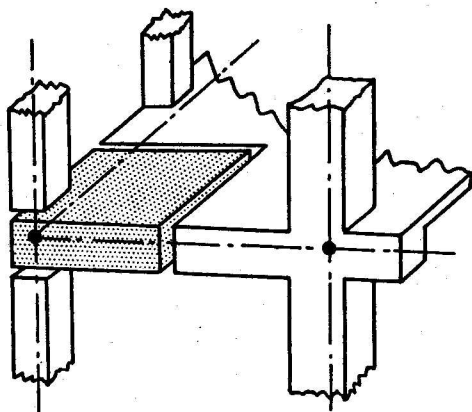


FIG. 6.11. — Concentration de la masse d'un plancher

Cette concentration s'effectue conformément aux règles élémentaires de la statique en affectant une surface de plancher à chaque nœud (fig. 6.11).

La masse des éléments verticaux est concentrée aux nœuds principaux les plus voisins (fig. 6.12 a). Cette approximation n'est toutefois valable que si la masse de l'élément vertical est faible, comparée à celle des planchers contigus; dans le cas contraire, il convient de prévoir des nœuds secondaires (fig. 6.12 b).

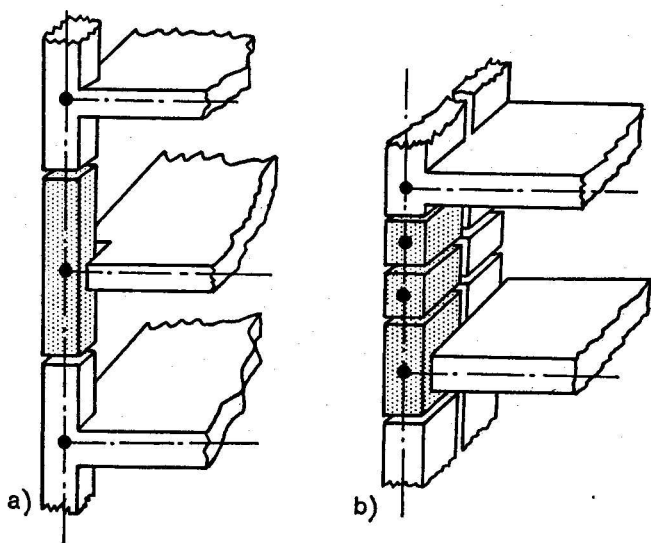


FIG. 6.12. — Concentration de la masse d'un élément vertical
a) Cas courant. — b) Cas des éléments lourds

L'utilisation de ces règles de concentration permet de respecter la position du centre de gravité des masses et leur répartition dans la structure.

En particulier, en cas de modélisation dans l'espace, la valeur du moment d'inertie massique de chaque plancher, par rapport à un axe vertical, est correctement restituée, ce qui est essentiel étant donné l'importance de ce paramètre.

6.3.2. Cas du séisme vertical

Les modes propres excités par le séisme vertical correspondent, en général, à des déplacements horizontaux faibles par rapport aux déplacements verticaux; on pourra donc condenser aux nœuds principaux la masse des éléments verticaux (fig. 6.14). Par contre, on ne peut condenser la masse des planchers seulement aux nœuds principaux. En effet, la rigidité à la flexion des éléments horizontaux est en général faible comparée à la rigidité

à la compression des éléments verticaux, ainsi le déplacement vertical d'une masse dépend de sa position sur l'élément horizontal qui la supporte (fig. 6.13).

La masse d'un plancher doit donc être concentrée aux nœuds principaux et en un certain nombre de nœuds secondaires (fig. 6.14).

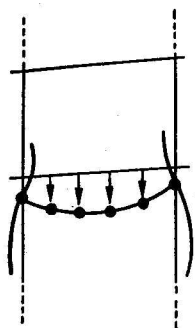


FIG. 6.13. — Allure du mode "vertical" de vibration

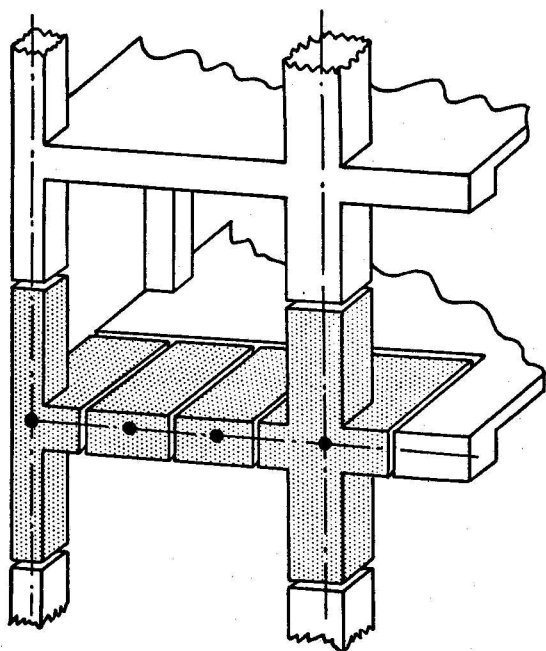


FIG. 6.14. — Concentration des masses. Cas du séisme vertical

6.4. MODÉLISATION DU SOL

6.4.1. Influence du sol sur la réponse d'une structure.

Interaction sol-structure

Une secousse sismique est définie par un accélérogramme mesuré à la surface du sol en l'absence de toute construction.

En présence d'un bâtiment, les mouvements au voisinage des fondations peuvent différer de ceux existant en champ libre: en effet, la masse de la construction engendre des forces d'inertie qui perturbent le mouvement du sol, et le moment d'encastrement à la base provoque la rotation de celle-ci.

Cette interaction entre le sol et la structure peut être mise en évidence à l'aide d'un modèle simple: le bâtiment est représenté par une console et le sol par des ressorts agissant à la translation ou à la rotation (fig. 6.15) et reliés à une base mobile.

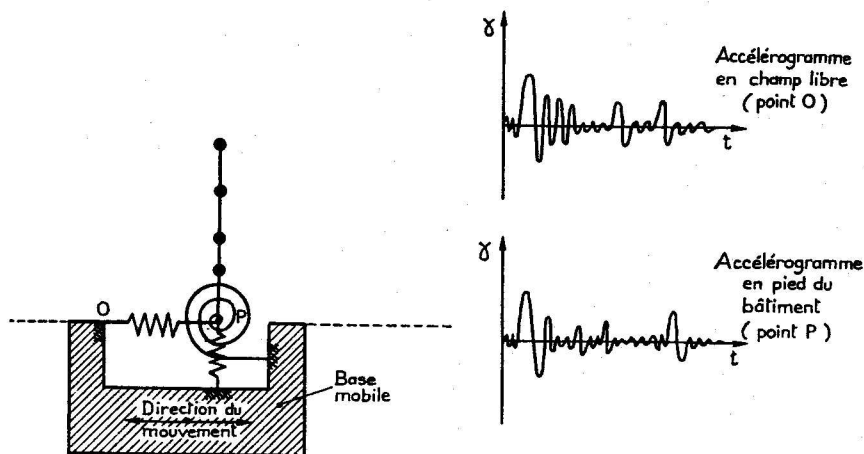


FIG. 6.15.

Le mouvement d'un point O de la base mobile est celui qui est défini en champ libre par un accélérogramme, tandis que le mouvement de la fondation du bâtiment, calculé au point P , dépend de la masse de la structure et de la raideur des ressorts qui représentent le sol; ces deux mouvements diffèrent donc, leur écart étant d'autant plus accentué que le sol est plus déformable.

Pour l'étude des bâtiments courants, les propriétés du sol ne sont en général pas prises en compte: en effet, le modèle le plus utilisé comporte un encastrement parfait à la base à laquelle on impose directement le mouvement. Cela entraîne des erreurs dans le calcul de la réponse qui peuvent être importantes dans le cas d'un sol très déformable:

— la période du premier mode est sous-estimée; il en résulte une erreur par excès ou par défaut sur la valeur de l'accélération selon la zone où l'on se situe sur le spectre de réponse.

— la valeur de l'amortissement est sous-estimée puisqu'on ne fait pas intervenir l'amortissement du sol, toujours supérieur à celui des matériaux de la structure; il en résulte une surestimation de la réponse.

— la déformée modale est calculée de manière approchée, ce qui entraîne une erreur pour la répartition des accélérations sur la hauteur du bâtiment.

— le mouvement du sol à la base du bâtiment est supposé identique à celui du champ libre. Dans les cas courants, on constate, toutefois, que cette approximation est acceptable.

On ne doit donc pas utiliser un modèle comportant un encastrement parfait à la base si de grandes déformations du terrain sont prévisibles. Il en

est ainsi par exemple dans le cas de bâtiments très rigides fondés sur un terrain meuble, les déformations les plus importantes pouvant alors se produire dans le sol plutôt que dans la structure.

On est ainsi amené à concevoir des modèles dans lesquels le sol est représenté soit par des ressorts soit par des éléments finis.

6.4.2. Modélisation par des ressorts

La manière la plus simple de prendre le sol en compte est de le représenter par des ressorts reliant un ou plusieurs nœuds à une base rigide, à laquelle on impose le mouvement. Dans le cas d'un modèle plan, une semelle sous point d'appui isolé est représentée par deux ressorts agissant à la translation et un ressort à la rotation; sous un radier, le sol est modélisé par un ressort horizontal et un ressort vertical en chaque nœud (fig. 6.16).

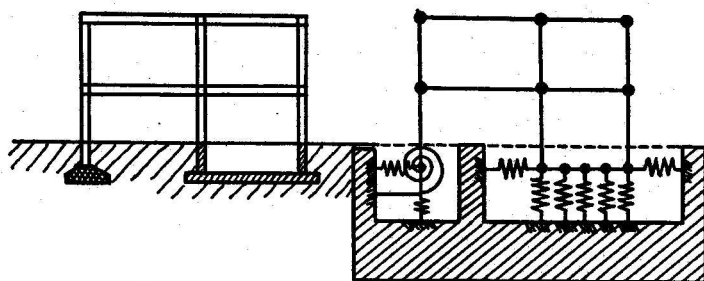


FIG. 6.16. — Modélisation par des ressorts

La raideur de ces ressorts est calculée d'après la valeur du coefficient de ballast qu'il convient de déterminer par une étude du terrain de fondation.

Les propriétés dynamiques du sol étant en général mal connues, on pourra employer des hypothèses simplificatrices pour évaluer les coefficients de ballast à partir des données expérimentales.

On peut ainsi assimiler le sol à un milieu élastique infini caractérisé par un module d'élasticité E et un coefficient de Poisson ν , et la construction à un disque rigide de rayon R ; on peut alors calculer la raideur du sol en translation ou en rotation, puis les coefficients de ballast pour la direction verticale ou horizontale en divisant la raideur correspondante par la surface du disque ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ RICHART F. G., WOODS R. D., HALL J. R. *Vibrations of soils and foundations*. Prentice-Hall, Inc. 1970.

Direction	Raideur	Coefficient de ballast
Verticale	$\frac{2}{(1-\nu^2)} ER$	$0,64 \frac{E}{R(1-\nu^2)}$
Horizontale	$\frac{16(1-\nu)}{(7-8\nu)(1+\nu)} ER$	$5,1 \frac{E}{R} \frac{1-\nu}{(7-8\nu)(1+\nu)}$
Rotation	$\frac{4}{3} \frac{ER^3}{(1-\nu^2)}$	

6.4.3. Modélisation par des éléments finis

Pour mieux prendre en compte les propriétés dynamiques du sol, on peut remplacer par des éléments finis les ressorts du modèle décrit en 6.4.2. Le sol est alors représenté par des couches successives d'éléments empilés sur une base qui représente le soubassement rocheux (fig. 6.17). Chaque couche est caractérisée par un module d'élasticité, un coefficient de Poisson, une masse volumique et un coefficient d'amortissement.

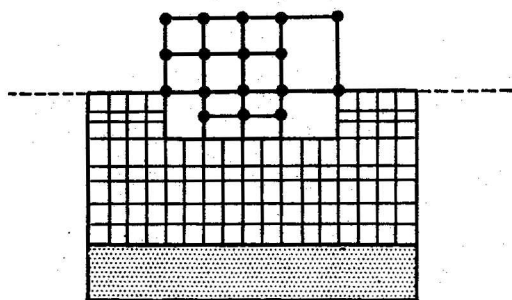


FIG. 6.17. — Modélisation par des éléments finis

Les programmes de calcul actuellement disponibles ⁽¹⁾ utilisent des modèles plans et comportent des éléments spéciaux de bordure qui permettent de se dispenser de modéliser une grande largeur de terrain.

Comme dans le cas précédent, le mouvement est imposé à la base et on fait l'hypothèse qu'il se propage dans le sol sous forme d'ondes de cisaillement se déplaçant uniquement à la verticale.

La base étant située en profondeur, son mouvement est très différent de celui de la surface du sol (en champ libre) et n'est pas connu a priori.

On doit donc étudier au préalable le sol en l'absence de toute construction pour déterminer le mouvement de la base qui produit en surface le mouvement du champ libre défini par l'accélérogramme donné.

⁽¹⁾ Programmes *Shake* et *Flush* développés par l'université de Californie (Berkeley).

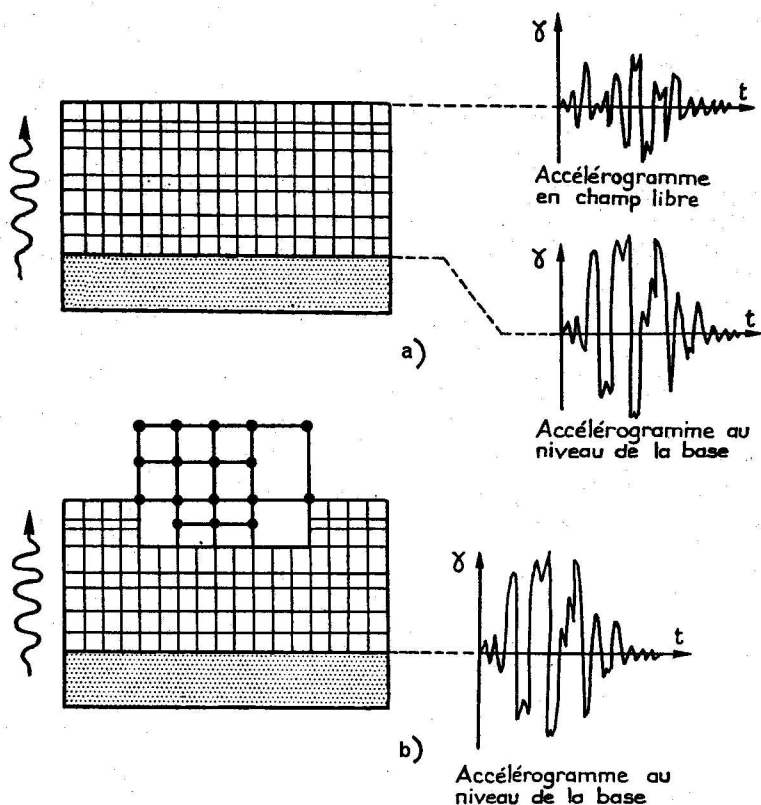


FIG. 6.18. — a) Déconvolution. — b) Etude dynamique

Une fois cette opération de « déconvolution » (fig. 6.18) effectuée, on est ramené à l'étude d'un modèle, composé en partie d'éléments de sol et en partie d'éléments de structure, à la base duquel on impose un mouvement défini par un accélérogramme.

On en déduit la valeur des pseudo-accélérations, les efforts dans la structure étant calculés par la suite à l'aide d'un modèle plus détaillé.

6.5. MODÉLISATION DES STRUCTURES DES BÂTIMENTS COURANTS

Dans le cas des bâtiments courants (§ 5.4 a et b), la détermination des efforts peut s'effectuer de deux manières différentes :

Une première méthode consiste à calculer les pseudo-accélérations à l'aide d'un modèle simple (fig. 6.8) en employant les Règles P.S. 1969. Les

efforts sont ensuite déterminés en utilisant un modèle plus détaillé, le recours à l'ordinateur étant alors généralement nécessaire.

Une deuxième méthode consiste à calculer directement les efforts à partir d'un modèle unique; dans ce cas, le calcul par ordinateur est inévitable.

Le calcul à l'aide d'un modèle unique (cf. § 6.2.1) ne se justifie que très rarement; ce modèle s'utilise essentiellement dans le cas des structures présentant une dissymétrie excessive où des oscillations de torsion sont susceptibles de modifier sensiblement la distribution des pseudo-accélérations entre les divers éléments de contreventement.

Dans la majorité des cas, un modèle détaillé n'est donc utilisé que pour le calcul des efforts.

Chaque élément de contreventement (portique ou refend) peut être représenté par un modèle plan car la rigidité à la flexion dans une direction perpendiculaire est négligeable.

Afin de reconstituer le fonctionnement global de la structure, on relie ces modèles entre eux par les planchers.

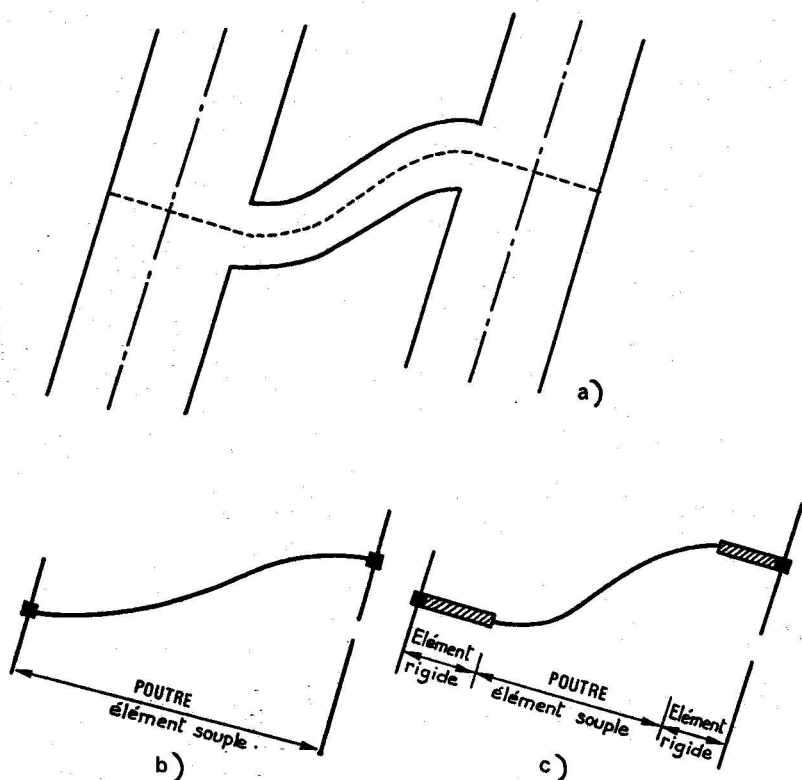


FIG. 6.19.

6.5.1. Modélisation des éléments de contreventement

Les éléments de contreventement sont modélisés par des barres horizontales (poutres ou linteaux) ou verticales (poteaux ou refends).

Les barres horizontales doivent comporter une partie souple et une partie rigide aux extrémités. Il est, en effet, incorrect d'utiliser des poutres d'inertie constante sur toute la longueur (fig. 6.19 b) car on surestime ainsi la déformation de la partie commune au linteau et au refend.

On constate d'après la figure 6.19 c que la présence des éléments de rigidité infinie dans la modélisation du linteau permet de retrouver un fonctionnement plus conforme à la réalité.

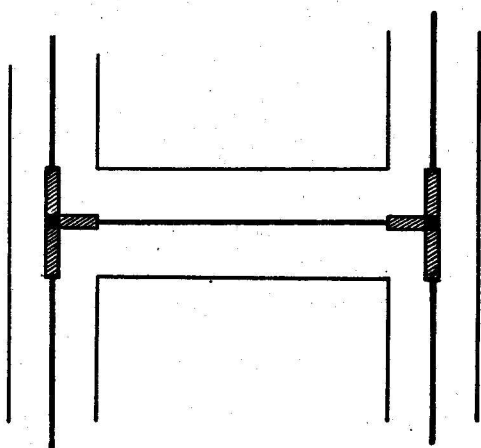


FIG. 6.20.

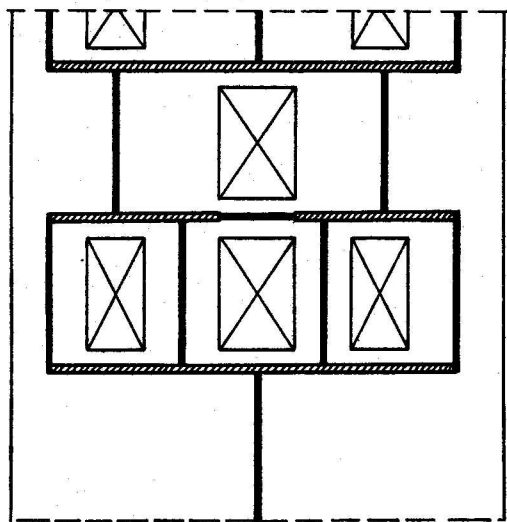


FIG. 6.21

Il faut prévoir aussi des éléments rigides aux extrémités des barres verticales (fig. 6.20) si les poutres ont une hauteur importante.

On peut même utiliser des barres entièrement rigides pour modéliser, par exemple, le décalage de la fibre moyenne d'un refend (fig. 6.21).

Si l'élément de contreventement présente une symétrie par rapport à un axe vertical (fig. 6.22), il est possible, dans un but de simplification, de modéliser seulement la moitié de cet élément.

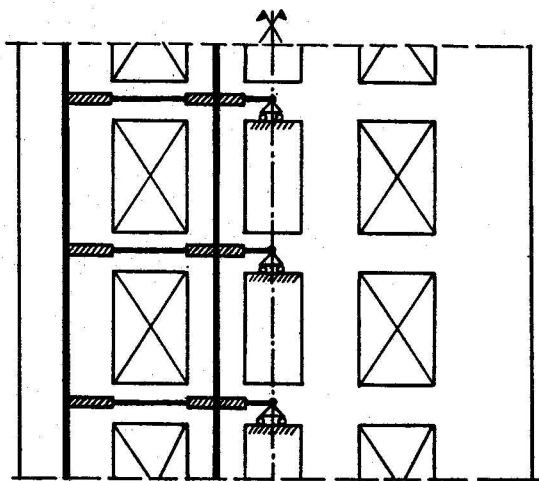


FIG. 6.22.

Les nœuds sur l'axe de symétrie n'ayant pas de déplacement vertical sous l'effet des charges horizontales, on les considère sur appuis simples dans la direction verticale, le déplacement à l'horizontale restant libre.

Lorsque deux refends sont liés (fig. 6.23 a, b), on modélise chacun d'eux indépendamment et on impose l'égalité des déplacements des nœuds communs (fig. 6.23 c, d).

6.5.2. Modélisation des planchers

Comme pour les éléments de contreventement, la rigidité à la flexion transversale des planchers est négligée; leur fonction est de distribuer les forces horizontales entre les refends et, à ce titre, seule la rigidité dans le plan horizontal intervient.

Deux types de modélisation sont possibles:

1) *Modélisation par éléments finis*; le plancher est représenté par des éléments de membrane reliant les nœuds des refends situés à un même niveau.

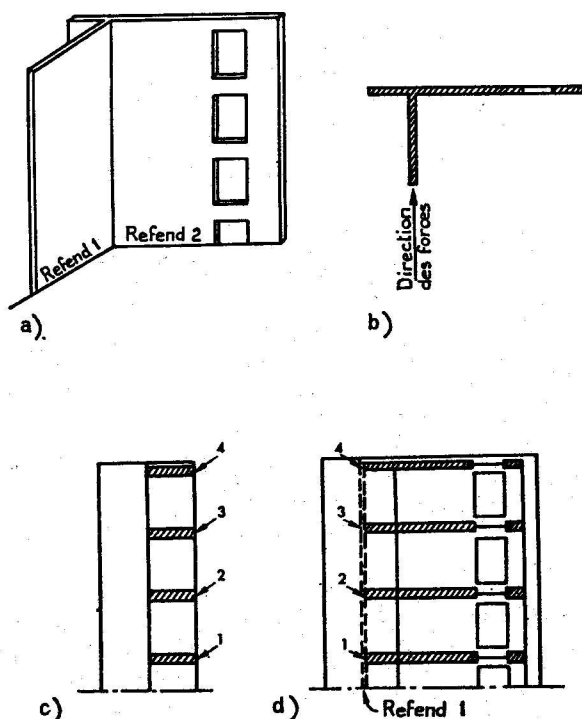


FIG. 6.23. — a) Perspective. — b) Plan
c) Modèle Refend 1. — d) Modèle Refend 2

2) *Liaisons rigides*; les nœuds d'un même plancher sont liés rigidement entre eux et le plancher se déplace dans son ensemble sans subir de déformation.

La deuxième méthode a pour avantage de permettre l'utilisation d'un modèle à deux dimensions pour l'ensemble de la structure. En effet, dans le cas des planchers indéformables dans leur plan, les déplacements des nœuds d'un même plancher sont liés par des relations linéaires et on peut démontrer que cela permet effectivement de se ramener à un problème plan en faisant appel à un programme de calcul adapté ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Programme ZEUS développé par la SOCOTEC.

APPLICATIONS

7.1. OSCILLATEUR SIMPLE EN ROTATION. MOMENT D'INERTIE MASSIQUE

Pour modéliser une partie de structure supposée indéformable, la méthode la plus simple consiste à concentrer la masse au centre de gravité; en cas de rotation autour de ce point, il apparaît un couple d'inertie dû à la répartition des masses dans l'espace, qui est pris en compte par l'intermédiaire d'un moment d'inertie massique.

L'étude d'un solide constituant un oscillateur simple en rotation permet de déterminer les expressions du moment d'inertie massique et de la période des oscillations libres.

7.1.1. Moment d'inertie massique

On considère un solide de masse m pouvant pivoter autour d'un axe OZ et soumis à l'action d'un ressort agissant à la rotation, de constante k_e (fig. 7.1). Lorsque le solide est en position d'équilibre, son centre de gravité G est supposé situé à la verticale du point O , à une distance $OG = \ell$.

Un élément de masse dm du solide oscille dans le plan Oxy ; sa position est repérée par les coordonnées circulaires R, θ (fig. 7.2).

Ses coordonnées cartésiennes ont pour valeur:

$$x = R \cdot \cos \theta$$

$$y = R \cdot \sin \theta$$

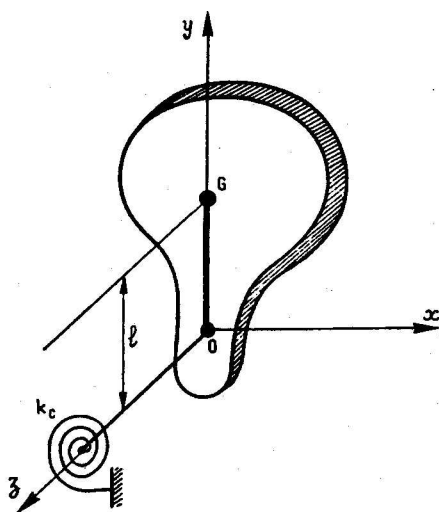


FIG. 7.1.

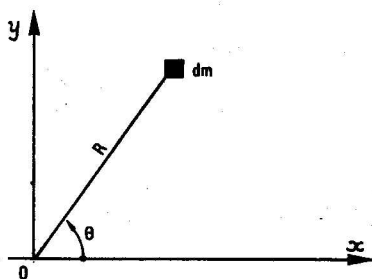


FIG. 7.2.

En dérivant par rapport au temps, on obtient la valeur des accélérations selon les axes Ox et Oy :

$$\ddot{x} = -R \cos \theta (\dot{\theta})^2 - R \sin \theta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{y} = -R \sin \theta (\dot{\theta})^2 + R \cos \theta \ddot{\theta}$$

auxquelles correspondent des forces d'inertie $dm \ddot{x}$ et $dm \ddot{y}$.

Ces forces provoquent un couple ayant pour valeur au point O :

$$dM = (dm \ddot{y}) x - (dm \ddot{x}) y = R^2 \ddot{\theta} dm$$

Le couple d'inertie totale est obtenu par intégration sur tout le volume V du solide; les accélérations angulaires $\ddot{\theta}$ de tous les points étant égales, on obtient:

$$M = \iiint_V R^2 \ddot{\theta} dm = \ddot{\theta} J_0$$

Le paramètre $J_0 = \iiint_V R^2 dm$ est appelé moment d'inertie massique du solide par rapport au point O ; pour un corps de masse volumique ρ constante, il a pour valeur:

$$J_0 = \iiint_V R^2 \rho dV = \rho I_{Oz}$$

$I_{oz} = \iiint_V R^2 dV$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe OZ .

Si on note J_G le moment d'inertie massique par rapport à un axe parallèle à OZ et passant par le centre de gravité, le théorème d'Huygens permet d'écrire:

$$J_0 = J_G + m\ell^2$$

Dans le cas d'un parallélépipède de côté $2a$, $2b$ et $2c$, dont la masse totale m est uniformément répartie, le moment d'inertie massique par rapport à un axe parallèle au côté de longueur $2c$ et passant par le centre de gravité (fig. 7.3) a pour valeur:

$$J_G = \frac{m}{3} (a^2 + b^2)$$

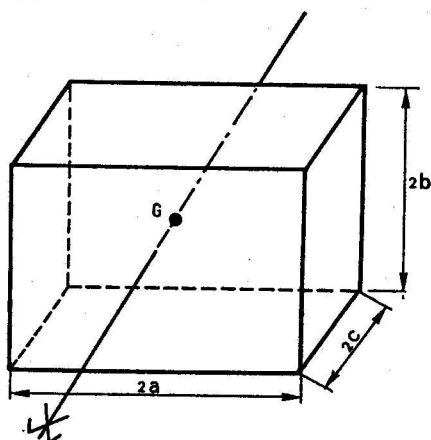


FIG. 7.3.

7.1.2. Période des oscillations libres

Si le solide tourne d'un angle θ , le couple de rappel du ressort a pour valeur $-k_c \theta$ et l'équation d'équilibre s'écrit:

$$-k_c \theta = J_0 \ddot{\theta}$$

soit:

$$\ddot{\theta} + \frac{k_c}{J_0} \theta = 0$$

Cette équation est comparable à celle d'un oscillateur simple en translation qui s'écrit:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

La pulsation des oscillations libres a donc pour valeur:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_c}{J_0}}$$

et la période:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{k_c}}$$

Dans cette expression J est exprimé en $\text{kg} \times \text{m}^2$ et k_c en $\text{N} \times \text{m/radian}$.

Si on exprime k_c en $\text{kgf} \times \text{m/radian}$ comme il est usuel de le faire, on doit utiliser la formule:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{g k_c}}$$

7.2. OSCILLATEUR DOUBLE

Certains cas simples (7.3 à 7.5) pouvant être étudiés à l'aide d'un oscillateur double, le but de cet exercice est de donner les expressions des deux pulsations et des deux vecteurs propres sous une forme permettant d'effectuer facilement un calcul numérique.

Soient deux masses m_1 et m_2 , reliées par des ressorts de raideur k_1 et k_2 (fig. 7.4).

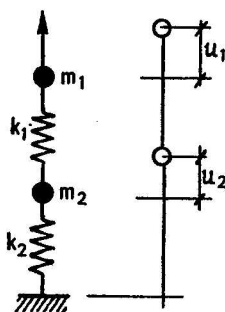


FIG. 7.4. — Oscillateur double

les déplacements u_1 et u_2 des masses sont groupés sous forme de vecteur:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

La matrice de rigidité a pour valeur:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

et celle des masses:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Les pulsations des deux modes propres sont données par :

$$\begin{vmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

soit :

$$(k_1 - m_1 \omega^2)(k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) - k_1^2 = 0$$

Si l'on pose :

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{m_1} \quad \alpha_2 = \frac{k_2}{m_2} \quad \lambda = \frac{m_1}{m_2}$$

cette équation du second degré a pour racines :

$$\omega^2 = \frac{\alpha_2 + (1 + \lambda) \alpha_1 \pm \sqrt{[\alpha_2 + (1 + \lambda) \alpha_1]^2 - 4 \alpha_1 \alpha_2}}{2}$$

Pour chaque mode, le vecteur déplacement D peut être mis sous la forme :

$$D = \begin{vmatrix} 1 \\ d \end{vmatrix} \quad \text{avec } d = 1 - \frac{\omega^2}{\alpha_1}$$

On en déduit le vecteur :

$$\Phi = a D$$

$$\text{avec } a = \frac{\lambda + d}{\lambda + d^2}$$

7.3. STRUCTURE RIGIDE SUR SOL ÉLASTIQUE

On considère un bâtiment suffisamment rigide pour que l'on puisse admettre que ses déformations sont faibles par comparaison avec celles du sol de fondation.

Dans ce cas, on ne peut faire l'hypothèse couramment admise d'un encastrement parfait à la base, qui conduirait à des résultats peu réalistes pour les valeurs des périodes de vibration ; il convient donc de tenir compte des propriétés élastiques du sol.

On appelle :

- O le centre de gravité de la base
- G le centre de gravité du bâtiment supposé à la verticale du point O , à une distance $OG = \ell$
- m la masse totale du bâtiment
- J_G son moment d'inertie massique par rapport à G
- k_v et k_h les coefficients de ballast du sol, pour la direction verticale et la direction horizontale, exprimés en Newton par mètre cube,

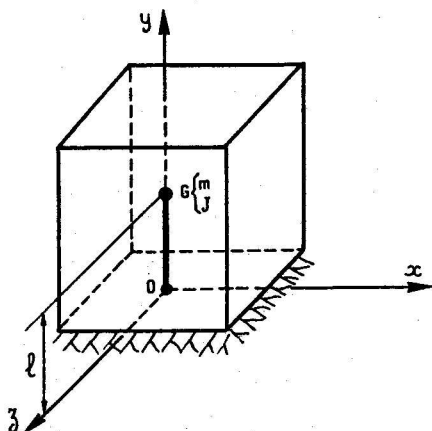


FIG. 7.5.

Le bâtiment est étudié sous l'effet d'un séisme de direction horizontale ou verticale.

7.3.1. Cas du séisme vertical

Le bâtiment est modélisé sous forme d'un oscillateur simple (fig. 7.6) de masse m , dont le ressort, constitué par le sol de fondation a pour raideur :

$$k = k_v \cdot S$$

S représentant l'aire de la base du bâtiment.

La période de vibration a pour valeur :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_v S}}$$

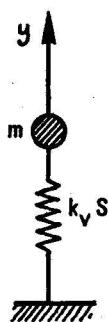


FIG. 7.6. — Modèle pour l'étude du séisme vertical

La réponse peut être obtenue directement par lecture d'un spectre, le coefficient d'amortissement à prendre en compte étant celui du sol.

7.3.2. Cas du séisme horizontal

Pour l'étude sous l'effet d'un séisme de direction Ox , le bâtiment est modélisé sous forme d'une poutre OG infiniment rigide, supportant au point G une masse concentrée m et un moment d'inertie massique J_G (fig. 7.7).

Le sol est modélisé sous forme d'un ressort horizontal de raideur k et d'un ressort à la rotation de raideur k_e .

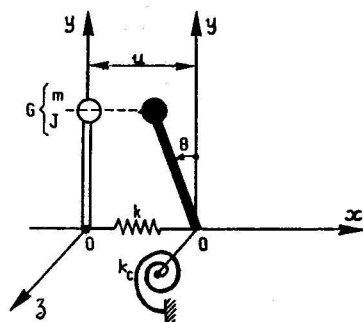


FIG. 7.7. — Modèle pour l'étude du séisme horizontal

Les coefficients k et k_c sont déduits des coefficients de ballast k_v et k_h :

$$k_c = k_v \cdot I$$

$$k = k_h \cdot S$$

I représente l'inertie de la base par rapport à l'axe Oz , S son aire.

La position du bâtiment est repérée par le vecteur $\begin{vmatrix} u \\ \theta \end{vmatrix}$ dont la coordonnée u représente le déplacement suivant Ox du point O et la coordonnée θ la rotation autour de l'axe OZ .

La force horizontale H et le couple \mathcal{M} appliqués au point O sont groupés sous forme d'un vecteur

$$\begin{vmatrix} H \\ \mathcal{M} \end{vmatrix}$$

a) *Matrice de rigidité, matrice des masses*

La matrice de rigidité a pour valeur:

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k_c \end{bmatrix}$$

On détermine la matrice des masses en évaluant les forces d'inertie qui apparaissent au point O quand on lui impose une accélération, soit dans la direction Ox , soit en rotation:

— pour $\begin{vmatrix} \ddot{u} \neq 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{vmatrix}$ le mouvement est une translation dans la direction Ox ; il apparaît donc une force d'inertie $m\ddot{u}$ en G (fig. 7.8), le torseur qui en résulte au point O a pour valeur:

$$\begin{vmatrix} H = m \ddot{u} \\ \mathcal{M} = -Hl = -m l \ddot{u} \end{vmatrix}$$

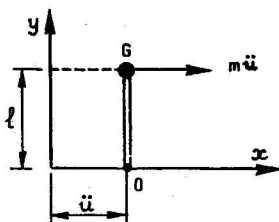


FIG. 7.8.

— pour $\begin{cases} \ddot{u} = 0 \\ \ddot{\theta} \neq 0 \end{cases}$ le mouvement est une rotation autour de l'axe OZ . Le

point G est accéléré dans la direction Ox d'une quantité $-\ell\ddot{\theta}$; il apparaît donc en ce point une force d'inertie $-m\ell\ddot{\theta}$ et un couple d'inertie $J_G\ddot{\theta}$ (fig. 7.9). Le torseur résultant en O a pour valeur:

$$\begin{cases} H = -m\ell\ddot{\theta} \\ \mathcal{M} = J_G\ddot{\theta} + m\ell^2\ddot{\theta} = J_0\ddot{\theta} \end{cases}$$

Le coefficient $J_0 = J_G + m\ell^2$ représente le moment d'inertie massique au point O du bâtiment.

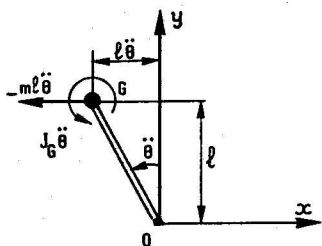


FIG. 7.9.

— dans le cas général $\begin{cases} \ddot{u} \neq 0 \\ \ddot{\theta} \neq 0 \end{cases}$ le torseur en O est obtenu par superposition des deux précédents:

$$\begin{aligned} H &= m\ddot{u} - m\ell\ddot{\theta} \\ \mathcal{M} &= -m\ell\ddot{u} + J_0\ddot{\theta} \end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'écrire:

$$\begin{cases} H \\ \mathcal{M} \end{cases} = M \begin{cases} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{cases}$$

la matrice des masses M ayant pour valeur:

$$M = \begin{bmatrix} m & -m\ell \\ -m\ell & J_0 \end{bmatrix}$$

b) Calcul des pulsations propres

Les pulsations propres sont données par:

$$\begin{vmatrix} k - m \omega^2 & m \ell \omega^2 \\ m \ell \omega^2 & k_c - J_0 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

soit:

$$(k - m \omega^2)(k_c - J_0 \omega^2) - (m \ell \omega^2)^2 = 0$$

Cette équation du second degré en ω^2 a pour racines:

$$\omega_1^2 = \frac{k J_0 + m k_c - \sqrt{(k J_0 + m k_c)^2 - 4 k m k_c J_0}}{2 m J_0}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k J_0 + m k_c + \sqrt{(k J_0 + m k_c)^2 - 4 k m k_c J_0}}{2 m J_0}$$

c) Calcul des vecteurs modaux

Pour chaque mode, le vecteur déplacement D peut être mis sous la forme:

$$D = \begin{vmatrix} d \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{avec } d = \frac{\ell}{1 - \frac{k}{m \omega^2}}$$

On en déduit le vecteur $\Phi = aD$, le coefficient a étant donné par l'expression (4.43)

$$a = \frac{D^t M \Delta}{D^t M D} = \frac{[d \ 1] \begin{bmatrix} m & -m\ell \\ -m\ell & J_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{[d \ 1] \begin{bmatrix} m & -m\ell \\ -m\ell & J_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{m(d - \ell)}{m(d - 2\ell)d + J_0}$$

le calcul est poursuivi en multipliant le vecteur Φ par l'accélération γ lue sur le spectre de réponse, ce qui détermine la valeur au point O de l'accélération absolue \vec{v} dans la direction Ox et de l'accélération angulaire $\vec{\theta}$

$$\begin{cases} \vec{v} = a d \gamma \\ \vec{\theta} = a \gamma \end{cases}$$

On peut ensuite en déduire l'accélération d'un point quelconque du bâtiment, soit à l'horizontale, soit à la verticale. On obtient ainsi un cas de charge statique équivalent pour chacun des deux modes; le calcul des efforts peut être poursuivi en utilisant éventuellement un modèle plus détaillé.

7.3.3. Exemple de calcul

On considère un bâtiment assimilable à un cube de 10 m de côté posé sur un sol caractérisé par les coefficients de ballast:

$$k_v = 2\,000 \text{ tf/m}^3 \simeq 2 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^3$$

$$k_h = 1\,700 \text{ tf/m}^3 \simeq 1,7 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^3$$

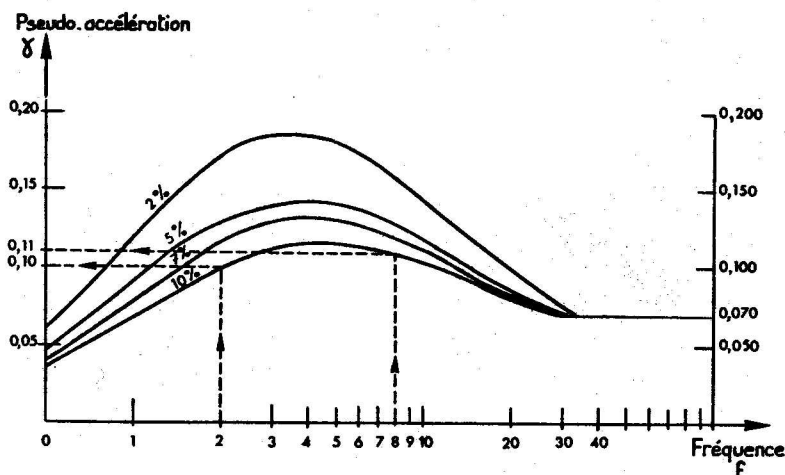


FIG. 7.10.

La masse $m = 2\,000 \text{ t}$ est régulièrement répartie; le séisme, dans la direction horizontale, est défini par un spectre de réponse (fig. 7.10).

Les divers paramètres entrant dans les formules ont pour valeur:

$$S = 100 \text{ m}^2$$

$$I = 833 \text{ m}^4$$

$$k_c = 2 \cdot 10^4 \times 833 = 1,67 \cdot 10^7 \text{ kN} \times \text{m/rd}$$

$$k = 1,7 \cdot 10^4 \times 100 = 1,7 \cdot 10^6 \text{ kN/m}$$

$$J_G = \frac{2\,000}{3} (5^2 + 5^2) = 33\,300 \text{ tm}^2$$

$$J_0 = 33\,300 + 2\,000 \times 5^2 = 83\,300 \text{ tm}^2$$

On en déduit la valeur des deux pulsations propres:

$$\omega_1^2 = \frac{(17,5 - 15,2) 10^{10}}{13,3 \cdot 10^7} = 173$$

soit:

$$\omega_1 = 13 \quad T_1 = 0,48 \text{ sec} \quad f_1 = \frac{1}{T_1} \simeq 2 \text{ Hz}$$

et:

$$\omega_2^2 = \frac{(17,5 + 15,2) 10^{10}}{13,3 \cdot 10^7} = 2460$$

soit:

$$\omega_2 = 50 \quad T_2 = 0,13 \text{ sec} \quad f_2 = \frac{1}{T_2} \simeq 8 \text{ Hz}$$

On calcule ensuite les vecteurs propres:

<i>1^{er} mode</i>	<i>2^e mode</i>
$d = \frac{5}{1 - \frac{1,7 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3 \cdot 173}} = -1,3$	$d = \frac{5}{1 - \frac{1,7 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3 \cdot 2460}} = 7,6$
$D_1 = \begin{vmatrix} -1,3 \\ 1 \end{vmatrix}$	$D_2 = \begin{vmatrix} 7,6 \\ 1 \end{vmatrix}$
$a = \frac{2000(-1,3-5)}{-2000(-1,3-10)1,3+83300} \simeq -0,11$	$a = \frac{2000(7,6-5)}{2000(7,6-10)7,6+83300} \simeq 0,11$
D'où: $\Phi_1 = \begin{vmatrix} 0,14 \\ -0,11 \end{vmatrix}$	$\Phi_2 = \begin{vmatrix} 0,84 \\ 0,11 \end{vmatrix}$

En prenant l'amortissement du sol égal à 10%, les pseudo-accélérations lues sur le spectre ont pour valeur:

$$\gamma = 0,10 \text{ g pour le 1^{er} mode}$$

$$\gamma = 0,11 \text{ g pour le 2^e mode}$$

On en déduit l'accélération absolue \ddot{v} et l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du centre de gravité:

<i>1^{er} mode</i>	<i>2^e mode</i>
$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{v} = 0,14 \cdot 0,10 \text{ g} = 0,014 \text{ g} \\ \ddot{\theta} = -0,11 \cdot 0,10 \text{ g} = -0,011 \text{ g} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{v} = 0,84 \cdot 0,11 \text{ g} = 0,092 \text{ g} \\ \ddot{\theta} = 0,11 \cdot 0,11 \text{ g} = 0,012 \text{ g} \end{array} \right.$

On peut ensuite calculer l'accélération absolue dans la direction horizontale ou verticale de tout point du bâtiment (fig. 7.11 et 7.12).

Par exemple, l'accélération horizontale au sommet a pour valeur:

<i>1^{er} mode</i>	<i>2^e mode</i>
$0,014 \text{ g} + 0,011 \text{ g} \times 10 = 0,124 \text{ g}$	$0,092 \text{ g} - 0,012 \text{ g} \times 10 = -0,028 \text{ g}$

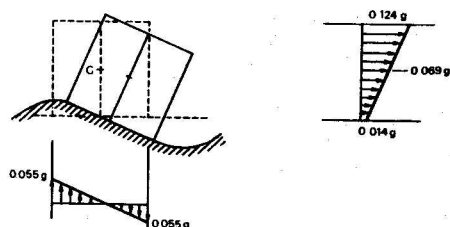


FIG. 7.11. — Accélérations absolues: 1^{er} mode de vibration

On constate que l'accélération maximum du sol en pied du bâtiment est différente de celle donnée en champ libre par le spectre de réponse (0,07 g); l'interaction du sol et de la structure est ainsi mise en évidence dans ce cas particulier.

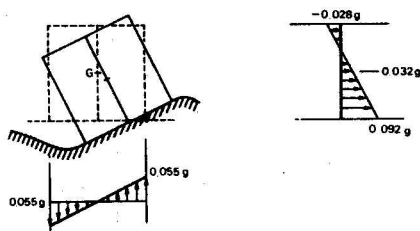


FIG. 7.12. — Accélérations absolues: 2^e mode de vibration

7.4. BÂTIMENTS À SOUBASSEMENT RIGIDE

On considère une construction comportant un soubassement très rigide par rapport à la structure qu'il supporte. Il s'agit, par exemple, d'un bâtiment comportant une partie basse en béton armé contreventée par des voiles, qui supporte une structure en charpente métallique (fig. 7.13).

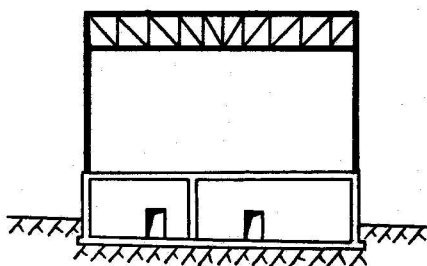


FIG. 7.13. — Bâtiment à soubassement rigide

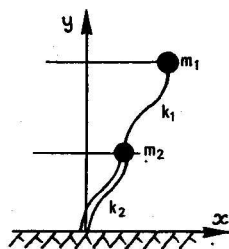


FIG. 7.14. — Modèle pour l'étude du séisme horizontal

L'étude de la réponse à un séisme horizontal doit en principe être effectuée en modélisant la totalité du bâtiment.

Toutefois, si le sol est suffisamment raide pour que l'on puisse négliger la rotation d'ensemble du bâtiment, on peut effectuer un calcul approché en modélisant seulement la partie souple.

Pour démontrer la validité de cette méthode, on représente grossièrement la structure par un oscillateur double (fig. 7.14). La partie souple a pour masse m_1 et pour raideur k_1 , la partie raide est définie par les paramètres m_2 et k_2 .

On pose $\alpha_1 = \frac{k_1}{m_1}$, $\alpha_2 = \frac{k_2}{m_2}$ et on utilise les résultats de l'application (7.2).

Pour de grandes valeurs du rapport $\frac{k_2}{k_1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &\simeq \alpha_1 = \frac{k_1}{m_1} & \Phi_1 &\simeq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \omega_2^2 &\simeq \alpha_2 = \frac{k_2}{m_2} & \Phi_2 &\simeq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

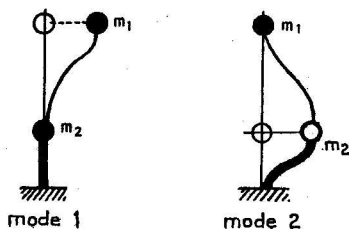


FIG. 7.15. — Déformées modales

Le premier mode correspond à la vibration de la masse m_1 seule, la deuxième à celle de la masse m_2 , la masse m_1 restant immobile. Les mouvements des deux masses sont donc indépendants (fig. 7.15).

Le deuxième mode a une pulsation très grande, l'accélération lue sur le spectre est donc égale à celle du sol, notée γ_s . On peut donc établir la règle de calcul suivante:

Seule, la partie souple de la structure est modélisée, et on l'étudie comme si elle était encastrée directement sur le sol. On applique ensuite à la partie raide les réactions d'appui de la partie souple et une accélération γ_s uniforme, égale à celle du sol, ce qui permet le calcul des efforts.

7.5. MODE LOCAL DE VIBRATION

Dans la modélisation d'une structure, on ne peut, en général, tenir compte de tous les éléments pour des raisons pratiques.

Par exemple, certains équipements considérés comme légers et donc sans influence sur la réponse globale de la structure ne sont pas intégrés au modèle, leur réponse étant calculée ultérieurement à l'aide d'un spectre de plancher (§ 5.15).

Dans le cas des bâtiments animés principalement d'un mouvement de translation, il est possible de même d'évaluer de manière approchée la réponse d'un élément secondaire de la structure, de faible masse, et susceptible de vibrer selon un mode local.

Un tel cas se présente lorsqu'une construction rigide, supportée par des poteaux, est soumise à l'action d'un séisme horizontal (fig. 7.16); l'élément secondaire est modélisé par une console verticale.

On peut ranger dans la même catégorie les bâtiments fondés sur un sol mou et soumis à l'action du séisme vertical (fig. 7.17), l'élément secondaire étant représenté par une console horizontale.

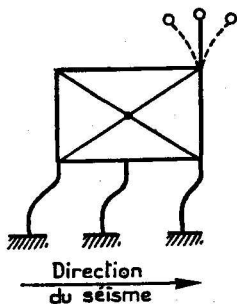


FIG. 7.16.

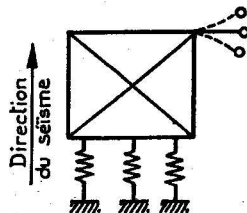


FIG. 7.17.

Afin d'évaluer les efforts dans la console, on utilise comme modèle un oscillateur double (fig. 7.18). On note k_1 la raideur de la console, m_1 la masse qu'elle supporte; le bâtiment est représenté par la masse m_2 et un ressort de raideur k_2 .

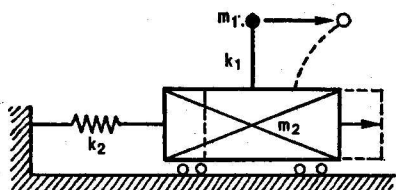


FIG. 7.18.

On pose :

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{m_1} \quad \alpha_2 = \frac{k_2}{m_2} \quad \lambda = \frac{m_1}{m_2}$$

Le calcul est effectué en utilisant les résultats de l'application (7.2).

L'expression donnant la pulsation peut se mettre sous la forme :

$$2\omega^2 = \alpha_1(1 + \lambda) + \alpha_2 \pm (\alpha_1 - \alpha_2) \sqrt{1 + 2\lambda \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \alpha_1 + \lambda^2 \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}}$$

Le coefficient $\lambda = \frac{m_1}{m_2}$ a une valeur faible, et on suppose qu'il en est de même pour l'expression $\lambda \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \alpha_1$, ce qui implique que α_1 et α_2 ne soient pas voisins.

En effectuant un développement limité du radical, on obtient alors

$$\omega_1^2 \simeq \alpha_1 \left[1 + \lambda \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \right] \simeq \frac{k_1}{m_1}$$

$$\omega_2^2 \simeq \alpha_2 \left[1 - \lambda \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \right] \simeq \frac{k_2}{m_2}$$

Les vecteurs modaux D_1 et D_2 correspondant à ces modes, sont donnés par :

$$D_1 \simeq \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{vmatrix} \quad D_2 \simeq \begin{vmatrix} 1 \\ 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{vmatrix}$$

Le premier mode correspond à la vibration locale de la console, le deuxième au déplacement d'ensemble du bâtiment (fig. 7.19).

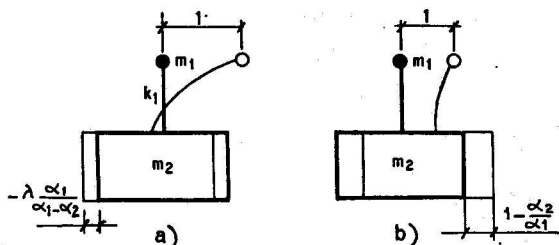


FIG. 7.19. — Modes propres de vibration

a) Mode 1 $\omega_1 \approx \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$

b) Mode 2 $\omega_2 \approx \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$

Les vecteurs Φ_1 et Φ_2 proportionnels aux vecteurs D_1 et D_2 sont donnés par:

$$\Phi_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \begin{vmatrix} 1 \\ -\lambda \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{vmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \\ 1 \end{vmatrix}$$

Les efforts dans la console sont obtenus en superposant les deux modes. Les calculs se simplifient dans les cas où la console est soit raide, soit souple par rapport au bâtiment:

a) Cas de la console raide

La console est raide par rapport au bâtiment si le coefficient $\alpha_1 = \frac{k_1}{m_1}$ est grand par rapport au coefficient $\alpha_2 = \frac{k_2}{m_2}$.

Dans ce cas, on obtient:

$$\Phi_1 \approx \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \Phi_2 \approx \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Le premier mode n'est pas excité, il n'existe donc pas de vibration locale, les masses m_1 et m_2 se déplacent de la même quantité (fig. 7.20).

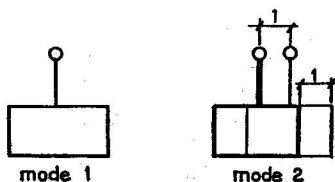


FIG. 7.20. — Cas de la console raide

On peut donc étudier le bâtiment sans modéliser la console; on impose ensuite à la masse m_1 l'accélération trouvée au nœud le plus proche.

b) Cas de la console souple

La console est souple si le coefficient α_1 est faible par rapport au coefficient α_2 .

Dans ce cas, on obtient:

$$\Phi_1 \simeq \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \Phi_2 \simeq \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Le premier mode correspond à la vibration de la console seule, le deuxième mode à celle du bâtiment seul, la masse m_1 restant immobile (fig. 7.21).

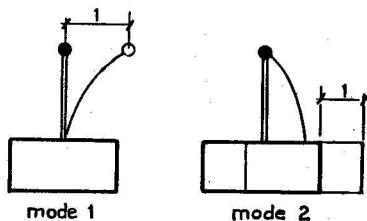


FIG. 7.21. — Cas de la console souple

On peut donc étudier le bâtiment sans modéliser la console, l'accélération de la masse m_1 est alors obtenue en supposant la console directement encastree au niveau du sol.

7.6. CALCUL D'UN PORTIQUE PAR LA MÉTHODE DU SPECTRE DE RÉPONSE SUPERPOSITION QUADRATIQUE DES EFFORTS

Cette application a pour but l'évaluation des efforts dans un portique en béton armé comportant deux niveaux (fig. 7.22) par la méthode du spectre de réponse (§ 5.2).

Les pseudo-accélérationes seront calculées au moyen d'un modèle simplifié, les efforts à l'aide d'un modèle plus détaillé.

Le portique est soumis aux effets d'un séisme dont la composante horizontale est définie par un spectre d'accélération calé à 0,07 g (fig. 7.23). La composante verticale est définie par le même spectre pondéré par un coefficient 2/3.

Dans un but de simplification, on admettra les hypothèses suivantes:

1) Les traverses sont infiniment rigides et la masse totale du portique $m = 120$ t est répartie également entre-elles.

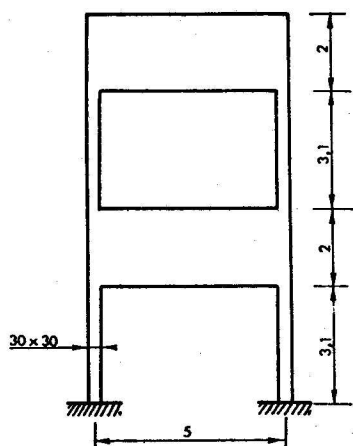


FIG. 7.22.

2) On néglige les déformations du sol et de la fondation; les poteaux sont donc encastrés en pied.

3) Le contreventement dans la direction perpendiculaire au plan du portique est assuré par une structure indépendante. Le portique est donc étudié sous l'effet d'un séisme agissant dans son plan, dans la direction horizontale et dans la direction verticale.

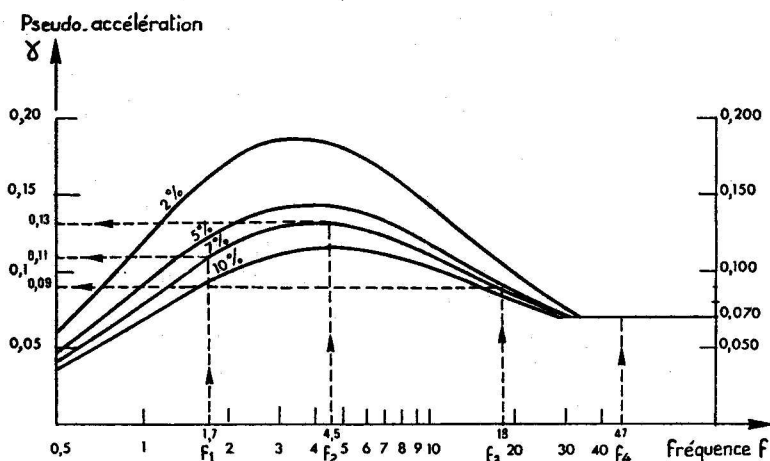


FIG. 7.23. — Spectre de réponse

7.6.1. Modélisation pour le calcul des pseudo-accelérations

a) Cas du séisme vertical

Les traverses étant rigides, on calcule seulement les déplacements relatifs verticaux u_1 et u_2 des deux niveaux. Le modèle est donc composé

de deux ressorts en série (fig. 7.24) dont la raideur k est celle des deux poteaux d'un même étage agissant en compression, soit :

$$k = 2 \frac{ES}{\ell} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} S = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \text{ m}^2 \\ E = 3,5 \cdot 10^6 \text{ tf/m}^2 = 3,43 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \\ \ell = 3,1 \text{ m} \end{array} \right.$$

D'où :

$$k = 2 \cdot 10^6 \text{ kN/m}$$

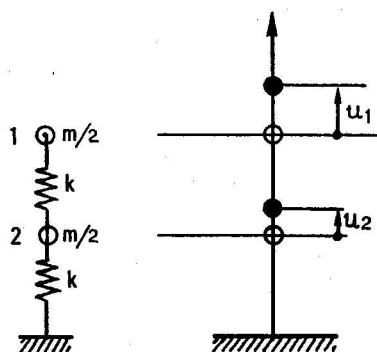


FIG. 7.24. — Modélisation pour l'étude du séisme vertical

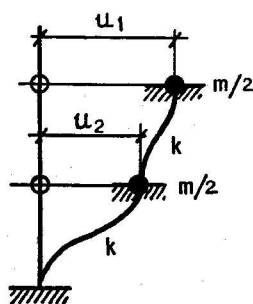


FIG. 7.25. — Modélisation pour l'étude du séisme horizontal

b) Cas du séisme horizontal

Seuls les déplacements relatifs horizontaux u_1 et u_2 des deux niveaux sont calculés, les déplacements verticaux étant négligés. Le modèle est donc constitué comme précédemment de deux ressorts en série, mais qui représentent cette fois-ci la raideur à la flexion des poteaux d'un même étage lorsqu'on déplace leurs extrémités à l'horizontale en empêchant la rotation (fig. 7.25).

La raideur k de chaque ressort a pour valeur :

$$k = 24 \frac{EI}{\ell^3} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} E = 3,43 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \\ I = \frac{0,3 \cdot 0,3^3}{12} = 6,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ \ell = 3,1 \text{ m} \end{array} \right.$$

Soit :

$$k = 18\,640 \text{ kN/m}$$

7.6.2. Calcul des modes propres de vibration

a) Calcul des pulsations

Pour les deux modèles précédemment définis, les matrices de rigidité k et de masse M ont la même expression :

$$k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix}$$

Les pulsations des deux modes propres sont données par (4.21) :

$$\begin{vmatrix} k - \frac{m}{2} \omega^2 & -k \\ -k & 2k - \frac{m}{2} \omega^2 \end{vmatrix} = 0 = \left(k - \frac{m}{2} \omega^2 \right) \left(2k - \frac{m}{2} \omega^2 \right) - k^2$$

Cette équation du second degré en ω^2 a pour racines :

$$\omega_1^2 = (3 - \sqrt{5}) \frac{k}{m} \simeq 0,764 \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = (3 + \sqrt{5}) \frac{k}{m} \simeq 5,24 \frac{k}{m}$$

Pour l'étude du séisme horizontal, les deux modes propres ont pour pulsation :

$$\omega_1^2 = 0,764 \frac{18\,640}{120} = 119 \quad \omega_1 = 10,9 \quad T_1 = 0,58 \text{ s} \quad f_1 = \frac{1}{T_1} = 1,7 \text{ Hz}$$

$$\omega_2^2 = 5,24 \frac{18\,640}{120} = 814 \quad \omega_2 = 28,5 \quad T_2 = 0,22 \text{ s} \quad f_2 = \frac{1}{T_2} = 4,5 \text{ Hz}$$

Pour l'étude du séisme vertical, les deux modes propres, classés en position trois et quatre ont pour pulsation :

$$\omega_3^2 = 0,764 \frac{2 \cdot 10^6}{120} = 1,27 \cdot 10^4 \quad \omega_3 = 113 \quad T_3 = 0,056 \text{ s} \quad f_3 = 18 \text{ Hz}$$

$$\omega_4^2 = 5,24 \frac{2 \cdot 10^6}{120} = 8,7 \cdot 10^4 \quad \omega_4 = 295 \quad T_4 = 0,021 \text{ s} \quad f_4 = 47 \text{ Hz}$$

b) Calcul des vecteurs propres

Les vecteurs propres sont déterminés à l'aide de la relation (4.22).

Pour le premier mode, la matrice $(K - M\omega_1^2)$ a pour valeur:

$$(K - M\omega_1^2) = \begin{bmatrix} k \left(1 - \frac{0,764}{2}\right) & -k \\ -k & k \left(2 - \frac{0,764}{2}\right) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0,618 & -1 \\ -1 & 1,618 \end{bmatrix}$$

Le vecteur propre D_1 , mis sous la forme $D_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ x \end{vmatrix}$ est donné par:

$$\begin{bmatrix} 0,618 & -1 \\ -1 & 1,618 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \begin{cases} 0,618 - x = 0 \\ -1 + 1,618 x = 0 \end{cases}$$

Les deux équations conduisent bien à la même valeur $x = 0,618$, d'où:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0,618 \end{vmatrix}$$

On calcule ensuite le vecteur $\Phi_1 = a D_1$; le coefficient a est donné par l'expression (4.43) ou l'expression (4.48):

$$a = \frac{[1 \quad 0,618] \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1 \quad 0,618] \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,618 \end{bmatrix}} = \frac{\frac{m}{2} (1 + 0,618)}{\frac{m}{2} [1 + (0,618)^2]} = 1,17$$

d'où:

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} 1,17 \\ 0,724 \end{vmatrix}$$

Pour le deuxième mode, la matrice $(K - M\omega_2^2)$ a pour valeur:

$$(K - M\omega_2^2) = \begin{bmatrix} k \left(1 - \frac{5,24}{2}\right) & -k \\ -k & k \left(2 - \frac{5,24}{2}\right) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1,62 & -1 \\ -1 & -0,62 \end{bmatrix}$$

Le vecteur modal $D_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ x \end{vmatrix}$ est donné par:

$$\begin{bmatrix} -1,62 & -1 \\ -1 & -0,62 \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{soit} \begin{cases} -1,62 - x = 0 \\ -1 - 0,62 x = 0 \end{cases}$$

Les deux équations conduisent à la même valeur $x \simeq 1,62$, d'où:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1,62 \end{vmatrix}$$

On calcule ensuite le coefficient a :

$$a = \frac{1 - 1,62}{1 + (1,62)^2} = -0,171$$

et le vecteur $\Phi_2 = a D_2$:

$$\Phi_2 = \begin{vmatrix} -0,171 \\ 0,277 \end{vmatrix}$$

Il est à noter que les vecteurs Φ_1 et Φ_2 sont identiques pour les deux modèles étudiés, mais on considère toutefois quatre vecteurs propres correspondant aux quatre périodes précédemment calculées:

Mode		1	2	3	4
T	sec	0,58	0,22	0,056	0,021
f	Hz	1,7	4,5	18	47
$\Phi =$	u_1	1,17	-0,171	1,17	-0,171
	u_2	0,724	0,277	0,724	0,277

Les deux premiers modes permettent le calcul des déplacements horizontaux, les deux derniers le calcul des déplacements verticaux.

c) Calcul des réponses modales

Pour le séisme horizontal, on utilise le spectre correspondant à l'amortissement de 7%, pris usuellement pour le béton armé, qui fournit les pseudo-accélérations suivantes:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1,7 \text{ Hz} & \gamma_1 &= 0,11 g \\ f_2 &= 4,5 \text{ Hz} & \gamma_2 &= 0,13 g \end{aligned}$$

Les accélérations horizontales des masses sont données par la formule (4.45):

$$\begin{aligned} 1^{\text{er}} \text{ mode: } 0,11 \text{ g} & \begin{bmatrix} 1,17 \\ 0,724 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,13 \text{ g} \\ 0,08 \text{ g} \end{bmatrix} \\ 2^{\text{e}} \text{ mode: } 0,13 \text{ g} & \begin{bmatrix} -0,171 \\ 0,277 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,022 \text{ g} \\ 0,036 \text{ g} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour le séisme vertical, les résultats lus sur le spectre sont pondérés par un coefficient $\frac{2}{3}$:

$$f_3 = 18 \text{ Hz} \quad \gamma_4 = 0,09 \text{ g} \times \frac{2}{3} = 0,06 \text{ g}$$

$$f_3 = 47 \text{ Hz} \quad \gamma_4 = 0,07 \text{ g} \times \frac{2}{3} = 0,047 \text{ g}$$

D'où les accélérations verticales des masses:

$$\begin{aligned} 3^{\text{e}} \text{ mode: } 0,06 \text{ g} & \begin{bmatrix} 1,17 \\ 0,724 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07 \text{ g} \\ 0,043 \text{ g} \end{bmatrix} \\ 4^{\text{e}} \text{ mode: } 0,047 \text{ g} & \begin{bmatrix} -0,171 \\ 0,277 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,008 \text{ g} \\ 0,013 \text{ g} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'après la relation 4.46, les déplacements relatifs, pour un mode donné, sont évalués en divisant les pseudo-accelérations par le carré de la pulsation; on obtient ainsi les valeurs suivantes, exprimées en millimètres:

Mode	Déplacements horizontaux (mm)		Déplacements verticaux (mm)	
	1	2	3	4
u_1	10,7	-0,27	0,054	-0,0009
u_2	6,6	0,43	0,033	0,0015

L'énergie potentielle E correspondant à chacun des modes peut être calculée par la formule (5.5):

$$E = \frac{1}{2} U^t K U$$

où U représente le vecteur des déformations précédemment calculé.

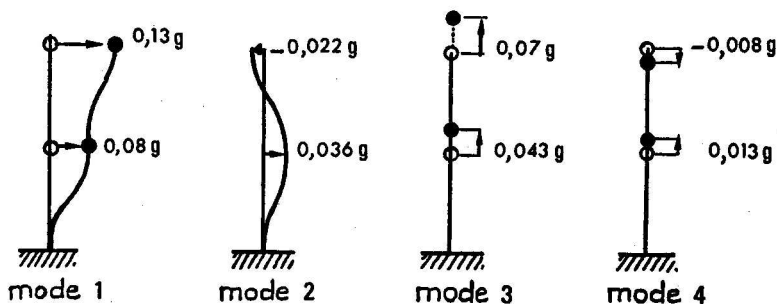


Fig. 7.26. — Accélération maxima des masses

On obtient:

$$E_1 = \frac{18\,640 \cdot 10^{-6}}{2} [10,7 \quad 6,6] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10,7 \\ 6,6 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = 9,32 \cdot 10^{-3} [10,7 \quad 6,6] \begin{bmatrix} 4,1 \\ 2,5 \end{bmatrix} = 0,563$$

$$E_2 = 6,3 \cdot 10^{-3}$$

$$E_3 = 1,5 \cdot 10^{-3}$$

$$E_4 = 8 \cdot 10^{-6}$$

Le premier mode étant pris comme référence, ces énergies ont pour valeur relative selon les modes:

Mode	1	2	3	4
Energie	100	1,1	0,27	0,0014

On voit que le mode 1 est nettement prépondérant et pourrait être seul conservé en pratique; à titre d'exemple, les calculs seront néanmoins poursuivis avec tous les modes.

7.6.3. Modélisation pour le calcul des efforts

La structure est modélisée sous forme d'un portique comportant deux traverses rigides (fig. 7.27). Les charges sont appliquées au centre de gravité de ces traverses et les efforts dans les poteaux, mis sous la forme d'un

vecteur $\begin{bmatrix} M \\ N \\ T \end{bmatrix}$ sont calculés aux points P et Q .

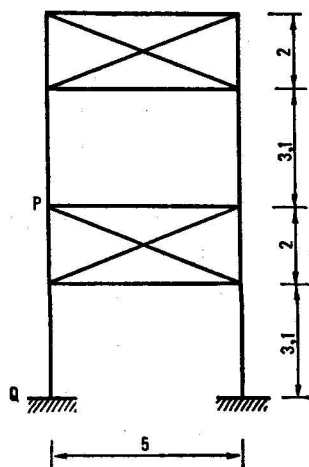


FIG. 7.27. — Modèle pour l'étude des efforts

Les cas de charge dynamique s'obtiennent en appliquant aux masses les pseudo-accélérations précédemment calculées pour les quatre modes de vibration :

Pour le premier mode (cas 1), les accélérations horizontales des masses ont pour valeur 0,08 g et 0,13 g.

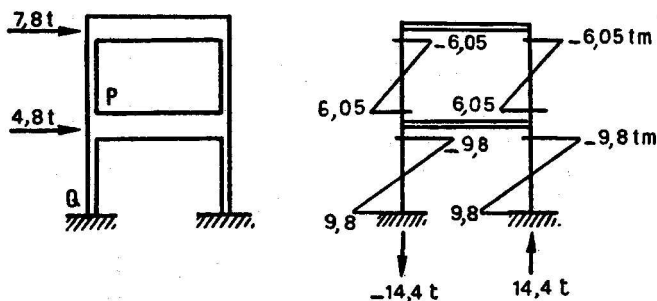
On en déduit les forces statiques équivalentes :

$$60 \times 0,13 g = 7,8 g = 7,8 \text{ tf}$$

$$60 \times 0,08 g = 4,8 g = 4,8 \text{ tf}$$

Si on exprime les forces en tonnes-force, g est en effet pris égal à l'unité.

A ce cas de charge, correspondent les efforts donnés par la figure 7.28, en particulier ceux aux points P et Q des poteaux.



$$P \left| \begin{array}{l} M = 6,05 \text{ tm} \\ N = -4 \text{ t} \\ T = 3,9 \text{ t} \end{array} \right.$$

$$Q \left| \begin{array}{l} M = 9,8 \text{ tm} \\ N = -14,4 \text{ t} \\ T = 6,3 \text{ t} \end{array} \right.$$

FIG. 7.28. — 1^o Mode de vibration (cas 1)

Les forces statiques équivalentes et les efforts pour les trois autres modes sont donnés par les figures 7.29, 7.30 et 7.31.

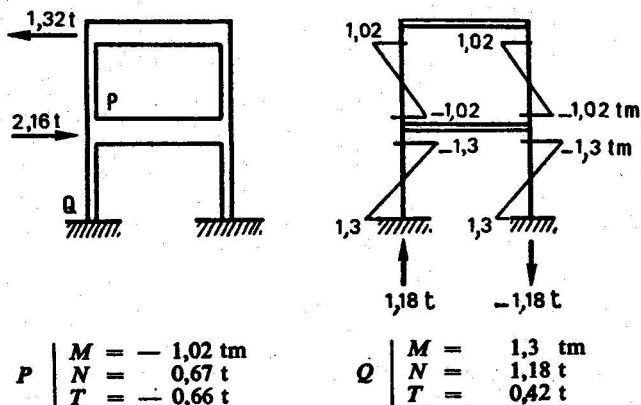


FIG. 7.29. — 2^o Mode de vibration (cas 2)

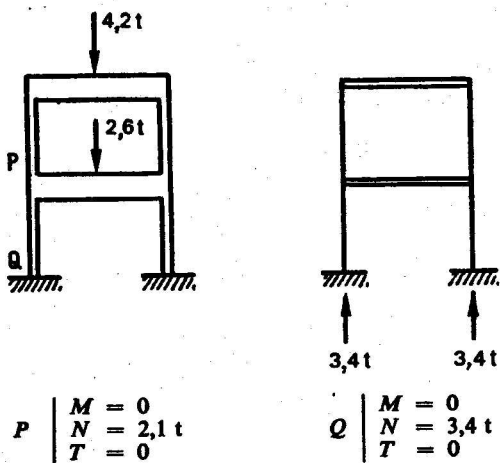
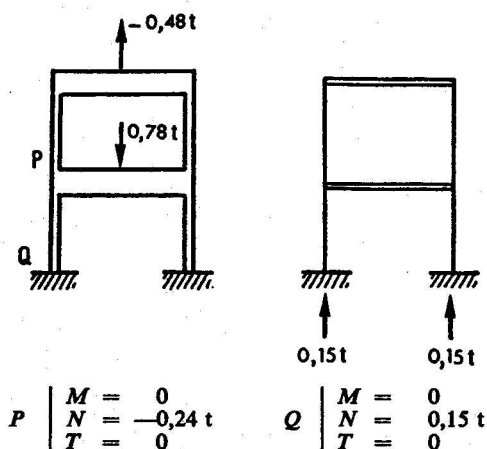


FIG. 7.30. — 3^o Mode de vibration (cas 3)

Pour le cas de charge statique (cas 5), les efforts dans les poteaux ont pour valeur:

au point P :	$\begin{array}{c} 0 \\ 30 \\ 0 \end{array}$	et au point Q :	$\begin{array}{c} 0 \\ 60 \\ 0 \end{array}$
----------------	---------------------------------------------	-------------------	---------------------------------------------

FIG. 7.31. — 4^o Mode de vibration (cas 4)

7.6.4. Superposition quadratique des efforts

Le calcul des efforts se présente différemment selon que l'on étudie un seul paramètre ou bien deux paramètres concomitants (§ 5.24).

a) Calcul des armatures transversales des poteaux

Les armatures transversales sont calculées d'après la valeur maximum \bar{T} de l'effort tranchant; on utilise donc la méthode décrite en 5.2.4 a); la superposition quadratique des efforts relatifs aux cas de charges 1 à 5 (fig. 7.28 à 7.31) conduit à la valeur:

Au point P :

$$\bar{T} = \sqrt{3,9^2 + 0,66^2} = 3,96 \text{ t}$$

Au point Q :

$$\bar{T} = \sqrt{6,3^2 + 0,42^2} = 6,31 \text{ t}$$

b) Calcul des armatures longitudinales des poteaux

Les armatures longitudinales sont calculées en flexion composée d'après les valeurs concomitantes du moment et de l'effort normal. On applique donc la méthode décrite en 5.2.4 b).

Pour la section P , on calcule les paramètres:

$$\bar{M} = \sqrt{6,05^2 + 1,02^2} = 6,14 \text{ tm}$$

$$\bar{N} = \sqrt{4^2 + 0,67^2 + 2,1^2 + 0,24^2} = 4,57 \text{ t}$$

$$\rho = \frac{-6,05 \times 4 - 1,02 \times 0,67}{6,14 \times 4,57} = -0,89$$

puis les couples:

$$A \left| \begin{array}{l} M = 6,14 \\ N = 4,57 [\sqrt{2(1-0,89)} - 1] = -2,43 \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} M = -3,26 \\ N = 4,57 \end{array} \right.$$

$$C \left| \begin{array}{l} M = -5,8 \\ N = 4,57 \end{array} \right.$$

$$D \left| \begin{array}{l} M = 6,14 \\ N = -4,32 \end{array} \right.$$

Les efforts statiques ont pour valeur:

$$\left| \begin{array}{l} M = 0 \\ N = 30 \end{array} \right.$$

Si le ferrailage est symétrique, on ne prend en compte que les combinaisons:

$$\left| \begin{array}{l} M = 6,14 \text{ tm} \\ N = 30 \pm 4,32 \text{ t} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} M = 5,80 \text{ tm} \\ N = 30 \pm 4,57 \text{ t} \end{array} \right.$$

Pour la section Q , on calcule les paramètres:

$$\bar{M} = \sqrt{9,8^2 + 1,3^2} = 9,9 \text{ tm}$$

$$\bar{N} = \sqrt{14,4^2 + 1,18^2 + 3,14^2 + 0,15^2} = 14,8 \text{ t}$$

$$\rho = \frac{-9,8 \times 14,4 + 1,3 \times 1,18}{9,9 \times 14,8} = -0,95$$

puis les couples:

$$A \left| \begin{array}{l} M = 9,9 \\ N = -10,1 \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} M = -6,8 \\ N = 14,8 \end{array} \right.$$

$$C \left| \begin{array}{l} M = -9,6 \\ N = 14,8 \end{array} \right.$$

$$D \left| \begin{array}{l} M = 9,9 \\ N = -14,5 \end{array} \right.$$

Le ferrailage est calculé d'après les efforts:

$$\left| \begin{array}{l} M = 9,9 \text{ tm} \\ N = 60 \pm 14,5 \text{ t} \end{array} \right.$$

ou

$$\left| \begin{array}{l} M = 9,6 \text{ tm} \\ N = 60 \pm 14,8 \text{ t} \end{array} \right.$$

7.6.5. Méthodes approchées

a) Prise en compte du premier mode seul

Si on prend en compte uniquement le premier mode, les seuls efforts à considérer résultent des combinaisons:

$$\text{cas 5} + \text{cas 1}$$

$$\text{cas 5} - \text{cas 1}$$

Soit:

$$P \begin{cases} M = 6,05 \\ N = 30 \pm 4 \\ T = 3,9 \end{cases} \quad Q \begin{cases} M = 9,8 \\ N = 60 \pm 14,4 \\ T = 6,3 \end{cases}$$

b) *Superposition quadratique des pseudo-accélérations*

Si on emploie la méthode approchée décrite en 6.2.2, la moyenne quadratique des pseudo-accélérations a pour valeur:

— dans la direction horizontale:

$$\sqrt{0,13^2 + 0,022^2} = 0,132 \text{ g}$$

$$\sqrt{0,08^2 + 0,036^2} = 0,0877 \text{ g}$$

— dans la direction verticale:

$$\sqrt{0,07^2 + 0,008^2} = 0,0705 \text{ g}$$

$$\sqrt{0,043^2 + 0,013^2} = 0,0449 \text{ g}$$

On en déduit deux cas de charge et les efforts correspondants en P et Q (fig. 7.32 et 7.33).

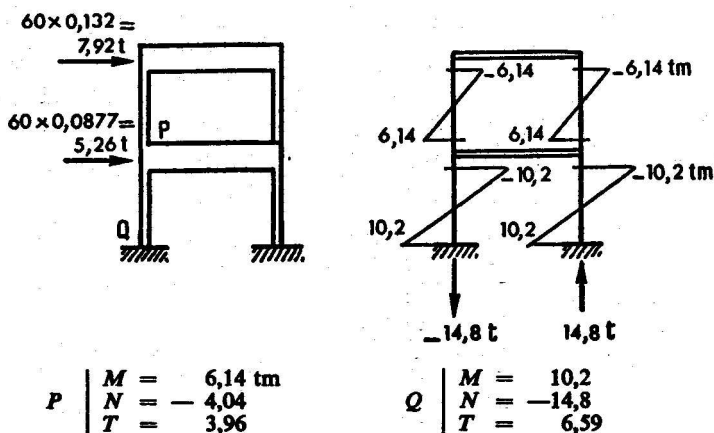


FIG. 7.32. — Superposition quadratique des accélérations horizontales

Ces cas de charges doivent être combinés de toutes les manières possibles au cas de charge statique, ce qui conduit aux efforts:

$$P \begin{cases} M = 6,14 \text{ tm} \\ N = 30 \pm 6,16 \text{ t} \\ T = 3,96 \text{ t} \end{cases} \quad Q \begin{cases} M = 10,2 \text{ tm} \\ N = 60 \pm 18,3 \text{ t} \\ T = 6,59 \text{ t} \end{cases}$$

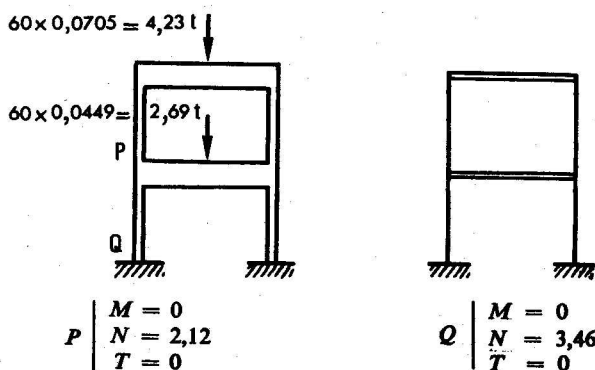


FIG. 7.33. — Superposition quadratique des accélérations verticales

Ces résultats sont à rapprocher de ceux fournis par la méthode exacte :

P	$M = 6,14 \text{ tm}$ $N = 30 \pm 4,32 \text{ t}$ $T = 3,96 \text{ t}$	Q	$M = 9,9 \text{ tm}$ $N = 60 \pm 14,5 \text{ t}$ $T = 6,31 \text{ t}$
-----	------------------------------------------------------------------------------	-----	-----------------------------------------------------------------------------

On constate donc la validité des méthodes approchées dans ce cas d'application simple, due au fait qu'un mode est nettement prépondérant vis-à-vis des autres; il n'en est pas forcément de même pour d'autres types de structures.

7.7. ÉTUDE D'UN RÉFRIGÉRANT

Pour certains types de structures, les premiers modes de vibration ne sont pas excités par une secousse sismique, ce qui impose de calculer un nombre élevé de modes pour être certain d'obtenir tous ceux qui sont significatifs (§ 5.4 b)).

Il en est ainsi pour les réfrigérants à tirage naturel qui font l'objet de la présente application.

Le calcul des efforts engendrés dans la coque de révolution d'un réfrigérant par un séisme de direction horizontale a été effectué à l'aide du programme Hercule ⁽¹⁾.

Le modèle tridimensionnel est composé de barres pour les poteaux et d'éléments finis qui prennent en compte les efforts de membrane et de

⁽¹⁾ Programme HERCULE développé par la SOCOTEC.

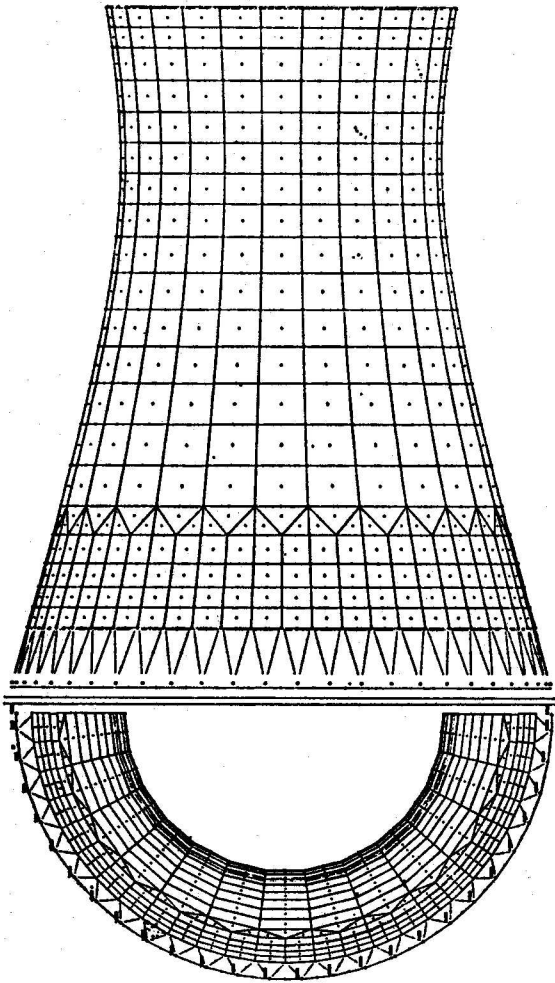


FIG. 7.34. — Modèle d'une coque de réfrigérant

flexion dans la coque (fig. 7.34). La masse, proportionnelle à l'épaisseur de la coque, est concentrée automatiquement aux nœuds.

Les quarante premiers modes de vibration ont été calculés et leur période est donnée par le tableau suivant:

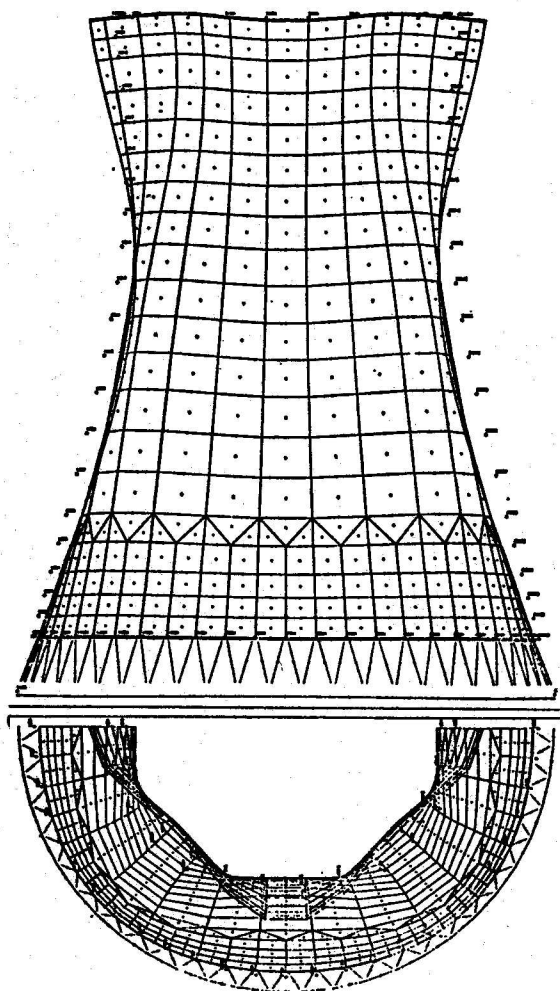
<i>Numéro</i>	<i>Période</i>	<i>Fréquence</i>	<i>Numéro</i>	<i>Période</i>	<i>Fréquence</i>
1	1.2276	0.815	21	0.4067	2.171
2	1.1742	0.852	22	0.4554	2.196
3	1.1098	0.901	23	0.4470	2.237
4	1.0369	0.964	24	0.4457	2.244
5	0.8274	1.209	25	0.4451	2.246
6	0.8169	1.224	26	0.4445	2.250
7	0.7407	1.350	27	0.4325	2.312
8	0.7111	1.406	28	0.3989	2.507
9	0.6945	1.440	29	0.3958	2.526
10	0.6703	1.492	30	0.3930	2.545
11	0.6642	1.505	31	0.3808	2.626
12	0.6486	1.542	32	0.3790	2.639
13	0.5646	1.771	33	0.3550	2.817
14	0.5625	1.778	34	0.3505	2.853
15	0.5446	1.836	35	0.3502	2.856
16	0.5426	1.843	36	0.3495	2.861
17	0.5380	1.859	37	0.3429	2.916
18	0.5350	1.869	38	0.3411	2.931
19	0.5024	1.991	39	0.3356	2.980
20	0.4649	2.151	40	0.3291	3.039

Les premiers modes de vibration correspondent à des déformations d'ovalisation symétriques par rapport à l'axe vertical de la coque, comme on peut le constater sur les dessins des déplacements suivant le mode 1 (fig. 7.35) et le mode 5 (fig. 7.36).

Ces modes d'ovalisation ne peuvent être excités par un séisme de direction horizontale à cause de la symétrie de leur déformation.

On constate bien dans le tableau ci-après que l'énergie correspondant aux premiers modes est nulle, seul le treizième étant excité de façon notable.

<i>Mode</i>	<i>Energie</i>	<i>Mode</i>	<i>Energie</i>
1	0.00000%	10	0.00030%
2	0.00000%	11	0.00014%
3	0.00000%	12	0.00104%
4	0.00001%	13	99.99995%
5	0.00016%	14	0.00024%
6	0.00022%	15	0.21007%
7	0.00003%	16	0.00799%
8	0.00075%	17	0.00041%
9	0.00011%	18	0.09590%

FIG. 7.35. — 1^{er} mode de vibration

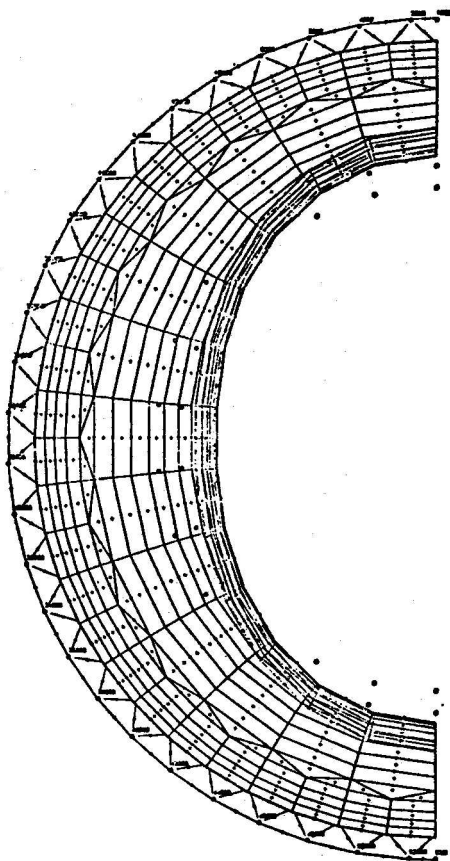
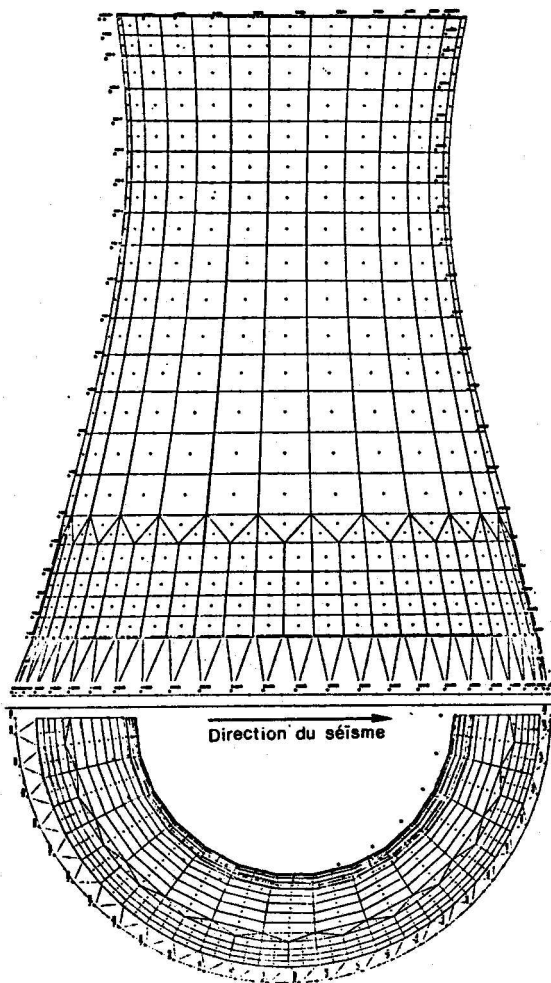


FIG. 7.36. — 5^e mode de vibration

La déformée du 13^e mode correspond à une flexion d'ensemble analogue à celle qui se produirait sous l'effet du poids propre supposé agir à l'horizontale (fig. 7.37).

FIG. 7.37. — 13^e mode de vibration

Pour le calcul des efforts, le 13^e mode seul est à retenir. Les contraintes de membrane dans les éléments sont données par la figure 7.38 sur laquelle le trait simple indique la direction et l'intensité de la contrainte principale de compression, le trait double étant relatif à la traction.

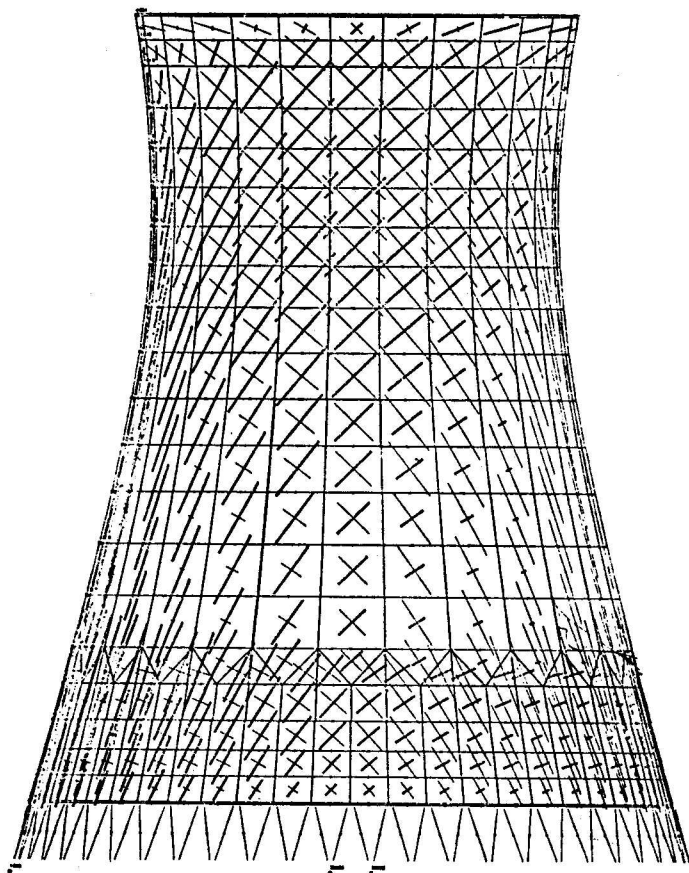


FIG. 7.38. — Contraintes de membrane dues au séisme horizontal

7.8. ÉTUDE D'UN PYLÔNE MÉTALLIQUE

Le but de cette application est de montrer les écarts parfois considérables sur les valeurs des périodes propres qui résultent d'une modélisation incorrecte des masses, et, en particulier, d'une erreur sur la position relative des masses d'un même niveau.

En effet, un changement de cette position, pratiquement sans influence pour les structures courantes, peut entraîner des conséquences importantes dans certains cas.

Les périodes propres ont été calculées à l'aide des deux modèles suivants:

A — Les masses sont concentrées au croisement des barres, ce qui restitue correctement leur répartition; elles agissent à l'horizontale comme à la verticale. Dans ce modèle, toutes les barres de la structure sont représentées.

B — Le pylône est modélisé par une console verticale sur laquelle sont concentrées les masses agissant à l'horizontale seulement. Il s'agit donc du modèle utilisé classiquement pour les bâtiments courants.

La période des quatre premiers modes a été calculée pour les deux modèles; les énergies correspondantes, pour le modèle exact, ont été déterminées à partir d'un spectre issu des Règles P.S. 1969.

<i>Modes propres</i>	A		B
	<i>Périodes en sec</i>	<i>Energie de déformation %</i>	<i>Périodes en sec</i>
1	1,115	100,00	0,407
2	0,310	21,24	0,140
3	0,144	0,82	0,079
4	0,0915	1,30	0,069

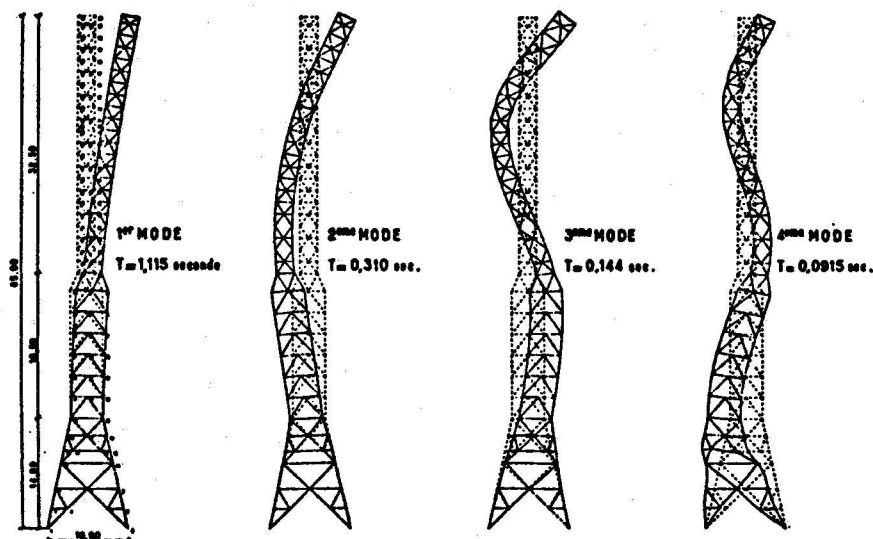


FIG. 7.39. — Déformées propres de vibration d'un pylône métallique

On constate dans le tableau ci-dessus que dans le cas A les périodes calculées avec une position exacte des masses sont plus de deux fois supérieures à celles obtenues dans le cas B avec des masses concentrées sur l'axe.

Les déformations, suivant les quatre premiers modes propres, pour le cas A, sont données par la figure 7.39.

7.9. ÉTUDE D'UN BATIMENT DE GRANDE HAUTEUR

Dans cette application est présentée l'étude d'un immeuble de grande hauteur (I.G.H.) effectué à l'aide d'un modèle tridimensionnel, en utilisant le programme HERCULE.

Le bâtiment à usage d'hôtel ⁽¹⁾ a pour dimensions en plan $53,82 \times 44,17$ m (fig. 7.40) et pour hauteur 114,00 m (37 niveaux). L'ossature est composée de voiles en béton armé qui présentent de très grandes variations d'inertie sur la hauteur: les voiles en sous-sol ont de grandes ouvertures et à partir du 15 étage, les surfaces des étages diminuent progressivement jusqu'au sommet.

Le calcul sismique a été effectué dans le cadre du règlement américain UNIFORM BUILDING CODE (U.B.C. 1976) qui impose, dans ce cas particulier, l'emploi d'un modèle à trois dimensions. Compte tenu des irrégularités et de la dissymétrie de l'ossature, il a été fait usage d'un modèle très détaillé (fig. 7.41) qui permet d'obtenir directement les efforts dans tous les éléments.

Deux coupes horizontales du modèle, au niveau de l'étage courant et d'un étage supérieur, sont données par les figures 7.42 et 7.43.

Le spectre de réponse issu de l'U.B.C. 1976 est représenté en coordonnées arithmétiques sur la figure 7.44 a et en coordonnées logarithmiques sur la figure 7.44 b.

Les voiles ont été modélisés par des barres et les linteaux par des poutres reliant les axes de deux voiles et comportant des goussets de rigidité infinie au droit du voile (cf. § 6.5). Les planchers ont été matérialisés par des éléments de membrane.

⁽¹⁾ — *Etude architecturale*: P. DUFAU, J. P. DACBERT & Associés, J. R. FRIANT, assistant, Architectes D.P.L.G.

— *Etude des structures*: M. GIANQUINTO, CECOBA.

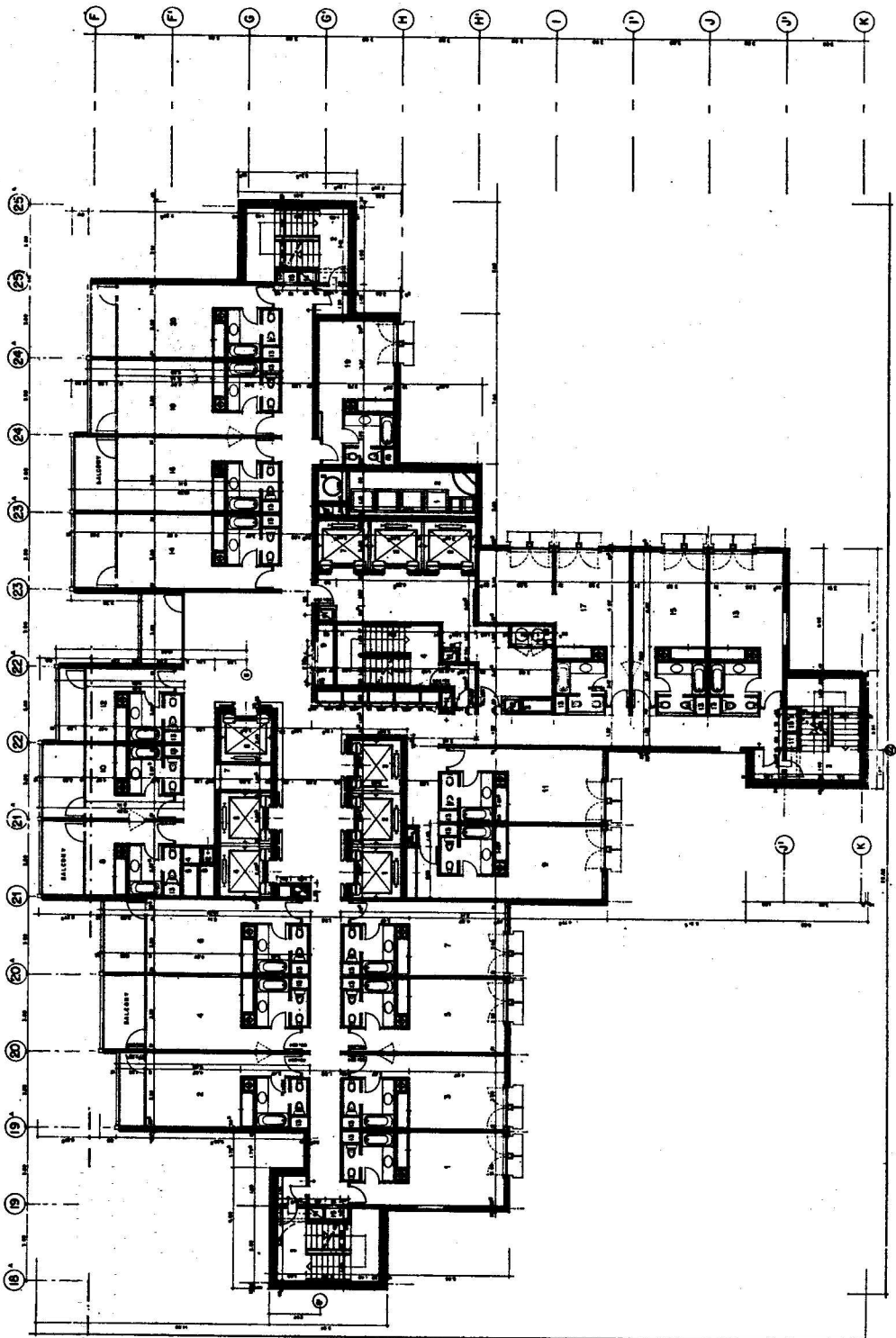


Fig. 7.40. — Etage courant

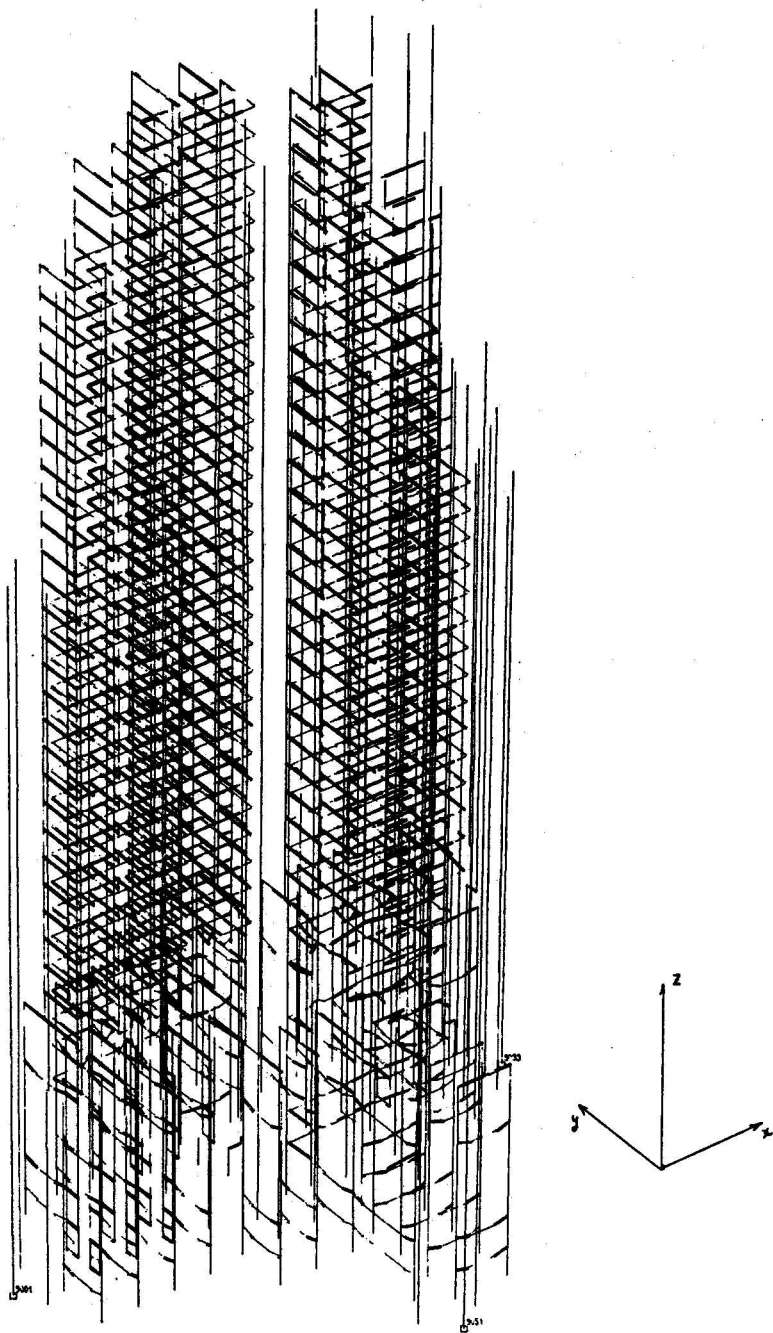


FIG. 7.41. — Perspective du modèle

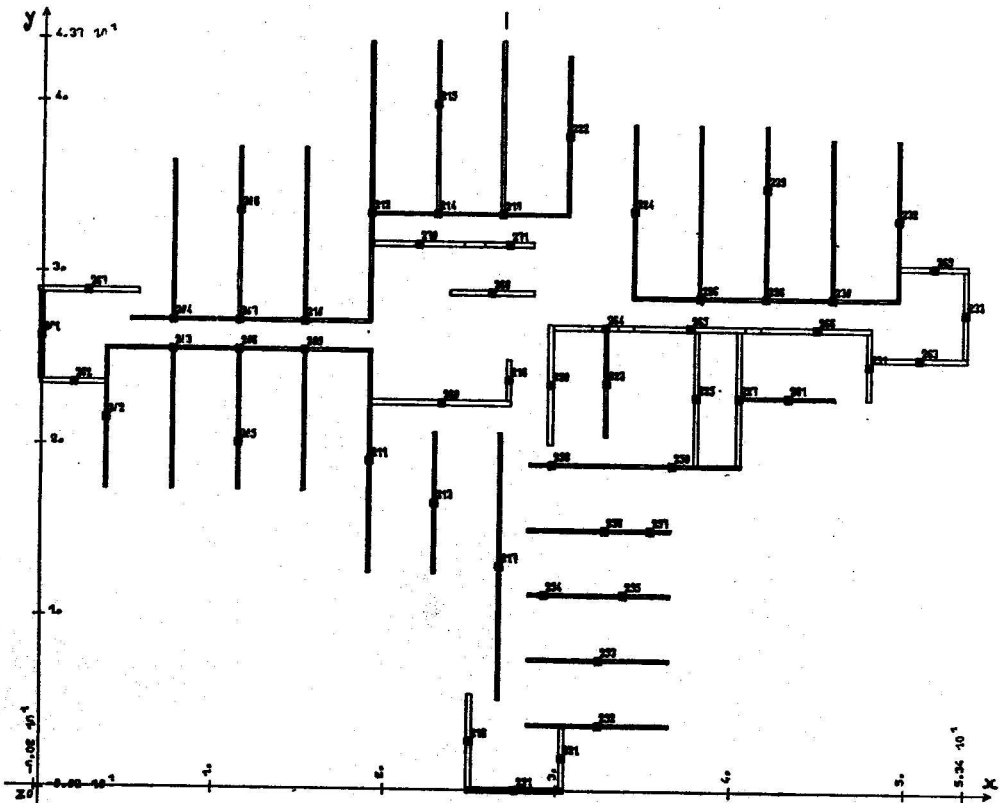


FIG. 7.42. — Modèle d'un étage courant

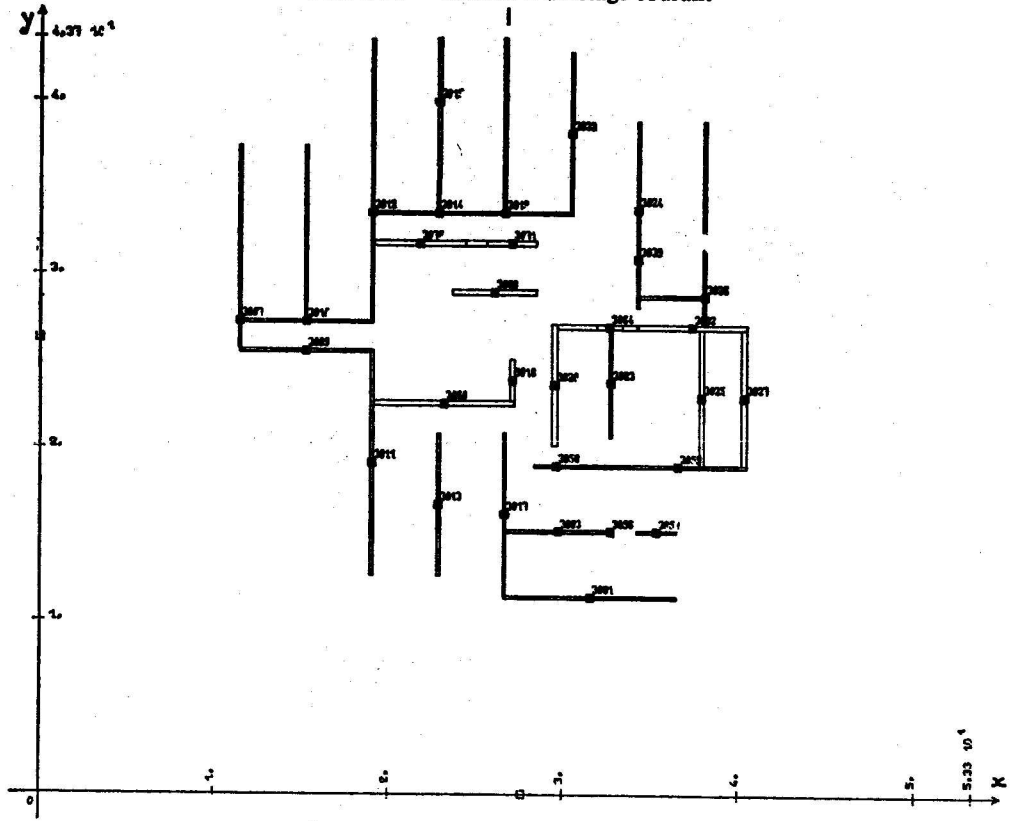
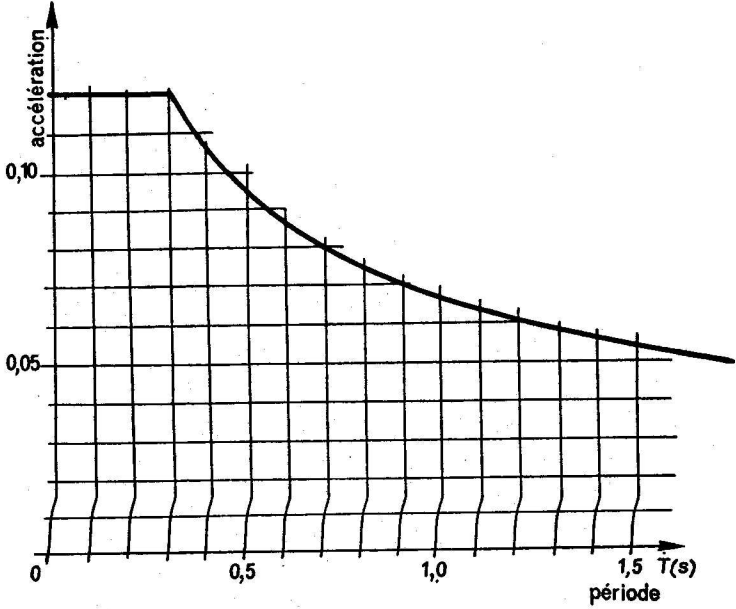
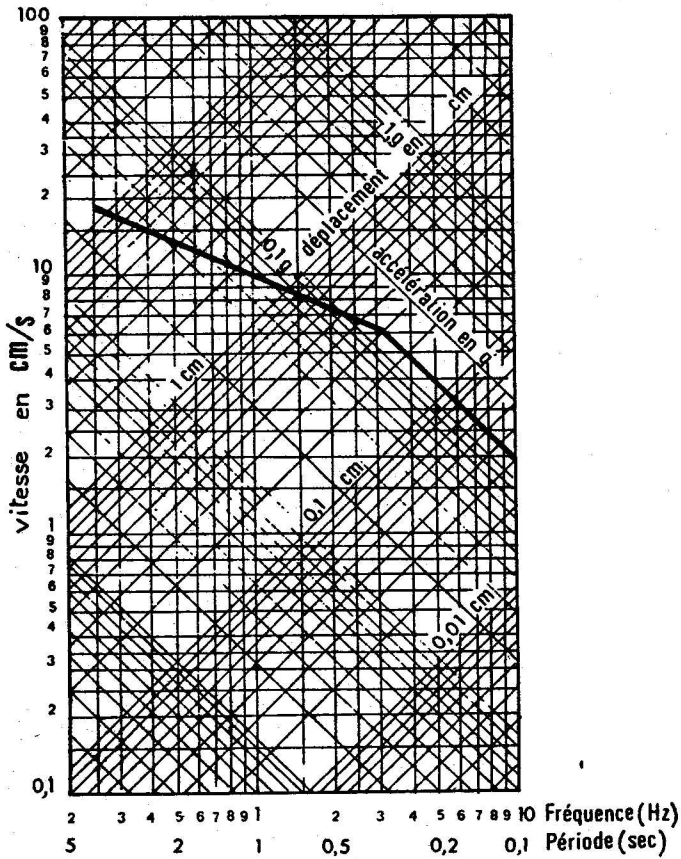


FIG. 7.43. — Modèle d'un étage supérieur



a)



b)

FIG. 7.44. — Spectre de réponse U.B.C. 1976. Formule 12-2. Section 2312 (d)

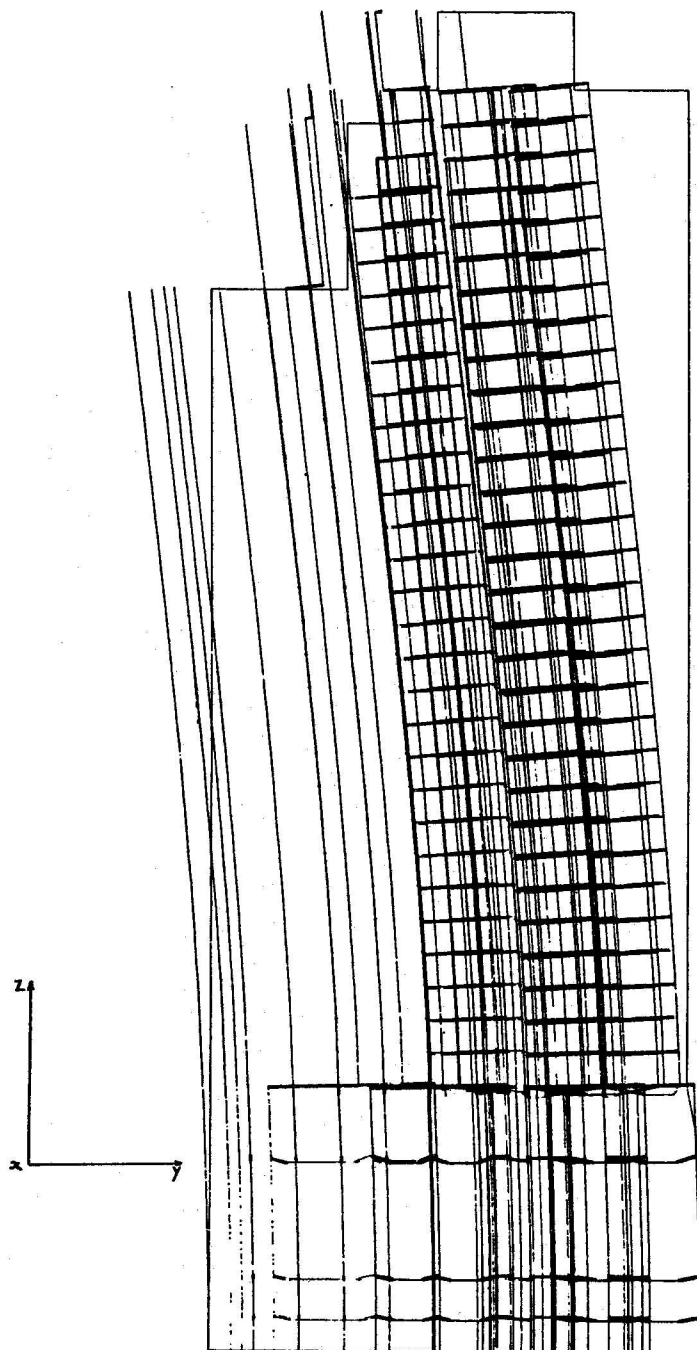


FIG. 7.45. — Déformée propre de vibration. Mode 1. Sens y

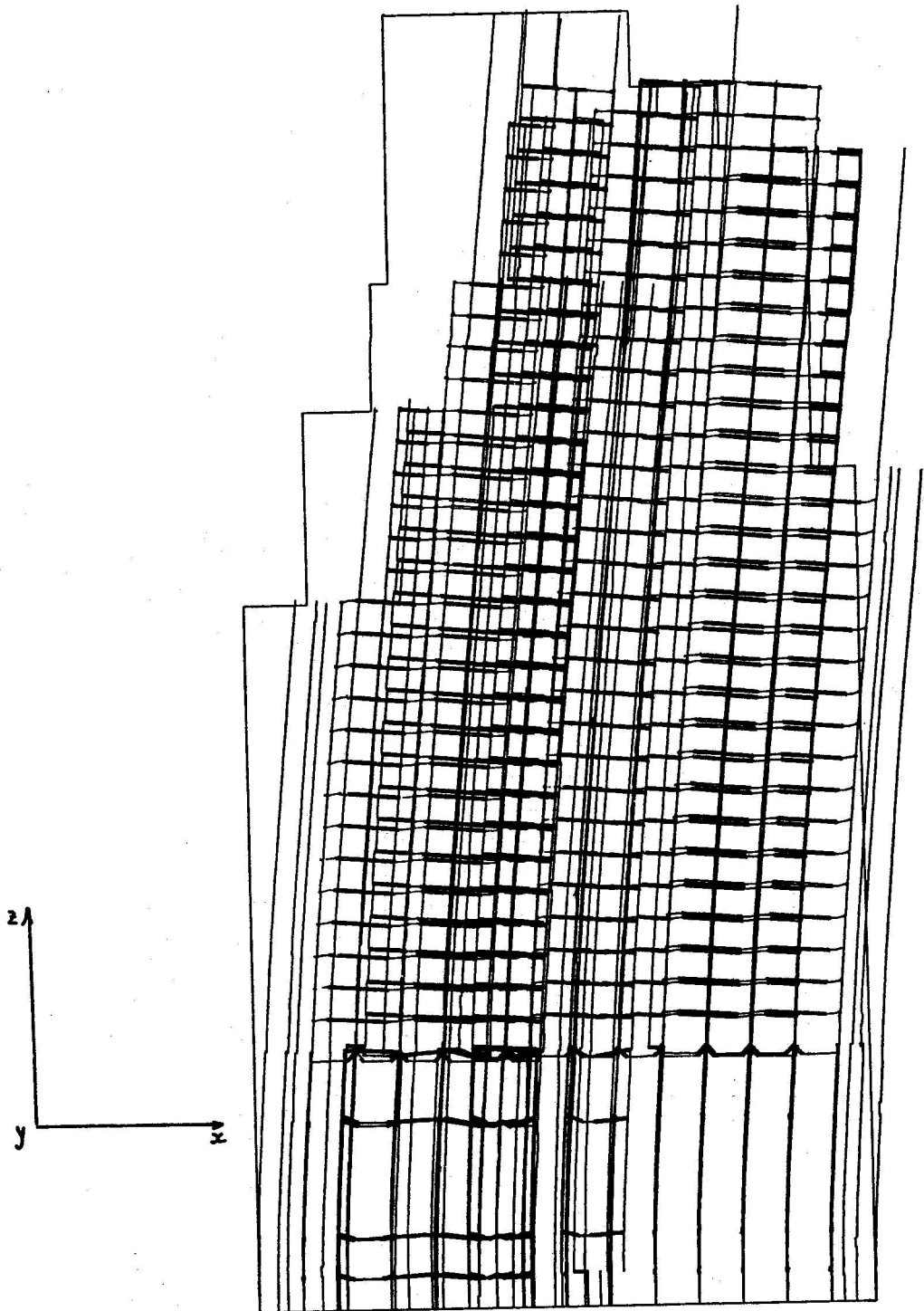


FIG. 7.46. — Déformée propre de vibration. Mode 2. Sens x

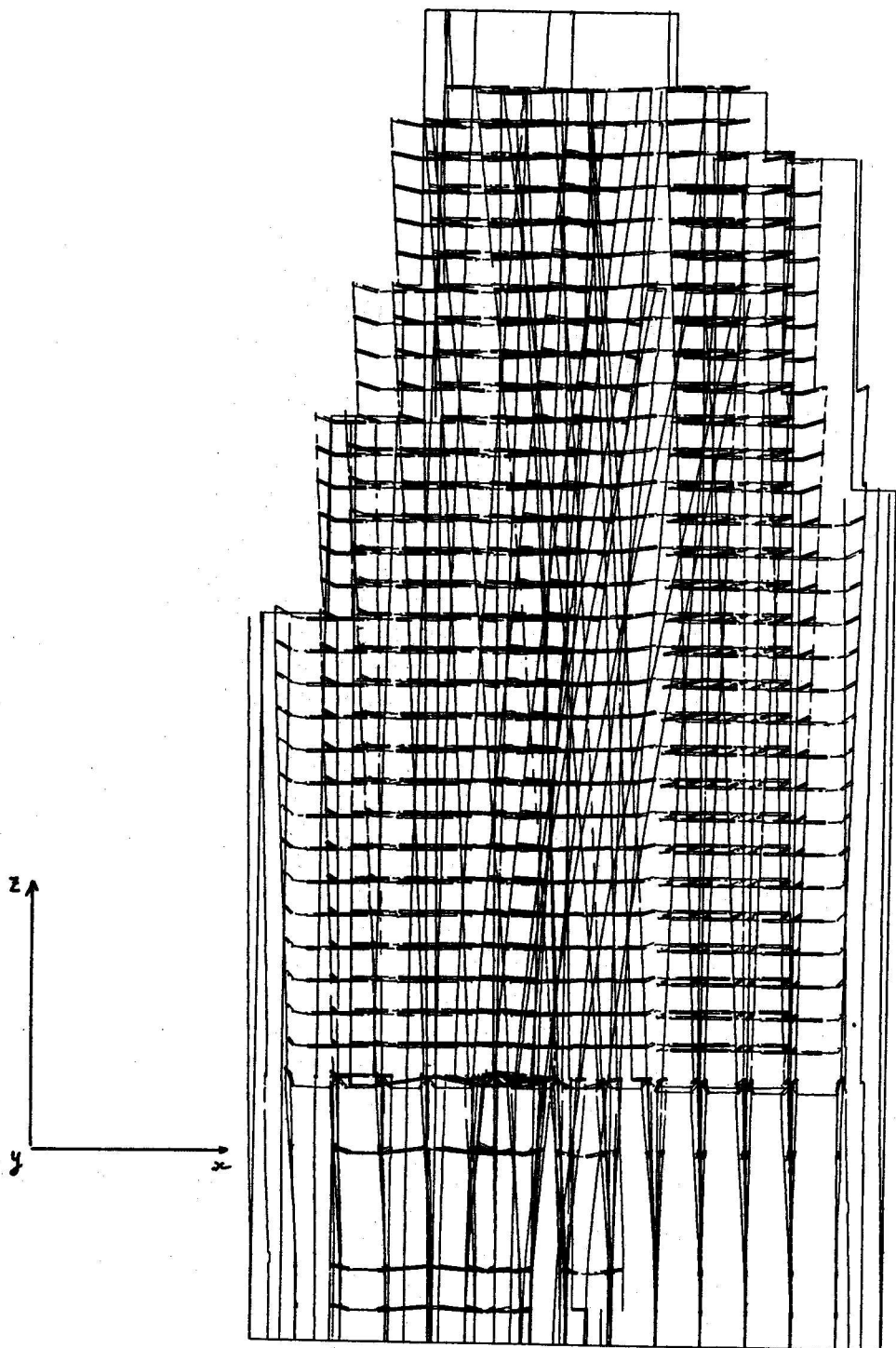


FIG. 7.47. — Déformée propre de vibration. Mode 3. Torsion autour de l'axe OZ

La masse du bâtiment est concentrée à chaque niveau aux nœuds communs aux voiles et aux linteaux.

Le tableau ci-dessous donne la période des dix premiers modes propres de vibration.

<i>Mode</i>	<i>Période (sec.)</i>	<i>Mode</i>	<i>Période (sec.)</i>
1	1,74	6	0,33
2	1,45	7	0,23
3	0,90	8	0,173
4	0,46	9	0,166
5	0,415	10	0,156

On constate que pour le mode 1 les déplacements s'effectuent principalement à l'horizontale dans le sens *oy* (fig. 7.45); pour le mode 2, les déplacements s'effectuent principalement dans la direction horizontale *ox* (fig. 7.46); le mode 3 est un mode de torsion autour de l'axe *oz* (fig. 7.47).

L'énergie stockée par les modes pour un séisme de direction horizontale *ox* ou *oy* est donnée par le tableau ci-dessous:

<i>Mode</i>	<i>Périodes (sec)</i>	<i>Energie stockée %</i>	
		<i>Séisme Sens x</i>	<i>Séisme Sens y</i>
1	1,74	4,92	100,00
2	1,45	100,00	4,08
3 (torsion)	0,90	0,02	0,01
4	0,46	6,73	2,97
5	0,415	2,69	6,72

On constate qu'en pratique, seul le mode 2 est excité par un séisme de direction *ox* et le mode 1 par un séisme *oy*. Le mode 3 de torsion a une influence négligeable, ce qui permet de penser qu'un calcul plan dans chacune des deux directions horizontales aurait conduit à des résultats acceptables.

Par la suite, pour le calcul des efforts, on a conservé uniquement le mode 1 pour l'étude dans le sens *y* et le mode 2 pour l'étude dans le sens *x*.

7.10. ADAPTATION DES RÈGLES P.S. 1969 POUR L'ÉTUDE D'UNE STRUCTURE PARTICULIÈRE

Les Règles P.S. 1969 permettent l'étude des structures dont le premier mode de vibration est prépondérant. Dans certains cas, et même pour des

structures simples, il n'en est pas ainsi, et les règles ne peuvent être utilisées qu'après adaptation.

Soit, par exemple, un portique constitué d'un poteau relié à un mur par une poutre (fig. 7.48).

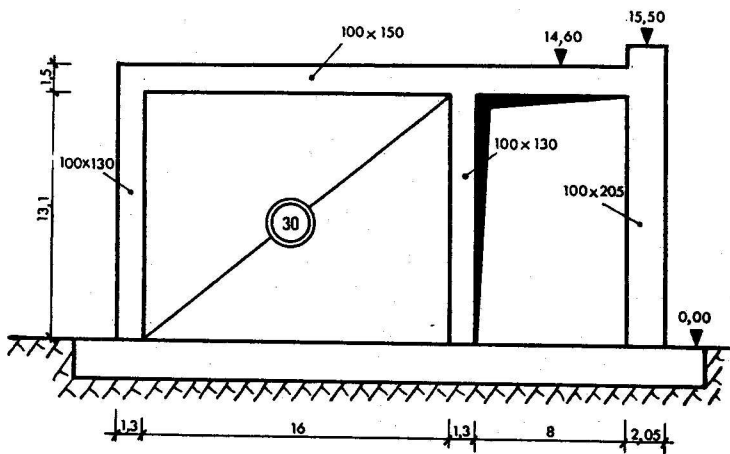


FIG. 7.48

Le mur est très rigide dans son plan et le sol supposé peu déformable; on peut alors négliger les déplacements en tête du mur et adopter le modèle indiqué sur la figure 7.49.

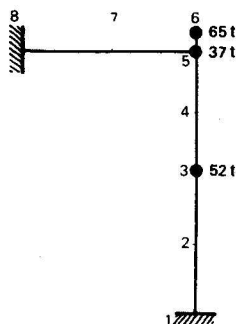


FIG. 7.49

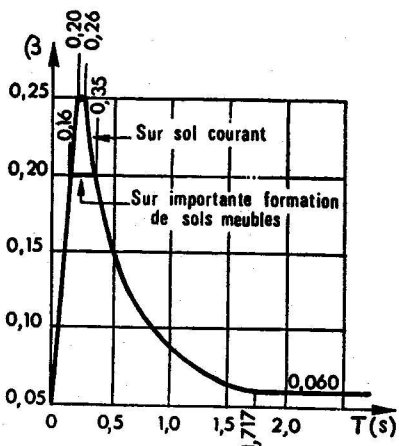


FIG. 7.50

Les masses sont concentrées en trois nœuds seulement dans un but de simplification. Il conviendrait, en réalité, d'établir des nœuds supplémentaires afin de mieux tenir compte de la répartition de certaines masses.

L'étude de la réponse au séisme horizontal est effectuée d'après les Règles P.S. 1969, en prenant pour valeur des paramètres α et δ :

$$\alpha = 1,25 \quad \delta = 1$$

La structure ayant un amortissement faible, on utilise le spectre (c'est-à-dire le coefficient β) défini au § 3.114 des Règles P.S. 1969 (fig. 7.50).

Les masses ayant deux degrés de liberté chacune (la translation à l'horizontale ou à la verticale), il existe six modes de vibration (fig. 7.51).

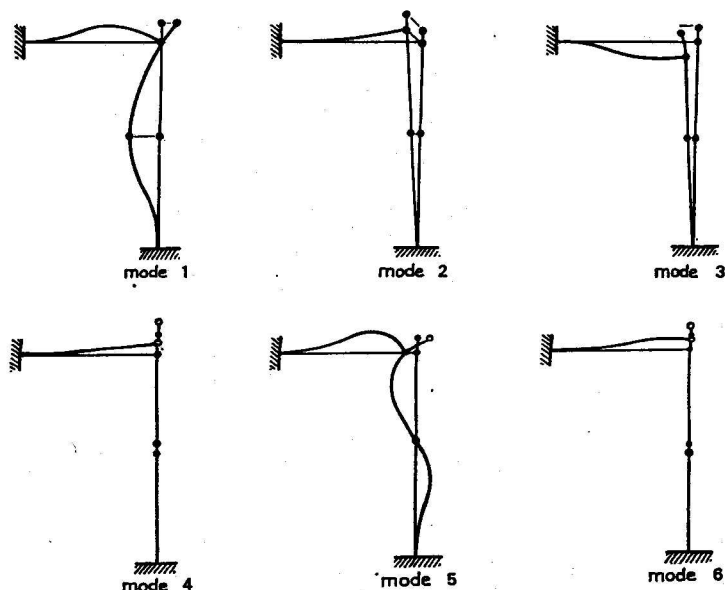


FIG. 7.51. — Modes propres de vibration

D'après le tableau ci-dessous, les trois premiers modes correspondent à des énergies de déformation comparables, les trois derniers pouvant être négligés.

Numéro	Période	Fréquence	Energie
1	0.0456	21.930	99.99997
2	0.0311	32.166	78.85999
3	0.0305	32.746	88.26065
4	0.0095	104.969	0.00000
5	0.0065	154.607	0.02604
6	0.0034	295.915	0.00000

Si on applique les Règles P.S. 1969 (§ 3.114-11) sans discernement, on est conduit à négliger les modes supérieurs puisque la période du premier mode a une valeur inférieure à 0,5 s.

Afin de juger la validité des résultats obtenus, on calcule à titre d'exemple la valeur du moment M_3 au nœud 3 du poteau et de l'effort normal N_8 au nœud 8 de la poutre. Pour les trois premiers modes, on obtient :

Mode		1	2	3
M_3	(tm)	6,8	0,39	0,07
N_8	(t)	0,625	4,09	4,84

On voit donc que pour le calcul du moment M_3 , on peut valablement ne tenir compte que du 1^{er} mode, les règles s'appliquant dans ce cas sans restriction.

Par contre, pour le calcul de l'effort normal N_8 , les modes 2 et 3 sont les plus importants, le premier mode étant négligeable.

Les règles ne pouvant manifestement pas être appliquées, on doit effectuer une superposition quadratique des modes qui fournit la valeur maximum $\overline{N_8}$ de l'effort normal :

$$N_8 = \sqrt{0,625^2 + 4,09^2 + 4,84^2} = 6,37 \text{ t}$$

L'application stricte des règles amènerait donc dans ce cas à faire une erreur de 1 à 10.

En conclusion, pour les structures qui ne peuvent être modélisées par une console verticale, les Règles P.S. 1969 doivent être utilisées avec prudence: il faut détecter si des modes supérieurs n'ont pas une influence significative et, dans un tel cas, on doit appliquer la méthode générale qui consiste à prendre en compte tous les modes par l'intermédiaire de la superposition quadratique.

ANNEXE A

RAPPELS SUR LE CALCUL MATRICIEL

A.1. DÉFINITIONS

A.1.1. Vecteurs

Un vecteur V est défini par ses n composantes écrites sous forme de colonne:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Le vecteur transposé V^t du vecteur V s'écrit sous forme de ligne:

$$V^t = | v_1 v_2 \dots v_j \dots v_n | \quad (\text{A.2})$$

A.1.2. Matrices

Une matrice est un tableau comportant m lignes et n colonnes que l'on écrit sous la forme:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

L'élément courant a_{ij} de la matrice est repéré par son numéro de ligne i et son numéro de colonne j . Ces éléments peuvent être regroupés sous la forme de m vecteurs ligne ou n vecteurs colonne:

$$A = \begin{bmatrix} & a_{1j} & & \\ & a_{2j} & & \\ & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & \vdots & & a_{mj} & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{vecteur ligne } i \\ \uparrow \text{vecteur colonne } j \end{array} \quad (\text{A.4})$$

Par la suite on étudiera uniquement le cas des *matrices carrées*, qui possèdent autant de lignes que de colonnes ($m = n$).

Une matrice carrée est diagonale lorsque seuls les éléments a_{jj} ne sont pas nuls:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & & & 0 \\ 0 & a_{22} & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{jj} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \\ & & & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La *matrice transposée* A^t de la matrice A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Une matrice carrée est *symétrique* si, quels que soient i et j , on vérifie la relation:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Une telle matrice est donc identique à sa transposée.

A.2. OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS ET LES MATRICES

A.2.1. Produit de deux vecteurs

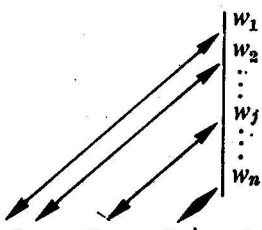
Le produit p de deux vecteurs :

$$V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix}$$

ayant le même nombre n de composantes est le scalaire défini par la relation :

$$p = \sum_{j=1}^n v_j w_j \quad (\text{A.7})$$

Si on transpose l'un des vecteurs, par exemple V , le produit peut se mettre sous la forme graphique suivante :



$$p = V^t W = |v_1 v_2 \dots v_j \dots v_n| \quad (\text{A.8})$$

les flèches indiquant les termes à multiplier entre eux avant addition.

On vérifie facilement la relation :

$$V^t W = W^t V \quad (\text{A.9})$$

A.2.2. Combinaison linéaire de matrices

Soient deux matrices carrées $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ de même dimension $n \times n$ et deux paramètres λ et μ .

On définit une combinaison linéaire de A et B par la relation :

$$C = [c_{ij}] = \lambda A + \mu B \quad (\text{A.10})$$

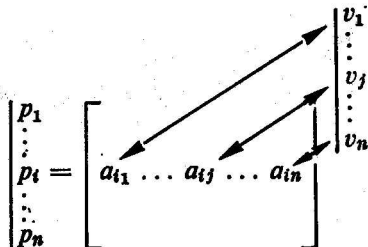
avec $c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$.

La matrice C a la même dimension $n \times n$ que A et B .

A.2.3. Produit d'une matrice par un vecteur

On considère un vecteur $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ à n composantes et une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ de dimension $n \times n$.

Le produit $P = AV$ est un vecteur dont la coordonnée p_i est égale au produit de V par le vecteur ligne de rang i de la matrice:

$$P = AV = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$


On a donc la relation:

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \quad (\text{A.12})$$

Un système d'équations linéaires peut s'écrire sous la forme d'un produit d'une matrice par un vecteur.

Soit en effet un système de n équations à n inconnues:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Si on pose:

$$A = [a_{ij}] \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

on peut écrire les relations (A.13) sous la forme:

$$AX = B \quad (\text{A.15})$$

A.2.4. Forme bilinéaire

On appelle forme bilinéaire une expression du type:

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad (\text{A.16})$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle:

$$z = X^t A Y \quad (\text{A.17})$$

avec:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Le scalaire z est donc calculé en effectuant tout d'abord le produit AY ; le vecteur colonne ainsi obtenu est ensuite multiplié par le vecteur ligne X^t .

A.2.5. Forme quadratique

On appelle forme quadratique une expression du type:

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (\text{A.18})$$

que l'on peut aussi écrire sous forme matricielle:

$$z = X^t A X \quad (\text{A.19})$$

$$\text{avec: } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = [a_{ij}].$$

Dans le cas où la matrice A est diagonale, seuls les termes a_{ii} sont différents de zéro, et la forme quadratique s'écrit:

$$z = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 \quad (\text{A.20})$$

A.2.6. Déterminant d'une matrice

Le déterminant $|A|$ d'une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ de dimension $n \times n$ est la somme des n produits $a_{1i} a_{2j} a_{3k} \dots a_{np}$, les indices $i, j, k \dots p$ étant des permutations de $1, 2, 3 \dots n$; le signe de chaque produit est plus (+) si la suite $i, j, k \dots p$ est obtenue à partir de la suite $1, 2, 3 \dots n$ à l'aide d'un nombre pair de permutations, et moins (—) dans le cas contraire.

Dans le cas d'une matrice symétrique de dimension 2×2 ou 3×3 , le déterminant a pour valeur:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \quad |A| = ab - c^2 \quad (\text{A.21})$$

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \quad |A| = abc + 2 def - af^2 - be^2 - cd^2 \quad (\text{A.22})$$

A.2.7. Propriétés des opérations sur les vecteurs et les matrices

On note λ et μ deux nombres quelconques, V et W deux vecteurs à n coordonnées, A et B deux matrices carrées de dimension $n \times n$. On peut démontrer les propriétés suivantes:

$$(\lambda A + \mu B) V = \lambda AV + \mu BV$$

$$W^t (\lambda A + \mu B) V = \lambda W^t AV + \mu W^t BV$$

$$(W^t AV)^t = V^t A^t W$$

ANNEXE B

PROPRIÉTÉS DES VECTEURS MODAUX

Le vecteur modal D_i , correspondant à la pulsation ω_i est défini par la relation :

$$(K - M \omega_i^2) D_i = 0 \quad (\text{B.1})$$

K et M , matrices de raideur et de masse sont carrées de dimension $n \times n$;
 D_i est un vecteur à n coordonnées.

On démontre les propriétés suivantes :

a)
$$\omega_i^2 = \frac{D_i^t K D_i}{D_i^t M D_i} \quad (\text{B.2})$$

Cette expression est obtenue en multipliant à gauche la relation (B.1) par le vecteur D_i^t transposé de D_i ; on développe ensuite en utilisant les propriétés des opérations matricielles :

$$D_i^t (K - M \omega_i^2) D_i = 0$$

$$D_i^t K D_i = D_i^t M D_i \omega_i^2$$

soit

$$\omega_i^2 = \frac{D_i^t K D_i}{D_i^t M D_i}$$

b)
$$D_j^t K D_i = 0 \quad \text{et} \quad D_j^t M D_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad (\text{B.3})$$

La multiplication de la relation (B.1) par le vecteur D_j^t conduit à l'expression :

$$D_j^t (K - M \omega_j^2) D_i = 0$$

soit

$$D_j^t K D_i = D_j^t M D_i \omega_i^2$$

En transposant les deux membres de cette relation, on obtient:

$$(D_j^t K D_i)^t = (D_j^t M D_i)^t \omega_i^2$$

d'où:

$$D_i^t K^t D_j = D_i^t M^t D_j \omega_i^2$$

Les matrices de raideur K et de masse M sont symétriques, ce qui permet d'écrire:

$$K^t = K \quad M^t = M$$

d'où:

$$D_i^t K D_j = D_i^t M D_j \omega_i^2 \quad (\text{B.4})$$

On effectue ensuite les mêmes opérations à partir de la relation analogue à (B.1) qui définit le vecteur modal D_j :

$$\begin{aligned} (K - M \omega_j^2) D_j &= 0 \\ D_i^t (K - M \omega_j^2) D_j &= 0 \\ D_i^t K D_j &= D_i^t M D_j \omega_j^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Par comparaison des expressions (B.4) et (B.5) on obtient:

$$D_i^t K D_j = D_i^t M D_j \omega_i^2 = D_i^t M D_j \omega_j^2$$

Pour $i \neq j$ les pulsations ont des valeurs différentes; cela implique donc:

$$D_i^t K D_j = D_i^t M D_j = 0$$

ANNEXE C

CALCUL APPROCHÉ DES PÉRIODES PROPRES PAR LA MÉTHODE DE RAYLEIGH

C.1. EXPOSÉ DE LA MÉTHODE

La méthode Rayleigh permet le calcul approché de la période du premier mode de vibration d'un oscillateur multiple.

On considère un oscillateur multiple à n degrés de liberté caractérisé par une matrice de rigidité K et une matrice de masse M . Les masses sont supposées concentrées aux nœuds.

On note D le vecteur déformation correspondant au premier mode. D'après la relation (B.2) la pulsation de ce mode est donnée par:

$$\omega^2 = \frac{D^t K D}{D^t M D} \quad (\text{C.1})$$

Le vecteur déformation $D = \begin{vmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \\ \vdots \\ d_n \end{vmatrix}$ correspond à des forces statiques équivalentes:

$$F = \begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = K D \quad (\text{C.2})$$

d'où une autre expression de la pulsation:

$$\omega^2 = \frac{D^t F}{D^t M D} = \frac{\sum_{k=1}^n f_k d_k}{\sum_{k=1}^n m_k d_k^2} \quad (\text{C.3})$$

Pour les structures courantes, la déformée du premier mode a une allure comparable à celle que l'on obtiendrait en imposant à toutes les masses la même accélération horizontale g , c'est-à-dire en les soumettant à leur poids propre supposé agir à l'horizontale (fig. C.1).

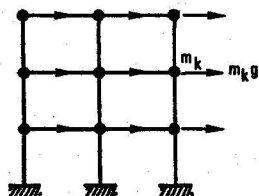


FIG. C.1. — Application du poids propre à l'horizontale

On applique donc à la masse m_k une force horizontale :

$$f_k = m_k g$$

On évalue les déplacements $d_1 \dots d_k \dots d_n$ correspondant à ces forces, qui constituent une approximation de la déformée modale, puis la valeur de la pulsation par la formule (C.3) :

$$\omega^2 = g \frac{\sum_{k=1}^n f_k d_k}{\sum_{k=1}^n f_k d_k^2} \quad (\text{C.4})$$

La période est donc donnée par l'expression :

$$T = 2\pi \sqrt{g \frac{\sum_{k=1}^n f_k d_k^2}{\sum_{k=1}^n f_k d_k}} \quad (\text{C.5})$$

Dans le cas d'une console verticale de raideur $EI(x)$ variable avec la hauteur et comportant une masse répartie $\mu(x)$ (fig. C.2), on peut démon-

trer que la pulsation est liée au déplacement horizontal y et à la courbure

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ par la relation :

$$\omega^2 = \frac{\int_0^H E I(x) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^H \mu(x) y^2 dx} \quad (\text{C.6})$$

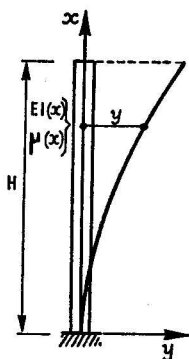


FIG. C.2.

Une valeur approchée de la pulsation pourra être obtenue si l'on se fixe une déformée $y(x)$ arbitraire mais comparable toutefois à celle du premier mode, dont on connaît généralement l'allure.

On peut démontrer en outre que de toutes les déformées que l'on essaie, celle qui donne la plus basse valeur de la pulsation est la plus proche de la réalité.

C.2. APPLICATION

On considère une console verticale de rigidité EI constante, de masse totale m uniformément répartie.

Le calcul de la période du premier mode sera effectué en employant les deux variantes de la méthode de Rayleigh.

C.2.1. Première variante

La masse est condensée en quatre nœuds équidistants, chaque nœud étant affecté de la masse du segment de longueur $H/4$ ou $H/8$ qui lui correspond (fig. C.3). Une masse $m/8$ affectée à la section d'encastrement n'est donc pas prise en compte.

Sous l'action du poids propre à l'horizontale, des forces concentrées de valeur $mg/8$ ou $mg/4$ apparaissent aux nœuds et produisent les déformations indiquées sur la figure C.4.

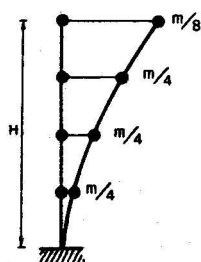


FIG. C.3. —
Modèle de console
à quatre masses
concentrées

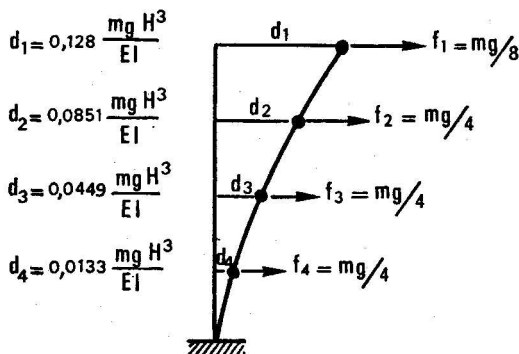


FIG. C.4. — Déformée sous poids propre
à l'horizontale

La pulsation ω est donnée par l'expression (C.4):

$$\omega^2 = g \frac{\sum_{k=1}^4 f_k d_k}{\sum_{k=1}^4 f_k d_k^2}$$

On en déduit:

$$\sum_{k=1}^4 f_k d_k = 0,0518 (mg)^2 \frac{H^3}{EI}$$

$$\sum_{k=1}^4 f_k d_k^2 = 0,0044 (mg)^3 \left(\frac{H^3}{EI} \right)^2$$

$$\omega = 3,43 \sqrt{\frac{EI}{m H^3}}$$

et

$$T = 1,83 \sqrt{\frac{m H^3}{EI}}$$

Dans ces expressions le module E doit être exprimé en N/m^2 et la masse en kg.

C.2.2. Deuxième variante

La masse est uniformément répartie et la pulsation est donnée par l'expression C.6:

$$\omega^2 = \frac{EI \int_0^H \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{m}{H} \int_0^H y^2 dx}$$

Le calcul sera effectué en prenant pour la fonction $y(x)$ une cubique ou une sinusoïde, ce qui constitue une bonne approximation de la déformée du premier mode de vibration.

a) Déformée selon une cubique

On choisit une cubique comportant un point d'inflexion pour $x = H$:

$$y = ax^2 (x - 3H)$$

d'où:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6a(x - H)$$

$$\int_0^H \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = 36a^2 \int_0^H (x - H)^2 dx = 12a^2 H^3$$

$$\int_0^H y^2 dx = a^2 \int_0^H x^4 (x - 3H)^2 dx = \frac{33}{35} a^2 H^7$$

La pulsation a pour valeur:

$$\omega = 3,57 \sqrt{\frac{EI}{m H^3}}$$

et la période:

$$T = 1,76 \sqrt{\frac{m H^3}{EI}}$$

b) Déformée selon une sinusoïde

$$y = a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2H} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2H}$$

On en déduit:

$$\omega = 3,66 \sqrt{\frac{EI}{m H^3}}$$

Cette pulsation a une valeur supérieure à celle obtenue dans le cas a) qui constitue donc une meilleure approximation.

C.2.3. Solution exacte

La solution exacte est donnée en annexe C des Règles P.S. 1969 :

$$T = 1,79 \sqrt{\frac{m H^3}{EI}}$$

$$\omega = 3,51 \sqrt{\frac{EI}{m H^3}}$$

On voit donc que, quelle que soit la variante de la méthode de Rayleigh utilisée, la période est estimée avec une grande précision.

La période peut s'exprimer sous une forme simplifiée en fonction de la flèche au sommet f sous l'action du poids propre à l'horizontale (fig. C.5).

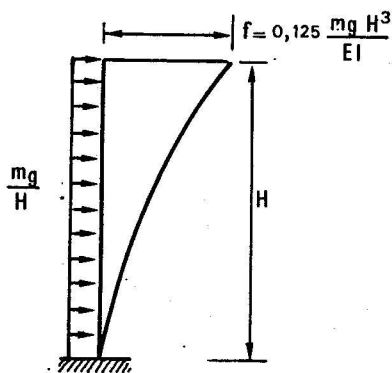


FIG. C.5. — Déformée sous poids propre à l'horizontale

Cette flèche a pour valeur :

$$f = 0,125 \frac{mg H^3}{EI}$$

En utilisant la formule exacte pour calculer la période, on obtient :

$$T = 1,79 \sqrt{\frac{8f}{g}}$$

Si on exprime f en mètres, cette expression s'écrit :

$$T = 1,6 \sqrt{f}$$

ANNEXE D

CALCUL DES PÉRIODES PROPRES D'OSCILLATION FORMULES RÉSOLUES

D.1. MASSE CONCENTRÉE AU SOMMET D'UNE CONSOLE DE SECTION CONSTANTE ET DE MASSE NON NÉGLIGEABLE

La période du premier mode est donnée par:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{P' \ell^3}{g \ 3 EI}}$$

avec $P' = P + \frac{33}{140} p\ell$

P = poids de la masse concentrée (tf.)

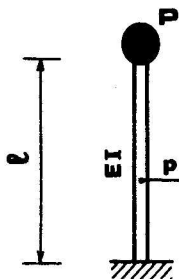
p = poids de la console par unité de longueur (tf/m)

ℓ = longueur de la console (m)

$g = 9,81$ (m/sec²)

E = module d'élasticité du matériau (tf/m²)

I = inertie (m⁴)

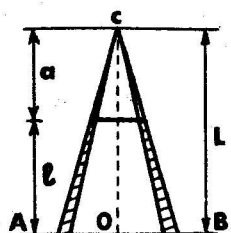


D.2. TRONC DE CÔNE ⁽¹⁾

C'est le cas d'un solide dont toutes les sections horizontales sont homothétiques par rapport à un centre d'homothétie situé sur la verticale du centre de gravité de la base.

La période du premier mode est donnée par :

$$T = \lambda \ell^2 \sqrt{\frac{p}{g EI}}$$



$\frac{a}{L}$	0,4	0,6	0,8	1
λ	1,29	1,5	1,7	1,79

où : L = distance du centre d'homothétie à la base

a = distance du centre d'homothétie à l'extrémité supérieure du tronc de cône

ℓ = hauteur du tronc de cône

p = poids par unité de longueur au niveau de la section de base AB

I = moment d'inertie de la section de base

⁽¹⁾ Extrait des règles P.S. 1969.

D.3. MASSE UNIQUE SITUÉE SUR UNE POUTRE DE MASSE NÉGLIGEABLE

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g \cdot k}}$$

P = poids de la masse

$g = 9,81 \text{ m/sec}^2$

	CONSTANTES DE RAPPEL k DE LA POUTRE	
	$a \neq b$	$a = b = l/2$
	$\frac{3}{a^3} EI$	—
	$\frac{3(a+b)}{a^2 b^2} EI$	$\frac{48}{l^3} EI$
	$\frac{12(a+b)^3}{a^3 b^2(3a+4b)} EI$	$\frac{110 EI}{l^3}$
	$\frac{(a+b)^3}{a^3 b^3} EI$	$\frac{192}{l^3} EI$
	$\frac{3}{c^2(l+c)} EI$	—
	$\frac{12}{c^2(3l+4c)} EI$	—

D.4. POUTRES DE SECTION CONSTANTE ET DE MASSE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE

La période des cinq premiers modes est donnée par la formule:

$$T = \lambda \ell^2 \sqrt{\frac{p}{g EI}}$$

p = poids par unité de longueur (kgf/m)

ℓ = longueur de la poutre (m)

g = 9,81 m/sec²

E = module d'élasticité (kgf/m²)

I = moment d'inertie (m⁴)

λ = coefficient déduit du tableau ci-dessous.

$\lambda = 1.784$	$\lambda = 0.280$	$\lambda = 0.102$	$\lambda = 0.0518$	$\lambda = 0.0314$	
$\lambda = 0.636$	$\lambda = 0.159$	$\lambda = 0.0706$	$\lambda = 0.0397$	$\lambda = 0.0254$	
$\lambda = 0.280$	$\lambda = 0.102$	$\lambda = 0.0518$	$\lambda = 0.0314$	$\lambda = 0.0211$	
$\lambda = 0.408$	$\lambda = 0.126$	$\lambda = 0.0604$	$\lambda = 0.0353$	$\lambda = 0.0231$	
MODE 1	MODE 2	MODE 3	MODE 4	MODE 5	

D.5. PLAQUES RECTANGULAIRES. PÉRIODE DU PREMIER MODE DE VIBRATION

La période du premier mode est donnée par :

$$T = \lambda \sqrt{\frac{p}{g} \frac{a^4}{E h^3}}$$

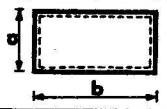
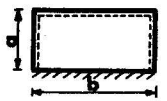
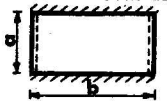
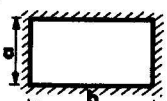
p = poids par unité de surface (t/m^2)

h = épaisseur de la plaque (m)

$g = 9,81 \text{ m/sec}^2$

E = module d'élasticité (t/m^2)

λ = coefficient déduit du tableau ci-dessous.

MODE D'APPUI	RAPPORT DES COTES b/a					
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
	1,090	1,509	1,744	1,879	1,962	2,18
	0,910	1,139	1,242	1,294	1,323	1,395
	0,743	0,859	0,903	0,925	0,936	0,962
	0,598	0,797	0,876	0,905	0,928	0,962

Une valeur approchée de λ est donnée par la formule :

$$\lambda = \frac{2,2}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

BIBLIOGRAPHIE

Pour approfondir les sujets développés dans cet ouvrage, le lecteur pourra consulter la bibliographie suivante:

- 1) CLOUGH R. W., PENZIEN J. *Dynamics of structures*. Mc Graw-Hill Book Company, 1975.
- 2) DESPEYROUX J. *Notre expérience du comportement des constructions soumises à un ébranlement sismique*. Introduction aux méthodes actuelles du génie sismique. Annales de l'I.T.B.T.P., février 1964.
- 3) MAURY J. F., GUILLOT V., SAGE P., HAUTCEUR M. *Glossaire de l'analyse des structures*. SOCOTEC, Département de l'Informatique, 1978.
- 4) NEWMARK N. M., ROSENBLUETH E. *Fundamentals of earthquake engineering*. Prentice-Hall, Inc. 1971.
- 5) *Règles parasismiques 1969 et annexes D.T.U.* Editions Eyrolles, 1982.

 Imprimerie BOUDIN — PARIS

Dépôt légal : mai 1982

N° d'Editeur : 3780

ALBIGÈS & COIN - Résistance des matériaux appliquée - (coll. U.T.I.-I.T.B.T.P.)

tome 1 : 592 p., 1982

tome 2 : 464 p., 1979

CHARON - La méthode de Cross et le calcul pratique des constructions hyperstatiques. Théorie et applications - 320 p., 1982

D.T.U. - Règles parasismiques 1969 et annexes - (Règles PS69)
288 p., 1982 (coll. U.T.I.)

FAUCHART - Initiation au calcul des structures. Béton et acier -
312 p., 1981 (coll. E.N.P.C.)

JALIL & ADER - Calcul pratique des structures - Exercices de résistance des matériaux avec leurs solutions -
272 p., 1979 (coll. U.T.I.)

LAROZE - Résistance des matériaux et structures :
(co-édition MASSON)

Tome I : Milieux continus solides. Plaques et coques -
228 p., 1980

Tome II : Théorie des poutres - 196 p., 1980

Tome III : Dynamique des structures. Contraintes et déformations d'origine thermique - 272 p., 1979

L'HERMITE - Flambage et stabilité (coll. U.T.I. - I.T.B.T.P.) :

- Le flambage élastique des pièces droites - 240 p., 1974

- Le flambage élasto-plastique des colonnes et systèmes de barres droites - 248 p., 1976

- flambage des arcs et des plaques - 264 p., 1976

MASSONNET & CESCOTTO - Mécanique des matériaux - 412 p., 1980

ROCKEY, EVANS, GRIFFITHS & NETHERCOT - Introduction à la méthode des éléments finis - 240 p., 1979