جامـعة غليزان
كلية العلـوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

محاضرات مقياس الاحصاء III (نظرية المعاينة)

موجهة لطلبة السنة الثانية شعبة علوم التسيير

الفصل الثالث : نظرية اختبار الفرضيات

من إعداد

د. حنصال أبوبكر

السـنة الجامعية: 2022-2023

فهرس المحاضرات

الفصل الثالث. نظرية اختبار الفرضيات

1.4. مفاهيم أساسية حول إختبار الفرضيات	
1.4. إختبارات الفروض الخاصة بمتوسط المجتمع	
1.4. إختبارات الفروض الخاصة بالنسبة	
5.3 تمارين مقترحة	

4. اختبار الفرضيات

تناولنا في المحور الثالث من هذه المطبوعة كيفية تقدير معالم المجتمع من خلال بيانات العينة وبعض خصائص المقدر الجيد؛ وبما أن الدارس يحتاج أحيانا في مرحلة ما من بحثه إلى اختبار فرضية أو أكثر بخصوص المجتمع المدروس. فارتئينا في هذا المحور الرابع تناول كيفية اختبار فرضيات موضوعة حول معالم مجتمع أو أكثر باعتبارها تشكل أحد المواضيع الأساسية للاستدلال الإحصائي، وهذا بغية الوصول إلى قرار بشأن معلمة المجتمع من خلال قبول او رفض تقديرها المعتمد على معطيات العينة المسحوبة من ذلك المجتمع، ففي غالب الأحيان يحاول الباحث اتخاذ قرار لمشكلة محددة بشأن خواص توزيع ما (متوسط او نسبة لعينة عشوائية تم سحبها من المجتمع) ، معتمدا على قرار احصائي لذا يتوجب عليه وضع فروض عن خواص المجتمع ، ومن هنا يختبر مدى صحة هذا الفرض؛ ومن أمثلة ذلك: اختبار فرضية بخصوص معدل الدخل في منطقة معينة، اختبار فرضية نسبة شفاء لدواء معين، ... حيث يتم ذلك بصياغة فرضية عن المجتمع المدروس (أو المجتمعات المدروسة) ومن ثم محاولة الحصول على دليل إحصائي ينفي أو يثبت هذه الفرضية وذلك من خلال بيانات عينة (أو أكثر) عشوائية بسيطة. أين تخص الفرضية أحد معالم المجتمع كالمتوسط، النسبة أو التباين، ونعتمد في إثباتها أو رفضها على خصائص إحصائية معاينة مختارة؛ من أجل ذلك يعتمد هذا الدرس، كما هو الحال بالنسبة لدرس التقدير، على درس المعاينة، أين سنتناول في متن هذا المحور مختلف هذه التفاصيل وكذا مراحل اختبارات الفروض بالاعتماد على العناصر التالية:

1.4. ضبط بعض المفاهيم الأساسية حول اختبارات الفروض

1.1.4. تعريف اختبارات الفروض

يعتبر اختبار الفروض أحد أساليب الاحصاء الاستدلالي الذي يستخدم فيه بيانات العينة المسحوبة من مجتمع الدراسة لاتخاذ قرارات أو اصدار أحكام حول هذا المجتمع، وعليه فإن اختبار الفرضيات الاحصائية هو اختبار صحة وصدقية القيمة (القيم) التي تأخذها المعلمة (المعلمات) التي تم تقديرها، وعادة ما تجرى الاختبارات حول قيمة محددة، أو حول النطاق (الفترة) التي وقعت ضمنها أو خارجها (موراي، جون، و ألو، 2004، ص.94).

2.1.4. تعريف الفرضية الاحصائية

نعرف بأنها عبارة عن ادعاء أو تخمين معين حول معلمة من معالم المجتمع، وهذا الفرض قابل لأن يكون صحيحا أو غير صحيح، ولا يمكن التأكد من ذلك إلا من خلال اختباره احصائيا (موراي، جون، و ألو، 2004، ص.94).

3.1.4. أنواع الفرضيات

يجب أن تكون الفرضيات متكاملة بحيث تشمل كل النتائج الممكنة وتبادلية بحيث تلغي احداهما الأخرى وتنقسم الى:

أ. الفرضية الصفرية أو فرضية العدم

وهي الفرضية الأساسية المراد اختبارها حول معلمة المجتمع التي نجري عليها الاختبار باستخدام بيانات العينة، والتي يرمز لها بالرمز H_0، والتي تشير إلى عدم وجود فرق بين معلمة المجتمع واحصاءة العينة المسحوبة منه (السقاف، 2020، ص.137).

ب. الفرضية البديلة

في اختبارات الفروض يتحتم وضع فرض آخر غير فرض العدم المراد اختباره والذي يطلق عليه اصطلاحا بالفرض البديل،

الذي سيتم قبوله في حالة رفض فرض العدم، وبالتالي يمكن القول بأنها هي الفرضية البديلة لفرضية العدم، ويتم قبولها عند رفض الفرضية الصفرية H_0 والتي يرمز لها بالرمز H_1 .

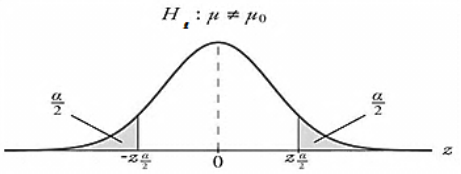
تجدر بنا الاشارة هنا بأن الفرض البديل هو الذي يحدد نوع الاختبار، حيث نميز بين ثلاثة أشكال من الاختبارات، الأول اختبار ثنائي أو اختبار من طرفين والثاني اختبار أحادي جهة اليمين والثالث اختبار أحادي جهة اليسار (السقاف، 2020، ص.138).

ج. الاختبار الثنائي:

في هذه الحالة الفرض البديل له طرفان واحد على اليمين والآخر على اليسار حيث نقبل فرضية العدم إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ونرفضH_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض H_0 وهي المنطقة المظللة، ويكتب كمايلي (موراي، جون، و ألو، 2004، ص.101):

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_0 : \mu \neq \mu_0$$

ويمكن تمثيله كما هو موضح في الشكل الموالي:



وتسمى المنطقة المحصورة بين ($z_{\alpha/2}$) و ($-z_{\alpha/2}$) بمنطقة القبول ($-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}$)؛ بينما تسمى المناطق المظللة ($z > z_{\alpha/2}$ و $z < -z_{\alpha/2}$) بمنطقتي الرفض؛ بينما تسمى $z_{\alpha/2}$ و $-z_{\alpha/2}$ بالقيم الحرجة.

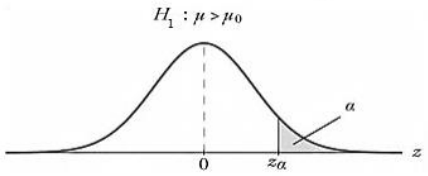
د. الاختبار أحادي الاتجاه جهة اليمين أو جهة اليسار:

ويكون في حالة اختبار من جهة واحدة، جهة اليمين أو جهة اليسار (موراي، جون، و ألو، 2004، ص.101):

- **ففي حالة اختبار من جهة اليمين فيصاغ الفرض كما يلي :**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_0 : \mu > \mu_0$$

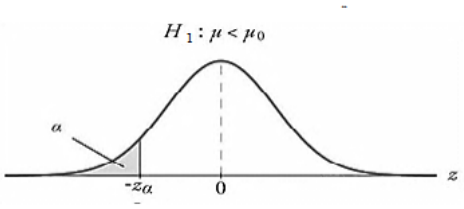
حيث أن منطقة القبول في هذه الحالة هي ($z < z_{\alpha}$)؛ كما هو موضح في الشكل الموالي:



- **ففي حالة اختبار من جهة اليسار فيصاغ الفرض كما يلي :**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_0 : \mu < \mu_0$$

حيث أن منطقة القبول في هذه الحالة هي ($z > -z_{\alpha/2}$)؛ كما هو موضح في الشكل الموالي:



4.1.4. أنواع الأخطاء الاحصائية عند اتخاذ القرار:

ان عملية اتخاذ أي قرار إحصائي تنطوي على أخطاء بنسب معينة، حيث أنه من المحتمل أن نرفض فرضية معينة في حين أنها صحيحة، والعكس صحيح، وعموما يمكن القول أنه هناك نوعان من الأخطاء الإحصائية وهي (السقاف،2020، ص.ص، 139.138):

ا-الخطأ من النوع الاول:

هو الخطأ الذي نقع فيه عندما نرفض فرضية العدم H_0 عندما تكون صحيحة ويرمز لاحتمال وقوع هذا الخطأ بالرمز αونسميه مستوى دلالة الاختبار أو مستوى معنوية الاختبار .

ب-الخطأ من النوع الثاني:

هو الخطأ الذي نقع فيه عندما نقبل الفرضية الصفرية بالرغم من عدم صحتها، ويرمز إلى احتمال هذا الخطأ بالرمز β ، حيث يمكن تحديد عدة مستويات لذلك ولكن جرت العادة على استخدام واعتماد مستويين وهما 5% و 1% كما هو موضح في الشكل أدناه:

الجدول.07 : يبين رموز احتمالات الوقوع في الخطأ من النوع الاول α والثاني β

القرار / الحالة	H_0 صحيحة	H_0 خاطئة
قبول H_0	قرار سليم	β
رفض H_0	α	قرار سليم

المصدر: علي أحمد السقاف، **الاحصاء الوصفي والاستدلالي**، المركز الديمقراطي العربي، برلين، ألمانيا، الطبعة الأولى، 2020، ص.139

علما بأن العلاقة بين α و β يمكن أن تفسر على النحو التالي:

- ✓ نقصان في أحدهما يزيد الأخرى
- ✓ زيادة حجم العينة n يقلل من احتمال الوقوع في كلا الخطأين

2.4. اختبارات الفروض حول الوسط الحسابي للمجتمع

يتناول هذا الاختبار متوسط المجتمع (μ)، مثل متوسط الدخل، متوسط وزن منتج معين، .. حيث يؤكد اختبار الوسط الحسابي فرضية مساواته لقيمة ما ممثلة بـ μ_0؛ للقيام بهذا الاختبار نسحب عينة عشوائية ثم نحسب قيمة متوسطها الحسابي $\overline{X}$ ثم نستخدم التوزيع الاحتمالي لـ $\overline{x}$ من أجل قياس مدى قرب أو بعد هذه القيمة عن μ_0؛ حيث سنتطرق في هذا العنصر الى كل من:

- ✓ الاختبار ثنائي الاتجاه حول الوسط الحسابي للمجتمع
- ✓ الاختبار أحادي الاتجاه حول الوسط الحسابي للمجتمع
- ✓ استخدام S كمقدر لتباين المجتمع في اختبار الوسط الحسابي للمجتمع
- ✓ اختبار الوسط الحسابي للمجتمع باستخدام توزيع t لستيودنت
- ✓

1.2.4. اختبار ثنائي الاتجاه حول الوسط الحسابي للمجتمع

سنعتمد المثال الموالي للقيام بعملية اختبار ثنائي الاتجاه حول الوسط الحسابي للمجتمع، والذي من خلاله سنتناول العناصر الأساسية لاجراء هذا الاختبار.

المثال.01 (صالح، 2006، ص.101)**:**

نريد اختبار فرضية حول الوسط الحسابي لدخل الطالب في السنة الأولى من تخرجه، ولتكن القيمة الافتراضية هي 15000دج كمتوسط للدخل الشهري؛ فللقيام بهذا الاختبار نحتاج إلى الخطوات التالية:

أ.1. تحديد الفرضيات؛
أ.2. تحديد قاعدة القرار؛
أ.3. حساب القيمة الجدولية للمتغيرة؛
أ.4. حساب القيمة الفعلية للمتغيرة؛
أ.5. اتخاذ القرار.

أ.1. تحديد الفرضيات (الصفرية والبديلة):

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

تسمى الفرضية H_0 **الفرضية الصفرية** أو فرضية العدم، ويؤدي الاختبار إما إلى رفضها ونكتب RH_0 وفي هذه الحالة نقبل **الفرضية البديلة** أو عدم رفضها ونكتب $\overline{R}H_0$. μ_0 هي القيمة الافتراضية لـ μ وهي في هذه الحالة 15000دج كمتوسط للدخل الشهري؛ وبالتالي يمكننا أن نكتب الفرضيات كما يلي:

$$H_0 : \mu = 15000$$
$$H_1 : \mu \neq 15000$$

هنا يجب التنويه على أنه عادة ما تكون قيمة μ_0 محددة بناءا على بيانات عينة عشوائية بسيطة $(\mu_0 = \overline{x})$، وفي هذه الحالة يمكن استخدام الخاصية $\overline{x}_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ لاجراء هذا الاختبار، حيث أنه تحت H_0 فإن : $\overline{x}_i \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$ مما يعني معلومية احتمال أن يكون $\overline{x}$ قريب إلى درجة ما من μ_0 فمثلا :

$$P(\mu_0 - 1.64(\sigma\overline{x}_i) \leq \overline{x} \leq \mu_0 + 1.64(\sigma\overline{x}_i)) = 0.90$$
$$P(\mu_0 - 1.96(\sigma\overline{x}_i) \leq \overline{x} \leq \mu_0 + 1.96(\sigma\overline{x}_i)) = 0.95$$
$$P(\mu_0 - 2.58(\sigma\overline{x}_i) \leq \overline{x} \leq \mu_0 + 2.58(\sigma\overline{x}_i)) = 0.99$$

وبصفة عامة نكتب:

$$P[\mu_0 - z_{1-\alpha/2}(\sigma\overline{x}_i) \leq \overline{x} \leq \mu_0 + z_{1-\alpha/2}(\sigma\overline{x}_i)] = 1-\alpha$$

أو حسب الكتابة الأكثر شيوعا:

$$P(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_m} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

حيث:

- $(\overline{x} - \mu_0)/\sigma\overline{x}_i$: (**متغيرة القرار**) هي المتغيرة المعيارية لـ $\overline{x}$ ونرمز لها بـ z_c، حيث $z \sim N(0, 1)$.
- $\sigma\overline{x}_i$ تحدد كما يلي:

$\sigma\overline{x}_i = \sigma/\sqrt{n}$ في حالة المعاينة بالإرجاع (أو $n \leq 0.05N$) و $\sigma\overline{x}_i = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ في الحالة المعاكسة.

- $1 - \alpha/2$: المساحة على يسار z .
- n : حجم العينة.

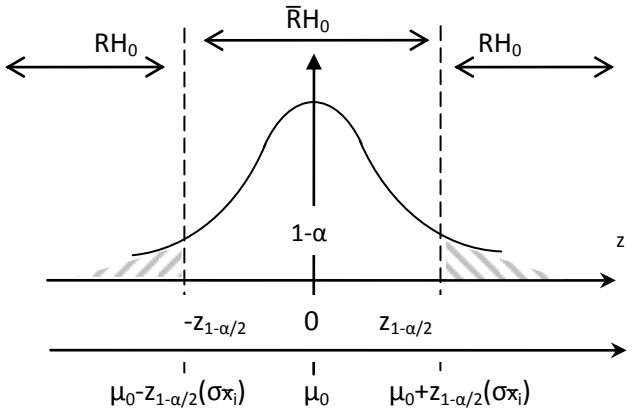
يمكن أن نرفض الفرضية الصفرية التي حدد على أساسها هذا المجال ونقبل بالتالي الفرضية البديلة.إذا كان $\overline{x}$ خارج المجال $1-\alpha$.

تسمى هذه (الخطة) قاعدة القرار.

أ.2. تحديد قاعدة القرار

تكتب قاعدة القرار في المثال الذي بين أيدينا، وهي قاعدة **اختبار ثنائي الاتجاه** كما يلي: (أنظر الشكل 1) ،

$$\begin{cases} RH_0 \ si \left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} \right| > z_{1-\alpha/2} \ . \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} RH_0 \ si \ z_c = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} \notin \left[- z_{1-\alpha/2};\ z_{1-\alpha/2} \right] . \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$



الشكل: منطقتي القبول والرفض في حالة قاعد القرار الثنائية

تتضمن هذه الخطة مخاطرة تتمثل في الوصول إلى قرار خاطىء:

فقد تكون الفرضية H_0 صحيحة بينما تقودنا قيمة $\overline{x}$ المحصلة إلى رفضها؛ وهو ما يسمى هذا **الخطأ من النوع الأول**، كما سبق وأن أشرنا اليه فيما سبق واحتماله α، ونكتب :

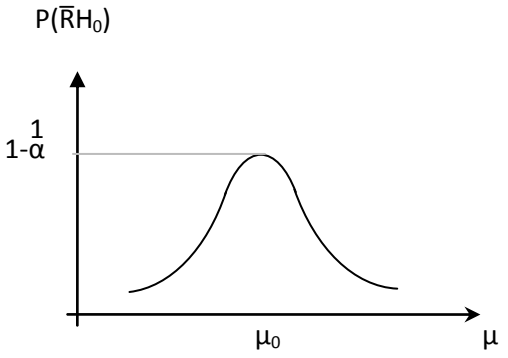
$$P(RH_0 / H_0) = \alpha$$

وقد تقودنا قيمة $\overline{x}$ إلى قبول H_0 فيما هي خاطئة، ويسمى هذا **الخطأ من النوع الثاني** واحتماله β وتساوي $(1- \alpha)$ ونكتب :

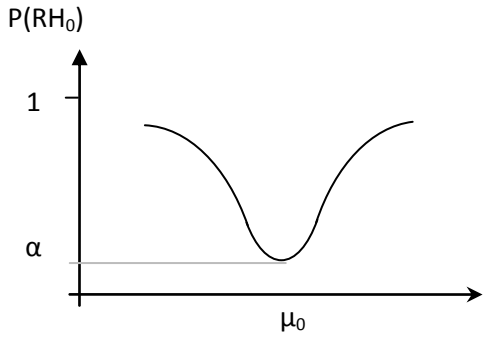
$$P(\overline{R}H_0 / H_1) = 1-\alpha$$

حيث يمكن تقليص احتمال أحد الخطأين على حساب الثاني، ولكن لا يمكن تقليص احتمال كلا الخطأين معا إلا بزيادة حجم العينة.

ويقيس احتمال رفض الفرضية الصفرية $P(RH_0)$ قوة الاختبار (أنظر الشكل 2) فيما يقيس احتمال قبولها $P(\overline{R}H_0)$ فعالية الاختبار (أنظر الشكل 2). ويتوقف كلا الاحتمالين على القيمة الحقيقية لـ μ .



الشكل (1) منحنى الفعالية



الشكل منحنى القوة (2)

أ.3. حساب القيمة الجدولية للمتغيرة؛

يرمز لها بـ z_t حيث، وهي المشار إليها في قاعدة القرار (الشكل الثاني)، وفي حالتنا (اختبار ثنائي بمستوى معنوية 5%) :

$$z_t = z_{1-\alpha/2} = z_{1-0.05/2} = z_{1-0.025} = z_{0.975}$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن قيمتها مساوية لـ: $z_{0.975} = 1.96$.

أ.4. حساب القيمة الفعلية للمتغيرة؛

يرمز لها ب z_c وهي المتغير المعيارية لـ $\overline{x}$ (أنظر قاعدة القرار الشكل الأول) :

$$z_c = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{15800 - 1500}{1500/\sqrt{100}} = 5.33$$

أ.5. اتخاذ القرار.

بمقارنة القيمة الجدولية والقيمة الفعلية للمتغيرة نقرر قبول أو رفض H_0 وذلك حسب قاعدة القرار؛

ففي حالتنا ومثالنا هذا سنرفض H_0 لأن القيمة الفعلية أكبر من القيمة الجدولية أي $z_c > z_t$ وبالتالي سنقبل H_1 أي أن متوسط دخل الخريج حديث التوظيف لا يساوي 15000دج.

2.2.4. الاختبار أحادي الاتجاه حول الوسط الحسابي للمجتمع

يتميز الاختبار الثنائي عن الأحادي في الفرضية البديلة التي هي عدم مساواة في الاختبار الثنائي وأكبر تماما أو أصغر تماما (حسب الحالة) في الاختبار الأحادي، وهذا يترتب عليه تغيير في قاعدة القرار.

ب.1. الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

بالرجوع إلى مثالنا السابق مع تغيير محدد هو أننا نريد اختبار ما إذا كان متوسط دخل الخريج مساو لـ 15000دج أو أكثر (اختبار من جهة اليمين) (السقاف، 2020، ص.140).

ب.1.1 **الفرضيات :**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

في هذه الحالة $\mu_0 = 15000$ لذلك نكتب :

$$H_0 : \mu = 15000$$
$$H_1 : \mu > 15000$$

ب2.1. **قاعدة القرار**:

$$\begin{cases} RH_0 \ si \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} > z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases} .$$

ب.3.1. **حساب z الجدولية:** (اختبار على اليمين بمستوى معنوية 5%) :

$$z_t = z_{1-\alpha} = z_{1-0.05} = z_{0.95}$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي القياس نجد أن: $z_{0.95} = 1.645$

ب.4.1. **حساب z الفعلية**:

$$z_c = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{15800-1500}{1500/\sqrt{100}} = 5.33$$

ب.5.1. **القرار**: نرفض H_0 لأن $z_c > z_t$ ونقبل H_1 أي أن متوسط دخل الخريج حديث التوظيف ليس 15000دج إنما هو أكبر من ذلك.

ب.2. الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار (السقاف، 2020، ص.141).

بالرجوع إلى مثالنا السابق مع افتراض أن متوسط العينة كان 14200دج ونريد أن نختبر فيما إذا كان متوسط الدخل مساوي لـ 15000دج أم أقل من ذلك

ب.1.2. **الفرضيات :**

$$H_0 : \mu = 15000$$
$$H_1 : \mu < 15000$$

ب.2.2. **قاعدة القرار:**

$$\begin{cases} RH_0 \ si \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} < -z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases} .$$

ب.3.2. **حساب z الجدولية**: (اختبار على اليسار بمستوى معنوية 5 %) :

$$z_t = -\ z_{1-\alpha} = -\ z_{1-0.05} = -\ z_{0.95} = -1.645$$

ب.4.2. **حساب z الفعلية:**

$$z_c = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{14200-1500}{1500/\sqrt{100}} = -5.33$$

ب.5.2. **القرار**:

نرفض H_0 لأن $z_c < z_t$ ونقبل H_1 أي أن متوسط دخل الخريج حديث التوظيف أقل من 15000دج .

3.2.4. استخدام S كمقدر لـ σ في اختبار الوسط الحسابي للمجتمع (السقاف، 2020، ص.142):

في مثالنا السابق افترضنا أن قيمة الانحراف المعيار للمجتمع σ معلوم، ولكن في الواقع غالبا ما يكون الانحراف المعياري للمجتمع مجهولا ونحتاج بالتالي إلى استخدام احصاءة الانحراف المعياري للعينة (S) عند حساب $\sigma_{\overline{x}_i}$ (أنظر درس التقدير)، حيث نعوض العبارة $\sigma_{\overline{x}_i} = \sigma/\sqrt{n}$

بـ: $\sigma_{\overline{x}} = \dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$ أو $\sigma_{\overline{x}} = \dfrac{S'}{\sqrt{n}}$

بالمحافظة دائما على مثالنا السابق نفترض أن الانحراف المعياري للدخل الشهري للطالب مجهول، لكن الانحراف المعياري للعينة المسحوبة مساو لـ S = 1600.

المطلوب: كيف يمكن اختبار ما إذا كان الدخل الشهري أقل من 15000دج؟

للقيام بهذا الاختبار سنعتمد نفس الخطوات السابقة أثناء قيمنا بالاختبار أحادي الاتجاه من اليسار فيما عدا عملية حساب zالفعلية التي سيكون هناك تغيير في طريقة حسابها، وكذا عملية اتخاذ القرار وذلك كما يلي:

أ.4. **حساب z الفعلية**:

$$z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{14200 - 1500}{1600/\sqrt{99}} = -4.97$$

أ.5. **القرار**:

نرفض H_0 لأن $z_c < z_t$ ونقبل H_1 أي أن متوسط دخل الخريج حديث التوظيف ليس 15000دج وإنما هو أقل من ذلك.

4.2.4. اختبار الوسط الحسابي للمجتمع باستخدام توزيع t لستيودنت (صالح، 2006، ص.104):

في حالة كانت مفردات العينة أقل من 30 أي أن $n< 30$ و كان σ (الانحراف المعياري للمجتمع) مجهولا، هنا لا يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي، وانما سنعتمد على توزيع t لستيودنت ويصبح بذلك لدينا :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$$

وتحت H_0 ($\mu = \mu_0$) :

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$$

يمكن إذا استخدام توزيع ستيودنت (بشرط أن يكون توزيع المجتمع طبيعيا أو على الأقل جرسي الشكل) .

وتتغير قاعدة القرار تبعا لهذا التغيير فتكتب في حالة الاختبار الثنائي كما يلي:

$$\begin{cases} RH_0 \ si \left| \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} \right| > t_{n-1;\, 1-\alpha/2} \\ \bar{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases} .$$

في حالة اختبار من اليمين:

$$\begin{cases} RH_0 \ si \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} > t_{n-1,\, 1-\alpha} \\ \bar{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$

في حالة اختبار من اليسار:

$$\begin{cases} RH_0 \ si \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} < -t_{n-1;\, 1-\alpha} \\ \bar{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$

مثال:

ادعى أحد المسؤولين في بنك خاص أن معدل فترة الانتظار في كل شباك لا تزيد عن 15 دقيقة، وبهدف اختبار هذا الادعاء تم دراسة عينة مكونة من 10 شبابيك لخدمة الزبائن على مستوى هذه المؤسسة البنكية فوجد أن معدل الانتظار هو 5.16 دقيقة بانحراف معياري مساو لـ 4 دقائق، على فرض أن مدة الانتظار لكل الشبابيك في البنك تتبع التوزيع الطبيعي.

المطلوب: اختبر ادعاء البنك عند مستوى معنوية 5%

الحل:

أ.1. **الفرضيات :**

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu > 15$$

أ.2. **قاعدة القرار:**

بما أن العينة مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه مجهول، وحجم العينة صغير n=10 وبالتالي لاجراء هذا الاختبار سنعتمد على توزيع t لستيودنت باعتماد قاعدة القرار التالية:

$$\begin{cases} RH_0 \ si \ \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} > t_{n-1,\,1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$

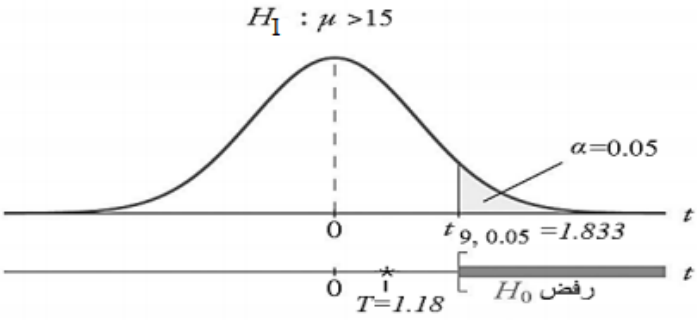
أ.3. **حساب t الجدولية**: (اختبار على اليمين بمستوى معنوية 5 %) :

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{n-1;\,\alpha} = t_{9;0.05} = 1.833$$

أ.4. **حساب t الفعلية:**

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{16.5 \quad -15}{4 \quad /\sqrt{10}} = \ 1.18$$

يمكننا تمثيل منطقة القبول والرفض بيانيا من خلال الشكل الموالي :



أ.5. **القرار**:

بما أن قيمة t_c المحسوبة وقعت في منطقة القبول أي أن $t_c<t_t$ أي أن القرار المتخذ هو قبول فرضية العدم، أي أن ادعاء مسؤول البنك بأن متوسط فترة انتظار العملاء على الشبابيك لا يتعدى 15 دقيقة صحيح عند مستوى معنوية 5%.

3.4. اختبارات الفروض حول النسبة

يتعلق هذا الاختبار بنسبة مفردات المجتمع التي تتصف بخاصية ما (p)، حيث يؤكد الاختبار أو ينفي صحة فرضية معينة بخصوص قيمة p يرمز للقيمة الافتراضية بـ p_0 وتكتب الفرضية كما يلي (السقاف، 2020، ص.143):

$$H_0 : p = p_0$$

للقيام بهذا الاختبار نستخدم خصائص p' النسبة في العينة (أنظر توزيع المعاينة للنسبة : نظرية 6).

$$E(p') = \mu_{p'} = p \qquad ; \qquad \sigma^2{}_{p'} = \frac{pq}{n}$$

عند $n \geq 30$: $p' \approx N(p, \sigma_{p'})$ (نظرية موافر- لابلاس)

استنادا إلى هذه الخصائص وتحت H0 : $p' \approx N\left(p_0 ; \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$

و من ثم يمكن تحديد قاعدة القرار بحسب طبيعة الاختبار كما يلي:

في حالة الاختبار الثنائي:

$$\begin{cases} RH_0 \ si \left| \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$

في حالة اختبار من اليمين:

$$\begin{cases} RH_0 \ si \ \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} > z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$

في حالة اختبار من اليسار:

$$\begin{cases} RH_0 \ si \ \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} < -z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$

مثال:

تقدر الدوائر الرسمية نسبة المتخرجين الجامعيين الذين يحصلون على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم بـ 70% ، وجدت دراسة أجريت على عينة من 900 طالب أن نسبة الحصول على عمل في السنة الأولى التي تلت تخرج هؤلاء الطلبة هي 67%.

المطلوب: قم باختبار ما إذا كانت النسبة الرسمية صحيحة أم مبالغ فيها، وذلك عند مستوى معنوية 5%.

للقيام بهذا الاختبار سنتبع الخطوات التالية:

أ.1. **الفرضيات :**

$H_0 : p = 0.70$

$H_1 : p < 0.70$

أ.2. **قاعدة القرار:**

$$\begin{cases} RH_0 \ si \ \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} < -z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$

أ.3. **حساب z_t الجدولية**: (اختبار على اليسار بمستوى معنوية 5 %) :

$\mathbf{Z_t} = -Z_{1-0.05} = -1.64$

أ.4. **حساب Z_c الفعلية:**

$$\mathbf{Z_c} = \frac{p'-p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{0.67-0.7}{\sqrt{0.7(0.3)/900}} \cong -196.34 < -z_{1-0.05} = -1.64$$

أ.5. **القرار:**

نرفض الفرضية H_0 لأن $z_c < z_t$ ونقبل H_1 أي أن نسبة المتخرجين الجامعيين الذين يحصلون على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم أقل من - 70% .

4.4. اختبارات المقارنة بين متوسطي مجنمعين (اختبار تساوي متوسطي مجتمعين)

يتناول هذا الاختبار مقارنة بين مجتمعين من خلال الوسط الحسابي أي أن الغرض من الاختبار هو تأكيد أو نفي تساوي متوسطي مجتمعين من خلال عينتين عشوائيتين بسيطتين مستقلتين، أين سنركز في هذا العنصر على متغيرة القرار، إذ من السهل على الطالب استنتاج كيفية إتمام الخطوات الأخرى على ضوء ما سبق؛ حيث نفرق هنا بين حالتين الأولى عندما يكون تباين المجتمعين معلومين والثانية عندما يكون تبيان المجتمعين مجهولين. وذلك فيما يلي:

1.4.4. اختبارات المقارنة بين متوسطي مجنمعين عندما يكون تباينهما معلوم (السقاف، 2020، ص.150)

إذا كان $\overline{x}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 تم سحبها من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي μ_1 وتباينه σ_1^2 معلوم، وكان $\overline{x}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 تم سحبها على التوالي من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي μ_2 وتباينه σ_2^2 معلوم أيضا.

اذا أردنا اختبار الفرضية الصفرية التالية :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \overline{x}_1 - \overline{x}_2$$

مقابل الفرضية البديلة حسب طبيعة الاختبار ثنائي أم أحادي جهة اليمين أو اليسار كما يلي:

- ففي **حالة الاختبار الثنائي** ($H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \overline{x}_1 - \overline{x}_2$) فاننا نرفض فرضية العدم H_0 عند مستوى دلالة α اذا كانت ($z > z_{\alpha/2}$ أو $z < -z_{\alpha/2}$).
- وفي **حالة الاختبار أحادي جهة اليمين** ($H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \overline{x}_1 - \overline{x}_2$) فاننا نرفض فرضية العدم H_0 عند مستوى دلالة α اذا كانت ($z > z_{1-\alpha}$).
- أما في **حالة الاختبار أحادي جهة اليسار** ($H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \overline{x}_1 - \overline{x}_2$) فاننا نرفض فرضية العدم H_0 عند مستوى دلالة α اذا كانت ($z < -z_{1-\alpha}$).

مع العلم أن متغيرة القرار تكتب بالشكل التالي:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

ملاحظة :

عند القيام باختبارات المقارنة بين متوسطي مجنمعين يكون تباينهما معلوم فاننا نعرف حالتين هما:

- في حالة كان المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا فان متغيرة القرار تكتب كما يلي:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0.1)$$

- في حالة العينتين المسحوبتين من مجتمعين ما تكون مفرداتها أكبر من أو تساوي 30 ($n_1 , n_2 \geq 30$)، فان متغيرة القرار تكتب كما يلي:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx N(0,1)$$

مثال :

اذا كانت لدينا نتائج عينتين عشوائيتين مستقلتين مسحوبتين من منطقتين لمقارنة متوسط عمر الناخب فيهما حيث :

$$\overline{x}_{1=} 40 ; \overline{x}_{2=} 34 ; \sigma_1^2 =84 ; \sigma_2^2 =27 ; n_1 = 120 ; n_2 = 90$$

المطلوب :

اختبر الفرضية التي مفادها بأن متوسط عمر الناخب في المنطقة الأولى يساوي متوسط عمر الناخب في المنطقة الثانية بمستوى معنوية 5% مقابل الفرض البديل على أنهما غير متساويين.

الحل :

أ.1. الفرضيات:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \overline{x}_1 - \overline{x}_2$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \overline{x}_1 - \overline{x}_2$$

أ.2. الاحصائية المحسوبة Z_C تحسب كما يلي:

$$Z_C = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

بالتعويض نجد أن قيمة الاحصائية المحسوبة Z_C تساوي القيمة 6 أي $Z_C = 6$

أ.3. حساب القيمة الجدولية للاحصاءة z_t

$$z_t = z_{1-\alpha/2} = z_{1-0.05/2} = z_{1-0.025} = z_{0.975}$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن قيمتها مساوية لـ: $z_{0.975} = 1.96$.

أ.4. المقارنة والقرار :

بما أن قيمة الإحصائية $Z_C = 6$ تقع في منطقة الرفض لأن قيمة $z_c > 1.96$ وهو ما يقودنا الى رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة أي أن متوسط عمر الناخب في المنطقة الأولى لا يساوي متوسط عمر الناخب في المنطقة الثانية بمستوى معنوية 5%.

2.4.4. اختبارات المقارنة بين متوسطي مجتمعين عندما يكون تباينهما مجهول

عندما يكون لدينا مجتمعين احصائيين غير معلومي التباين (تباينهما مجهول) ولكن توزيعها التكراري من النوع الطبيعي أو عندما يكون حجم العينيتن المأخوذتين من هذين المجتمعين صغير (عندما تكون مفرداتها أقل تماما من 30 $(n_1 , n_2 < 30)$)؛ وأردنا اختبار الفرضية الصفرية التالية :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \overline{x}_1 - \overline{x}_2$$

مقابل الفرضية البديلة حسب طبيعة الاختبار ثنائي أم أحادي جهة اليمين أو اليسار كما يلي:

- ففي **حالة الاختبار الثنائي** ($H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \overline{x}_1 - \overline{x}_2$) فاننا نرفض فرضية العدم H_0 عند مستوى دلالة α اذا كانت ($T > t_{(\alpha/2,\ n1+n2-2)}$ أو $T < -t_{(\alpha/2,\ n1+n2-2)}$).
- وفي **حالة الاختبار أحادي جهة اليمين** ($H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \overline{x}_1 - \overline{x}_2$) فاننا نرفض فرضية العدم H_0 عند مستوى دلالة α اذا كانت ($T > t_{(\alpha,\ n1+n2-2)}$).
- أما في **حالة الاختبار أحادي جهة اليسار** ($H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \overline{x}_1 - \overline{x}_2$) فاننا نرفض فرضية العدم H_0 عند مستوى دلالة α اذا كانت ($T < -t_{(\alpha/2,\ n1+n2-2)}$).

مع العلم أن متغيرة القرار تكتب بالشكل التالي:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2_{\overline{x}1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{\overline{x}2}}{n_2}}}$$

ملاحظة :

عند القيام باختبارات المقارنة بين متوسطي مجنمعين يكون تباينهما مجهول فاننا نعرف حالتين هما:

- في حالة كان المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا بتباينين متساويين فان متغيرة القرار تكتب كما يلي (السقاف، 2020، ص.152):

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

- في حالة كان مجتمعين ما مفردتيهما أكبر أو تساوي 30، ($n_1 , n_2 \geq 30$) فان متغيرة القرار تكتب كما يلي:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \approx N(0,1)$$

مثال:

نسحب من مجتمعين طبيعيين متساويي التباين عينتين حجم الأولى 18 وحجم الثانية 21. ووجدنا النتائج التالية:

$$\overline{X}_1 = 81,\ \overline{X}_2 = 76,\ S^2_1 = 9,\ S^2_2 = 8.$$

المطلوب:

أ.1. القيام باختبار تساوي متوسطي المجتمعين بمستوى معنوية 5 % .

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \overline{x}_1 - \overline{x}_2$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \overline{x}_1 - \overline{x}_2$$

أ.2. الاحصائية المحسوبة T_C تحسب كما يلي:

$$Tc = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{81 - 76}{\sqrt{\frac{18(9) + 21(8)}{18 + 21 - 2}\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{21}\right)}} \cong 5.43$$

اذا بالتعويض في جملة المعادلة السابقة نجد نجد أن قيمة الاحصائية المحسوبة T_C تساوي القيمة 5.43

أ.3. حساب القيمة الجدولية للاحصاءة T_t

ومن جدول التوزيع الاحصائي لستيودنت نجد أن قيمتها مساوية لـ: $t_{0.975;37} \cong 2.336 < 5.43$

أ.4. المقارنة والقرار :

بما أن قيمة الإحصائية $T_C = 5.43$ تقع في منطقة الرفض لأن قيمة $T_t = 2.336$ وهو ما يقودنا الى رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة أي أن متوسطي المجتمعين غير متساويين عند مستوى معنوية 5%.

5.4. تمارين مقترحة:

التمرين 1.

في أحد المصانع المنتجة لنوع معين من المكاتب، تبين أن الإنتاج الأسبوعي يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 200 وحدة وبانحراف معياري قدره 16 وحدة. وعند أخذ عينة قدرها إنتاج 50 أسبوع، اتضح أن متوسط الإنتاج الأسبوعي هو 203.5 مكتب.

المطلوب:

عند مستوى معنوية 5% اختبر الفرض القائل بأن متوسط المجتمع يساوي 200 وحدة.

التمرين 2.

في حضانة للأطفال تدعى المشرفة أن متوسط وزن الأطفال الذين تتراوح أعمارهم بين (3.5؛ 4.5) سنوات في الحضانة هو 16 كغ بانحراف معياري نصف كغ؛ وبغرض اختبار صحة ادعاء المشرفة أخذت عينة عشوائية من 36 طفلا وتم اختبارها فوجد أن متوسط أوزان الأطفال خلال هذه المرحلة العمرية في العينة 15.8 كغ.

المطلوب:

على فرض أن مجتمع أوزان االطفال يتبع التوزيع الطبيعي، هل يمكن تأييد ادعاء المشرفة عند مستوى معنوية 1%.

التمرين 3.

في دراسة قام بها أحد البنوك وجد أن عملاءه يستخدمون في المتوسط البطاقات التي يصدرها 10 مرات في الشهر، ورغبة من البنك في زيادة استعمال عملائه لتلك البطاقات، طرح في شهر الحق جوائز يمكن أن يربحها مستعملوا هذه البطاقات؛ فأخذت عينة عشوائية من الزبائن مكونة من 25 شخصا حاملا للبطاقات فوجد أنهم استخدموا البطاقات في ذلك الشهر 12 مرة في المتوسط وذلك بانحراف معياري قدره 3 .

المطلوب:

هل تعطينا هذه البيانات مبررا للقول بأن استعمال البطاقات قد ازداد خلال ذلك الشهر مستخدما في ذلك مستوى عند مستوى معنوية مساو لـ 5%

التمرين 4.

تخضع أعداد حبات التفاح على شجرة التفاح في بستان كبير لتوزيع طبيعي وسطه 150 حبة، بدأ مالك البستان استعمال نوع جديد من السماد، وأراد ان يختبر ما اذا كان هناك تحسن في الإنتاج ، تبعا لذلك أخذ عينة مكونة من 64شجرة، فوجد أن الوسط الحسابي لأعداد الحبات في العينة 156 بانحراف معياري 12 حبة.

المطلوب:

هل تشير هذه البيانات الى زيادة في تحسن الإنتاج وذلك باعتماد مستوى معنوية مساو لـ 5% ؟

التمرين 5.

إذا اختيرت عينة عشوائية تتألف من 60 طالب من جامعة وطنية فوجد أن متوسط ذكائهم يقدر بـ 69 درجة وبتباين قدره 230 درجة، وتم كذلك اختيار عينة عشوائية أخرى من 85 طالب من جامعة أجنبية فوجد أن متوسط ذكائهم يقدر بـ 84 درجة بتباين قدره 215 درجة.

المطلوب:

اختبر الفرض القائل بأن متوسط ذكاء طالب الجامعة الوطنية أقل من متوسط ذكاء طالب الجامعة الأجنبية وذلك عند مستوى معنوية مساو لـ 5%.

التمرين 6.

من بين 200 شخص وجد أن 160 منهم يستخدمون نوع محدد من منتجات التنظيف، اختبر الفرض القائل بأن نسبة مستخدمي هذا المنتج لا يقل عن 85%، وذلك عند مستوى معنوية مساو لـ 5%.