جامعة غليزان

كلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات مقياس الاحصاء III (نظرية المعاينة)

موجهة لطلبة السنة الثانية شعبة علوم التسيير

الفصل الثاني : نظرية التقدير

من إعداد

د. حنصال أبوبكر

السنة الجامعية: 2022-2023

فهرس المحاضرات

الفصل الثاني. نظرية التقدير

3. نظرية التقدير

تطرقنا في المحور السابق من خلال مجموعة من النظريات العلاقة الرياضية بين معالم العينة والمعالم المناظرة لها في المجتمع مثل المتوسط، التباين، النسبة...كما درسنا العلاقة بين شكل توزيع المجتمع وشكل التوزيع الاحتمالي لمعالم العينة. تظهر هذه العلاقات كتوصيف لخصائص العينة ومعالمها ولكنها تستخدم أكثر لتقدير خصائص ومعالم المجتمع محل الدراسة،

فالتقدير يمثل لنا تلك الأداة التي تسمح لنا بإجراء استدلالات حول معالم المجتمع انطلاقا من عينة مسحوبة منه، هذا الاستدلال لا يصح إلا في ظل شروط محددة، تتعلق أساسا بفرضيات تتمحور حول طبيعة بيانات المجتمع والعينة لذا سنتطرق في هذا المحور الى أهم المفاهيم الاساسية المتعلقة بالتقدير ثم نتناول مختلف مجالات الثقة للمعالم الاحصائية، حيث سنتناول كل هذا بالتفصيل فيما يلي:

1.3. مفاهيم أساسية

1.1.3. مفهوم التقدير (السقاف، 2020، ص.115):

المقصود بالتقدير Estimation تقدير معالم المجتمع أو (التوزيع الاحتمالي) والتي غالبا ما تكون مجهولة ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها من خلال معطيات العينة، ومثال ذلك تقدير متوسط دخل السكان في رقعة جغرافية ما أو تقدير متوسط عمر فئة معينة من المجتمع...الخ، عموما نميز بين نوعين من التقدير، الاول يسمى بالتقدير النقطي والثاني يسمى بالتقدير بمجال. وتفصيل هذا فيما يلي (السقاف، 2020، ص.ص، 116.115):

ا-حالة التقدير النقطي:

نعتمد على هذا النوع من التقدير عندما نحصل على قيمة واحدة من العينة كاحصاءة الوسط الحسابي وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير للوسط الحسابي للمجتمع التي تكون مجهولة القيمة ومحل بحث من طرف الباحث، فمثلا لو أخذنا متوسط الدخل الشهري لعينة من الأسر في مدينة ما، فنكون قد تحصلنا على تقدير بنقطة لمتوسط دخل جميع الأسر في هذه المدينة.

ب-حالة التقدير بمجال:

أما في حالة التقدير وفق مجال فنتحصل على مجال معرف بحدين (حد أدنى وحد أعلى)، حيث نتحصل عليهما من بيانات العينة المسحوبة فمثالا إذا قدرنا الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح ما بين 34 و46 سنة أي يتراوح بين 34 سنة كحد أدنى و46 سنة كحد أعلى، هنا نكون قد حصلنا على تقدير وفق مجال للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع ويحتوي المجال على أكثر من قيمة بل قد يكون غير نهائي وغير محدود غالبا، ويسمى التقدير بمجال الثقة ايضا لأن هذه الفترات تعتمد في تكوينها الاحصائي على درجات ثقة أو مستويات ثقة معينة مثل 95% أو 99%.

2.1.3. بعض خصائص المقدر:

لتقدير معلمة من معالم مجتمع محل دراسة، نحتاج إلى اختيار الإحصائية المناسبة في العينة لتقدير هذه المعلمة؛ وغالبا ما تكون المعلمة المناظرة في العينة هي أحسن مقدر، كأن نقدر متوسط المجتمع μ من خلال متوسط العينة $\mu_{\bar{x}i}$. تسمى الإحصائية المستخدمة في التقدير **بالمقدر**؛ عموما هناك عديد الخصائص للحكم على جودة الإحصائية في العينة المناظرة للمعلمة:

أ. المقدر غير المتحيز

نقول عن إحصائية ما بأنها مقدر غير متحيز Sans biais لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع، أي أن مقدار الخطأ في التقدير يساوي صفرا وبعبارة رياضية نجد أن شرط عدم الانحياز هو $E(\hat{\theta}) = \theta$ ، حيث يعتبر شرط عدم التحيز أهم شروط التقديرات الوسيطية (السقاف، 2020، ص.116).

مثال:

نقول عن متوسط العينة $\bar{X}$ أنه مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ لأن $E(\bar{X}) = \mu$. في المقابل نسمي الإحصائية S^2 في معاينة بالإرجاع أنها مقدر متحيز لـ σ^2 لأن:

$E(S^2) = \sigma^2 (n-1)/n \neq \sigma^2$ ، بينما تعتبر الاحصائية $\hat{S}^2 = S^2n/(n-1)$ مقدرا غير متحيز في معاينة بالإرجاع.

ب. الكفاءة

تتعلق كفاءة (Efficacité) مقدر ما بمقدار التباين لتوزيع المعاينة للإحصائية، فإذا كان لمقدرين (إحصائيتين) نفس المتوسط نقول عن المقدر ذو توزيع المعاينة الأقل تباينا أنه الأكثر كفاءة، أي أنه اذا كان لدينا أكثر من مقدر لمعلمة معينة فنقول أن المقدر الأكفأ هو المقدر الذي له أقل تباين (تومي، 2011، ص.ص، 24.22).

مثال:

لكل من توزيعي المعاينة للمتوسط والوسيط نفس المتوسط هو متوسط المجتمع μ ، لكن يعتبر المتوسط $\bar{X}$ مقدرا أكثر كفاءة لمتوسط المجتمع μ من الوسيط لأن تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $V(\bar{X}) = \sigma^2/n$ أقل من تباين توزيع المعاينة للوسيط :

$$V(méd) = \sigma^2\pi/2n = (\sigma^2/n)\,(3.14159/2) \quad > \quad \sigma^2/n.$$

من البديهي أن استخدام مقدرات فعالة وغير متحيزة هو الأفضل، إلا أنه قد يلجأ لمقدرات أخرى لسهولة الحصول عليها.

ج. التقارب convergeance

نقول عن مقدر أنه متقارب إذا كان يؤول إلى قيمة المعلمة المقدرة عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية (السقاف، 2020، ص.116).

مثال: يعتبر متوسط العينة مقدرا متقاربا لمتوسط المجتمع لأن (السقاف، 2020، ص.116):

$$E(\bar{X}) = \mu \quad , \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0.$$

3.1.3. طرق التقدير

أ. التقدير النقطي والتقدير بمجال (صالح، 2006، ص.92).

قد نحتاج إلى تقدير لمعلمة مجتمع بقيمة واحدة ونقول عن هذا التقدير أنه **تقدير نقطي**، وأحيانا أخرى نحتاج إلى تقدير معلمة المجتمع بنقطتين يحددان مجال لقيمة المعلمة ونقول عن هذا النوع من التقدير أنه **تقدير بمجال**.

مثال.01 :

إذا قدرنا دخل الأسرة في منطقة ما بـ 18000 دج، نكون قد قدرنا دخل الأسرة تقديرا نقطيا. ويكون تقديرنا بمجال إذا قلنا مثلا أن الدخل يساوي 18000 ± 2000 أي أنه يتراوح بين 16000 و20000دج.

ب. درجة التأكد

لكي يكون التقدير علميا ينبغي تقييم احتمال أن تكون المعلمة تنتمي فعلا إلى المجال المحدد، لذلك نلحق بالمجال ما يسمى بدرجة أو مستوى الثقة، ويرمز له بـ p. والاحتمال المعاكس يسمى باحتمال الخطأ ويرمز له ب α ، ويسمى أيضا بـ "مستوى المعنوية".

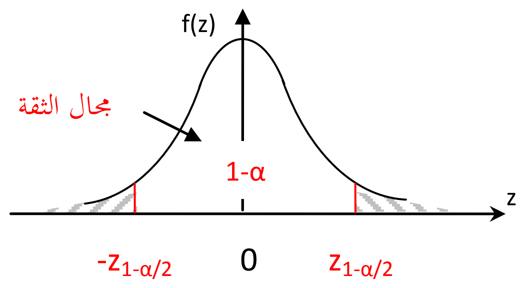
مثال.02:

دخل الأسرة في المنطقة (أ) ينتمي إلى المجال [16000، 20000] بمستوى معنوية 5 % أي بمستوى ثقة 95 % . وتسمي الحدود 16000 و20000 **بحدود الثقة**.

ج. تعيين حدود مجال الثقة

تحدد حدود الثقة من خلال معاملات الثقة التي بدورها تحدد من خلال مستوى المعنوية (مستوى الثقة). ففي حالة استخدام التوزيع الطبيعي للتقدير تكون القيمتين ± 1.96 معاملات الثقة من أجل مستوى ثقة 95% بينما القيمتين ±2.58 تمثلان معاملات الثقة من أجل مستوى ثقة 99 % .

الشكل.11: مجال الثقة للتوزيع الطبيعي



المصدر: بوعبد الله صالح؛ **محاضرات الإحصاء الرياضي**، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة المسيلة، الجزائر، السنة الجامعية 2005، 2006، ص.92

مثال.03:

ليكن μ_s وσ_s متوسط وانحراف معياري توزيع المعاينة لإحصائية ما s حيث $\mu = \mu_s$. إذا كان توزيع المعاينة لـ s توزيعا طبيعيا (كما هو الحال بالنسبة لأغلب الإحصائيات عندما $(n \geq 30)$) فإننا نقدر مثلا وبالنظر إلى توزيع s أن:

القيمتين $\mu_s \pm 1.96\sigma_s$ تمثلان **حدود الثقة** بـ 95 %، و $\mu_s \pm 2.58\sigma_s$ حدود الثقة بـ 99 %.

في حالة التوزيع الطبيعي يرمز لحدود الثقة ب Z_c أو $Z_{1-\alpha/2}$ (أنظر الرسم أعلاه).

2.3. فترة الثقة للمتوسط

1.2.3. حالة المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين معلوم:

نستخدم التوزيع الطبيعي لتحديد مجال الثقة في هذه الحالة إذا علمنا أن المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي، و/أو في حالة العينة الممتدة $(n \geq 30)$ يمكن كذلك الاستفادة من نظرية النهاية المركزية (التي تخص في الحقيقة توزيع مجموع قيم العينة -في حالة كون العينة كبيرة بما فيه الكفاية- وليس المتوسط.) أن $\bar{X}$ تتبع التوزيع الطبيعي.
وبالتالي تكتب حدود مجال الثقة كما يلي (السقاف، 2020، ص.119):

$$IC\mu = \bar{X} \pm z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ونستخدم الصيغة أدناه إذا كان المجتمع محدود (ذا حجم N) والمعاينة نفادية كالآتي:

$$IC\mu = \bar{X} \pm z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

2.2.3. حالة المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول (صالح، 2006، ص.93):

غالبا ما يكون الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهولا، ولذلك نعوض σ في الصيغ السابقة بالمقدر S أو S'.
في حالة كان تباين المجتمع σ مجهول تكتب حدود مجال الثقة بالاستعانة باحصاءة تباين المعاينة وتكتب كما يلي:

$$IC\mu = \bar{X} \pm z_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} \quad \text{أو} \quad IC\mu = \bar{X} \pm z_c \frac{S'}{\sqrt{n}}$$

الجدول الآتي يبين قيم z_c التي تمثل حدود مجال الثقة بحسب مستوى الثقة :

الجدول.04 : قيم z_c لحدود مجال الثقة

مستوى الثقة 1-α	0.99	0.98	0.95	0.90	0.8	0.5
مستوى المعنوية α	0.01	0.02	0.05	0.10	0.2	0.5
1- α/2	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75
$Z_{1-\alpha/2}$	82.5	2.326	1.96	1.645	1.282	0.674

المصدر: من اعداد الباحث بالاعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري

مثال.01 :
نقدر أن μ يوجد داخل المجال $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}}$ بمستوى ثقة 95% (0.95) أي بمستوى معنوية 5 % (0.05)، وداخل المجال $\bar{X} \pm 2.\boldsymbol{58}\sigma_{\bar{X}}$ بمستوى ثقة 99% أي بمستوى معنوية 0.01 ...الخ.

3.2.3. تقدير فترة الثقة للمتوسط باستخدام التوزيع t :

في حالة العينة الصغيرة $(n < 30)$ و σ مجهول نستخدم توزيع ستيودنت لتحديد مجالات الثقة لـ μ. مثلا القيم $-t_{0.975}$ ؛ $t_{0.975}$ تحد 95 % من المساحة تحت المنحنى ونقول أن $t_{0.975}$; $-t_{0.975}$ تمثل القيم الحرجة أو معاملات الثقة عند مستوى ثقة 95 % ونكتب (السقاف، 2020، ص.122):

$$\textbf{IC}\mu= \quad -t_{0.975} < \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} < t_{0.975}$$

ومنه نستخلص مجال الثقة لـ μ كما يلي:

$$\textbf{IC}\mu= \quad \bar{X} - t_{0.975}\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{0.975}\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

يمكننا تلخيص الحالات السابقة لبناء فترة الثقة من خلال الجدول الثالثي:

الجدول.05: فترة الثقة حسب معلومية التباين والتوزيع الاحصائي

توزيع المجتمع	تباين المجتمع	حجم العينة n	الانحراف المعياري	الوسط الحسابي للمعاينة
المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا	معلوم	n≥30 ; n<30	σ/√n	N~ (μ ; σ/√n)
	مجهول	n≥30	S’/√n	N~ (μ ; S’/√n)
		n<30	S’/√n	$t_{\alpha;\, n-1}$
المجتمع مجهول التوزيع الاحصائي	معلوم	n≥30	σ/√n	N~ (μ ; σ/√n)
	مجهول	n≥100	S’/√n	N~ (μ ; S’/√n)

المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على العلاقات الواردة في النظريات السابقة

4.2.3. أمثلة:

مثال.01:

اذا كان لدينا مجتمع موزعا توزيعا طبيعيا، بانحراف معياري قدره 10و σ = سحبت منه عينة عشوائية حجمها 24 متوسطها مساو لـ : $\bar{X} = 56$.

المطلوب:

بمستوى ثقة مساو لـ 95%، قم بتقدير الوسط الحسابي للمجتمع μ

حل المثال.01:

لدينا مستوى الثقة: $1-\alpha = 95\%$

مستوى الخطأ او المعنوية : 5%

ومنه: $Z_{1-\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع سنستعين بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} - Z1-\alpha\, 2 * \sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + Z1-\alpha\, 2 * \sigma/\sqrt{n}$$

بالتعويض في العلاقة أعلاه نجد:

$$56 - 1.96 * 10/\sqrt{24} < \mu < 56 + 1.96 * 10/\sqrt{24}$$

$$51.99916 < \mu < 60.00083$$

$$\textbf{IC}\mu = [56 \mp 10/\sqrt{24} * 1.96]$$

أي أنه عند مستوى ثقة مقدارها 95 % ستكون القيمة المقدرة للوسط الحسابي للمجتمع محصورة في المجال:

[51.99916 ؛60.00083]

مثال.02:

اذا كان لدينا مجتمع وسحبت منه عينة عشوائية حجمها 81 و متوسطها مساو لـ : $\bar{X} = 73$.

المطلوب:

اذا علمت أن قيمة الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}i} = 6$ ، فقم بتقدير الوسط الحسابي للمجتمع μ عند مستوى ثقة مساو لـ 98%،

حل المثال.2 :

لدينا مستوى الثقة: $1\text{-}\alpha = 98\%$

مستوى الخطأ او المعنوية : 2%

ومنه: $Z_{1-\alpha/2} = 2.23$

كما يتضح لنا أن تباين المجتمع σ^2 مجهول، لكن حجم العينة اكبر من 30 ولذلك سنستعين بقيمة الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}i}$ بدل الانحراف المعياري للمجتمع.

وبالتالي لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع سنستعين بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} - Z1-\alpha\ 2 * \sigma_{\bar{x}i} / \sqrt{n} < \mu < \bar{X} + Z1-\alpha\ 2 * \sigma_{\bar{x}i} / \sqrt{n}$$

بالتعويض في العلاقة أعلاه نجد:

$$73 - 2.33 * 6/\sqrt{81} < \mu < 73 + 2.33 * 6/\sqrt{81}$$

$$\mathbf{71.447 < \mu < 74.553}$$

$$\mathbf{IC\mu = [73 \mp 6/\sqrt{81} * 2.33]}$$

أي أنه عند مستوى ثقة مقدارها 98% ستكون القيمة المقدرة للوسط الحسابي للمجتمع محصورة في المجال:

[71.447 ؛74.553]

مثال.03.

اذا كانت دخول مجموعة من الأفراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسحبت منه عينة عشوائية حجمها 10 أفراد، بمتوسط حسابي قدره $\bar{X} = 72$ وقيمة الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}i} = 6.4$ ،

المطلوب:

بمستوى ثقة مساو لـ 95%، قم بتقدير الوسط الحسابي للمجتمع μ

حل المثال. 3:

لدينا مستوى الثقة: $1\text{-}\alpha = 95\%$

مستوى الخطأ او المعنوية : 5%

ومنه: $Z_{1-\alpha/2} = 1.96$

كما يتضح لنا أن تباين المجتمع σ^2 مجهول، ولذلك سنستعين بقيمة الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}i}$ بدل الانحراف المعياري للمجتمع، وحجم العينة مساو لـ 10 أي اصغر من 30 ففي هذه الحالة سنستخدم توزيع ستيودنت لتحديد مجالات الثقة لـ μ.

وبالتالي لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع سنستعين بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} - t_{(1-\alpha 2\,,\,n-1)} * \sigma_x/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + t_{(1-\alpha 2\,,\,n-1)} * \sigma_x/\sqrt{n}$$

$$72 - t_{(1-0.05\,2\,,\,10-1)} * 6.4/\sqrt{10} < \mu < 72 + t_{(1-0.05\,2\,,\,10-1)} * 6.4/\sqrt{10}$$

$$67.42 < \mu < 76.54$$

حيث تم حساب قيمة $t_{(1-\alpha 2\,,\,n-1)}$ المساوية للقيمة $t_{(1-0.05\,2\,,\,10-1)}$ وذلك حسب معطيات المثال والتي وجد أنها تقابل القيمة : 2.262 في الجدول الاحصائي لتوزيع ستودنت ويصبح لدينا مجال الثقة كالتالي:

[76.54؛ 67.42]

إذا نقول أن متوسط مداخيل أفراد تلك الدولة يتراوح ما بين **76.54** كحد أعلى و67.42 كحد أدنى.

3.3. فترة الثقة للنسبة

1.3.3. حالة المجتمع غير محدود أو المعاينة غير نفادية والعينة الممتدة ($n \geq 30$) :

لتكن s إحصائية تمثل نسبة "نجاحات" في عينة ذات حجم $n \geq 30$ مستخرجة من مجتمع ثنائي حيث p هي نسبة النجاحات. تستعمل التوزيع الطبيعي لتقدير p فنعين حدود الثقة لـ p كما يلي: $\dot{p} \pm z_c\sigma_p$
أين $\dot{p}$ نسبة النجاحات في العينة.

نعلم من المحور السابق أن $\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ ومنه يحدد مجال الثقة لـ p كما يلي (صالح، 2006، 94):

$$\textbf{ICp=}\ p' \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

2.3.3.حالة كون المجتمع محدود ذا حجم N والمعاينة نفادية:

$$\textbf{ICp=}\ p' \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال.01:

أخذت عينة عشوائية من احدى المجتمعات تتكون من ذكور واناث حجمها 85 وجد منها 10 ذكور.

المطلوب:

أوجد فترة الثقة لنسبة الذكور في المجتمع P عند فترة الثقة 95% .

الحل:

لدينا:

مستوى الثقة: $1-\alpha = 95\%$

مستوى الخطأ او المعنوية : 5%

ومنه: $Z_{1-\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

$n = 85$

$\dot{p} = 10/85 = 0.12$

بالتعويض في مجال الثقة التالي نجد:

$$\textbf{ICp=}\ p' \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\textbf{ICp=}0.12 - 1.96*\sqrt{0.12(1-0.12)/85} \leq p \leq 0.12 + 1.96*\sqrt{0.12(1-0.12)/85}$$

$$\textbf{ICp=}0.05 \leq p \leq 0.19$$

أي أنه عند مستوى ثقة مقدارها 95% ستكون نسبة الذكور في المجتمع محل الدراسة تقع ضمن المجال [0.05 , 0.19]

4.3. فترة الثقة للفرق بين وسطين

1.4.3. حالة تبايني المجتمعين معلوم

اذا كان لدينا مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وفق العلاقة التالية (السقاف، 2020، ص.129):

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \approx N(\mu_{\bar{x}1 - \bar{x}2} \; ; \; \sigma^2_{\bar{X}1 - \bar{X}2})$$

فتكون فترة الثقة (α-1) % كالتالي:

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

و بعد تبسيط المتباينة نجد أن:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC\mu_1 - \mu_2 = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

2.4.3. حالة تبايني المجتمعين مجهول مع حجمي العينة (n1,n2 ≥30)

اذا كان تبايني مجتمعين σ_1^2 ؛ σ_2^2 مجهولين وكان حجم العينتين المأخوذتين من المجتمعين (n1,n2 ≥30)عندئذ يبقى التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي المعياري مع تبديل تبايني المجتمعين المجهولين σ_1^2 ؛σ_2^2 بتبايني العينة وبالتالي تصبح العلاقة كما يلي (صالح، 2006، ص.97):

$$(\bar{X}1 - \bar{X}2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}2}^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}1 - \bar{X}2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}2}^2}{n_2}}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC\mu_1 - \mu_2 = \left[(\bar{X}1 - \bar{X}2) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}2}^2}{n_2}}\right]$$

3.4.3. حالة تبايني المجتمعين مجهول مع حجمي العينة (n1,n2 <30) أو أحدهما

عندما يكون لدينا مجتمعين احصائيين غير معلومي التباين ولكن توزيعها التكراري من النوع الطبيعي ويكون حجم العينتين المأخوذتين من هذين المجتمعين صغيرا (n1,n2 <30) ، فإننا نستخدم في هذه الحالة متباينة الثقة الخاصة بتوزيع t لـ ستيودنت حيث يتم حساب درجة الحرية وفق هذه للتوزيع كالتالي (السقاف، 2020، ص.130):

$$V=n_1+n_2-2$$

ويقع ضمن متباينة الثقة المدونة أدناه وذلك بدرجة ثقة: P= (1- α)%

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC\mu_1-\mu_2=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mp t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2\right)}\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}1}^2}{n_1}+\frac{\sigma_{\bar{x}2}^2}{n_2}}\right]$$

مثال.01.

قمنا بسحب عينة عشوائية حجمها $n_1=80$ ومتوسطها $\bar{X}_1=1680$ وعينة عشوائية ثانية حجمها $n2=75$ ومتوسطها $\bar{X}_2=1200$ وكان الانحراف المعياري للمجتمعين على التوالي؛ $\sigma_1^2=500$؛ $\sigma_2^2=600$.

المطلوب:

بمستوى ثقة مساو لـ 99%، قم بتقدير فترة الثقة للفرق بين الوسط الحسابي للمجتمعين $\mu_1-\mu_2$

حل المثال. 01:

لدينا مستوى الثقة: $1-\alpha = 99\%$

مستوى الخطأ او المعنوية : 1%

ومنه: $Z_{1-\alpha/2}=2.58$

ومنه فإن فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين بعد التعويض يعطى بالعلاقة التالية:

$$(1680-1200)-Z_{1-\frac{0.01}{2}}\sqrt{\frac{500^2}{80}+\frac{600^2}{75}}<(\mu1-\mu2)<(1680-1200)+Z_{1-\frac{0.01}{2}}\sqrt{\frac{500^2}{80}+\frac{600^2}{75}}$$

$$250<\mu1-\mu2<710$$

أي عند مستوى ثقة 99% ستكون قيمة الفرق بين متوسطي المجتمعين ضمن المجال:

$$[710-250]$$

مثال.02.

اذا قمنا بسحب عينة عشوائية حجمها $n_1=8$ ومتوسطها $\bar{X}_1=1680$ وعينة عشوائية ثانية حجمها $n2=12$ ومتوسطها $\bar{X}_2=1200$ وكان الانحراف المعياري لمتوسطي توزيع المعاينتين على التوالي كما يلي؛ $\sigma_{\bar{x}1}^2=500$؛ $\sigma_{\bar{x}2}^2=600$.

المطلوب:

بمستوى ثقة مساو لـ 99%، قم بتقدير فترة الثقة للفرق بين الوسط الحسابي للمجتمعين $\mu_1-\mu_2$

حل المثال. 02:

بتطبيق العلاقة التالية:

$$IC\mu_1-\mu_2=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mp t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2\right)}\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}1}^2}{n_1}+\frac{\sigma_{\bar{x}2}^2}{n_2}}\right]$$

مع: $t_{\left(1-\frac{0.01}{2},\ 8+12-2\right)}=t_{(0.995,\ 18)}=2.878$

ومنه فإن فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين بعد التعويض يعطى بالعلاقة التالية:

$$223.79<\mu1-\mu2<736.20$$

أي أنه عند مستوى ثقة 99% ستكون قيمة الفرق بين متوسطي المجتمعين ضمن المجال:

[736.20 – 223.79]

5.3. تمارين مقترحة:

التمرين الاول :

شركة مختصة في نقل المسافرين تريد تقدير المدة المستغرقة من طرف حافلاتها في خط محدد فقامت بمعاينة عشوائية لإحدى الحافلات وتم تسجيل الفترات التي تقضيها خلال كل رحلة بالدقائق فكانت كمايلي:

100 .102 .98. 96 .103. 110 .97. 80

المطلوب:

- قدر نقطيا معدل الفترة التي تستغرقها حافالتها خلال الرحلة
- قدر نقطيا الانحراف المعياري للفترات المستغرقة خلال الرحلة الواحدة

التمرين الثاني:

سحبت عينة عشوائية حجمها 25 ، ومتوسطها 4290 من مجتمع موزع توزيعا طبيعيا انحرافه المعياري مساو للقيمة 1000.

المطلوب:

- قدر الوسط الحسابي للمجتمع μ باعتماد مستويات الثقة التالية:

أ- عند 90% ب- % 95 ج- % 99 ؟

التمرين الثالث:

اذا كانت دخول مجموعة من الافراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسحبت منها عينة عشوائية حجمها 10 أفراد بوسط حسابي 72و.ن وانحراف معياري بلغ 4.6 ون .

المطلوب:

- أوجد مجال الثقة للوسط الحسابي لدخول جميع الافراد بمستوى ثقة 95%

التمرين الرابع:

مخزن يحوي 10000 قطعة من منتج ما؛ وبغرض القيام بعملية تقييم عدد القطع المعيبة في المخزن تم سحب عينة عشوائيا مكونة من 400 قطعة، ووجد بها 45 قطعة معيبة (فاسدة).

المطلوب

- أوجد فترة الثقة للوسط الحسابي μ للمجتمع الاحصائي لإجمالي القطع المعيبة وذلك اعتمادا على مستوى ثقة مساو لـ 99%

التمرين الخامس:

اذا أخذت عينة عشوائية من درجات الامتحانات حجمها $n=50$ من 200 درجة في امتحان لطلاب الاعلام الالي، وكان متوسطها الحسابي $\bar{X}=75$ وانحرافها المعياري $\sigma_{\bar{x}}=10$

المطلوب

- أوجد فترة الثقة للوسط الحسابي μ للمجتمع الاحصائي لدرجات الطلبة وذلك اعتمادا على مستوى ثقة مساو لـ 95%
- حدد درجة الثقة في فترة التقدير التالية:

$$74 < \mu < 76$$

التمرين السادس:

لمقارنة متوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة في مدينة ما بمتوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة في مدينة أخرى، أخذت عينتين عشوائيتين حجمها على التوالي 20 و25 ؛ ووجد أن متوسط الدخل في العينة المأخوذة من مدينة الأولى يقدر بـ 25000 دج بتباين 640000 بينما في المدينة الثانية فتشير احصاءات العينة الى متوسط الدخل الشهري للأسر يبلغ 21000 دج بتباين يقدره 360000 .

المطلوب

- بالاعتماد على مستوى ثقة يبلغ 95% قدر فترة الثقة للفرق بين متوسطي الدخل الشهري للأسر في المدينتين؟

التمرين السابع:

في جامعة وهران 70 % من الطلبة يرغبون في اعادة النظر في البرنامج البيداغوجي المقدم مقابل 46.6% في جامعة الجزائرمن الطلبة الذين لهم نفس الطلب.

المطلوب

- بالاعتماد على مستوى ثقة يبلغ 95% هل يوجد فرق في الآراء بين طلبة الجامعتين؟ باعتبار ان عينة الطلبة المدروسة من جامعة وهران تقدر بـ 100 طالب، وبجامعة الجزائر مقدرة بـ 150 طالب؟

الملاحق:

جدول (1) التوزيع الطبيعي

$\Phi(z) = P(Z \leq z), \quad -3.49 \leq z \leq 0, \quad Z \sim N(0,1)$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3829
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

تابع – جدول (1) التوزيع الطبيعي

$\Phi(z) = P(Z \leq z), \; 0 \leq z \leq 3.49, \quad Z \sim N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول (2) توزيع مربع كاي

$$P(X \geq \text{a}), \qquad X \sim x^2(\alpha, \vartheta)$$

ϑ \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	–	–	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

جدول (3) توزيع t $P(X \geq a), \quad X \sim t(\theta)$

θ \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291