جامعة غليزان

كلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات مقياس الاحصاء III (نظرية المعاينة)

موجهة لطلبة السنة الثانية شعبة علوم التسيير

▪ الفصل الأول : نظرية المعاينة

من إعداد

د. حنصال أبوبكر

السنة الجامعية: 2022-2023

فهرس المحاضرات

الفصل الاول. نظرية توزيع المعاينة

1.2 مفاهيم أساسية حول نظرية توزيع المعاينة	
2.2 توزيع المعاينة للمتوسطات	
3.2 توزيع المعاينة للنسبة	
4.2 توزيع المعاينة للفروق والمجاميع	
5.2 توزيع المعاينة للتباين وللنسبة بين تبايني عينتين	
6.2 تمارين مقترحة	

2. نظرية المعاينة

تمهيد:

يعتمد أسلوب المعاينة على تقدير المعالم الرئيسية للمجتمع من خالل بيانات أخذت من عينة ممثلة للمجتمع ما أي تتوافر فيها خصائص المجتمع الأصلي، وهذا لتخفيض أخطاء المعاينة إلى حدها الأدنى ويرتبط تمثيل العينة في المجتمع بعوامل عديدة كحجم العينة، تباين وخصائص المجتمع وكذا طريقة اختيار العينة، وكل هذه العناصر سيتم التطرق اليها في المحور الثاني من هذه المطبوعة حيث في بدايته سنتناول المفاهيم المتعلقة بنظرية المعاينة ثم نعرض مختلف الخصائص الإحصائية للمجتمع والعينة.

1.2. مفاهيم أساسية حول نظرية المعاينة

أولا: المجتمع الاحصائي

عبارة عن جميع القيم أو المفردات التي يمكن ان يأخذها المتغير ، فلو كانت دراستنا حول اطوال طلبة جامعة ما فان المجتمع في هذه الحالة هو أطوال جميع الطلبة في تلك الجامعة ، والمجتمع اما أن يكون مجتمعا محدودا أي ممكن حصر عدد مفرداتها ، أو يكون مجتمعا غير محدودا وهو المجتمع الذي من الصعب حصر عدد مفرداته مثل مجتمع نوع سمك معين في نهر معين أو عدد البكتريا في حقل ، مما سبق نالحظ أن المجتمع يقصد به القياسات أو القيم أو االشياء التي تم قياسها.

ثانيا: العينة:

يطلق على عملية اختيار العينة بالمعاينة وليست الفكرة في مجرد اختيار جزء من المجتمع فقط أيا كان و لكن من الضروري أن تتوفر لدينا بعض المعلومات عن المجتمع و التي تسمح لنا باالختيار بعض مفرداته على اسس معينة تستطيع من خالل دراستها معرفة كثير عن هذا المجتمع ، أو يمكن تعريف العينة على أنها ذلك الجزء من المجتمع فالعينة عبارة عن مجموعة من المشاهدات أختيرت بطريقة ما من المجتمع ففي بعض األحيان دراسة المجتمع ككل قد يكون صعبا أو يحتاج الى وقت وجهد ومال فيستعاض عن دراسة المجتمع بدراسة العينة وصفاتها ومنها يستنتج خواص المجتمع االصلي الذي اخذت منه العينة ونرمز لمفردات المجتمع بـ N ومفردات العينة بـ n

فمصطلح المجتمع هنا قد يقصد به القياسات أو القيم وليس الأفراد أو الأشياء التي تم قياسها (مجتمع الأوزان، مجتمع آراء الناخبين..)، كما أن المجتمع قد يكون محدودا أو غير محدود، أما العينة فهي عادة ما تكون محدودة (علوان مطلق، 2009، ص.19).

أ. العينة العشوائية Echantillon aléatoire

من أجل أن تكون العينة ممثلة للمجتمع، أحد الطرق المستخدمة هي العينة العشوائية. نظريا (قد يصعب تحقيق ذلك في الواقع)، نقول عن عينة أنها عشوائية إذا كان لكل مفردة في المجتمع نفس الاحتمال لأن تكون في العينة. تسمى هذه العينة بالعينة العشوائية البسيطة. لإنجاز ذلك إما أن نسحب المفردات بطريقة عشوائية أو نرقم مفردات المجتمع ثم نحدد العينة من خلال مجموعة من الأعداد تؤخذ من الجداول الإحصائية للأعداد العشوائية (علوان مطلق، 2009، ص.31).

حيث تنقسم العينة الى عينة نفادية وأخرى غير نفادية وتفصيل ذلك فيما يلي:

ب. العينة النفادية والعينة غير النفادية Echantillon exhaustif et non exhaustif (صالح، 2006، ص.80):

عندما يكون السحب بالإرجاع حيث يمكن أن تظهر المفردة أكثر من مرة في العينة، نسمي هذه المعاينة غير نفادية لأن تكرار العملية لا يؤدي إلى تقليص عدد المفردات في المجتمع،
وبالتالي فالعينة النفاذية تكون في حالة السحب بدون ارجاع وتعطى بالعلاقة التالية:

$$C^n{}_N$$

والعكس نسمي المعاينة بدون إرجاع معاينة نفادية، هناك فرضيتان تتكرران في عدد من العلاقات الرياضية التي سنراها لاحقا، هما فرضية أن قيم مفردات العينة مستقلة والمجتمع لانهائي. يتحقق شرط الاستقلال إذا كانت المعاينة غير نفادية، وإذا كانت كذلك، يمكن اعتبار المجتمع مجتمعا غير محدود.
وبالتالي فالعينة غير النفاذية تكون في حالة السحب مع الارجاع وتعطى بالعلاقة التالية:

$$N^n$$

ثالثا: معالم المجتمع Paramètre d'une population (موراي، جون، و ألو، 2004 ، ص.70):

نقصد بمعالم المجتمع مجموعة من خصائصه مثل المتوسط، التباين، معامل التماثل، ... من خصائص المجتمع أيضا طبيعة توزيعه الاحتمالي f(x) كأن يكون طبيعيا أو غيره من التوزيعات الاخرى.
ولتقدير معالم المجتمع من متوسط وتباين فإننا ننطلق من بيانات العينة ، ونسمي كل قيمة تحسب انطالقا من هذه البيانات بإحصائية المعاينة ، ونظريا فان احصائية المعاينة هي كل دالة في المتغيرات العشوائية التي تمثل القيم المحصل عليها في العينة.
و سنرمز للمتوسط المجتمع بالرمز μ حيث:

$$\mu = \sum xi \,/\, N$$

أما تباين المجتمع سنرمز له σ^2 حيث:

$$\sigma^2 = \sum(xi - \mu)^2 \,/\, N$$

رابعا: إحصائية المعاينة Statistique de l'échantillonnage (موراي، جون، و ألو، 2004، ص.71):

لتقدير معالم المجتمع (متوسط المجتمع μ، تباين المجتمع σ^2 النسبة p ...) ننطلق من بيانات العينة، حيث نحتاج إلى حساب معالم مثل متوسط العينة$\overline{X}$ ، تباين العينة S^2، النسبة في العينة p'. بصفة عامة، نسمي كل قيمة تحسب انطلاقا من بيانات العينة من أجل تقدير قيمة معالم المجتمع إحصائية المعاينة. نظريا (رياضيا) إحصائية المعاينة هي كل دالة في المتغيرات العشوائية التي تمثل القيم المحصل عليها في العينة.

2.2. توزيع المعاينة للمتوسطات

اذا اخذنا عينات متكررة من مجتمع ما وقمنا بقياس متوسط لكل عينة، فإننا نجد أن هذه المتوسطات تختلف عن بعضها البعض، ويسمى التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات هذه بـ " **توزيع المعاينة للمتوسطات**" ، والذي بدوره له أيضا متوسط معبر عنه بالرمز $\mu_{\overline{x}i}$ وانحراف معياري أو خطأ معياري

$\sigma_{\bar{x}i}$ ، حيث سيتم الاعتماد على هذه الرموز في مختلف محاور المطبوعة، فمثلا لو كان لدينا 10 عينات عشوائية مسحوبة من مجتمع ما وحجم كل عينة **n= 10** وتم حساب المتوسط الحسابي لكل عينة وهو متغير عشوائي والتوزيع التكراري لمتوسطات هذه العينات يسمى بتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي وبصفة عامة نجد أن توزيع المعاينة للمتوسط المكون من كل العينات الممكن اخذها له خصائص مهمة ومفيدة في دراسة المجتمع عن طريق المعاينة.

1.2.2. الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للمتوسطات (صالح، 2006، ص.81)**:**

نظرية.1:

اذا كان μ يمثل متوسط مجتمع ما، و$\mu_{\bar{x}i}$ يمثل الوسط الحسابي لعينة مسحوبة من ذات المجتمع، فأن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\mu_{\bar{x}i})$ يعبر عنها كما يأتي:

$$E(\mu_{\bar{x}i}) = \mu_{\bar{x}i}$$

ولإثبات ذلك نتبع الخطوات التالية:

$$E(\mu_{\bar{x}i}) = E\left(1/n \sum xi\right) = 1/n \sum E(xi) = 1/n \sum \mu = 1/n\ \mu n = \mu$$

2.2.2. تباين توزيع المعاينة للمتوسطات :(جلال و مصطفى، 1990، ص.55)

نظرية.2:

اذا كان μ يمثل متوسط مجتمع ما $\mu_{\bar{x}i}$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع بالإرجاع، فأن التباين$\sigma_{\bar{x}i}^2$ تباين توزيع المعاينة للمتوسطات يكتب كالتالي:

- ✓ **في حالة كان السحب بالارجاع**

$$\sigma_{\bar{x}i}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

حيث n يمثل حجم العينة.

- ✓ **أما في حالة كان السحب بدون ارجاع**

$$\sigma_{\bar{X}i}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

وتسمى النسبة $\frac{N-n}{N-1}$ معامل الإرجاع أو معامل التصحيح.

مثال.01:

إذا كان لدينا مجتمع يمثل أعمار خمسة أطفال، وكانت أعمارهم على التوالي: 1، 3، 5، 6، 8.

المطلوب :

- أحسب الوسط الحسابي μ للمجتمع ؟
- بفرض أننا سحبنا كل العينات العشوائية الممكنة من حجم طفلين من هذا المجتمع ياعتبار أن عملية السحب تمت بالارجاع ، ثم بدون ارجاع.
- احسب الوسط الحسابي لتوزيع معاينة الوسط الحسابي؟

الحل:

العينات الممكنة ذات الحجم $n = 2$ من مجتمع حجمه 5 مفردات ياعتبار السحب بالارجاع تحسب وفق العلاقة التالية:

$$N^n = 5^2 = 25$$

أي أنه هناك امكانية للحصول على 25 عينة مكونة من مفردتين من مجتمع مكون من 5 مفردات باعتبار انها مسحوبة **بالإرجاع** عناصرها ممثلة في الجدول أدناه، (الحالة 01)

العينات الممكنة ذات الحجم $n = 2$ من مجتمع حجمه 5 مفردات ياعتبار السحب تم بدون ارجاع تحسب وفق العلاقة التالية:

$$C^n{}_N = C_5{}^2 = 10$$

أي أنه هناك امكانية للحصول على 10 عينات مكونة من مفردتين من مجتمع مكون من 5 مفردات باعتبار انها مسحوبة **بدون ارجاع** عناصرها ممثلة في الجدول أدناه، (الحالة 02)

الحالة رقم 01، حالة السحب بالارجاع		الحالة رقم 02، حالة السحب بدون ارجاع	
العينات الممكنة في حالة السحب بالارجاع (معاينة غير نفادية)	المتوسطات الممكنة $\bar{X}i$	العينات الممكنة في حالة السحب بدون ارجاع (معاينة نفادية)	المتوسطات الممكنة $\bar{X}i$
(1, 1)	1	(1, 3)	2
(1, 3)	2	(1, 5)	3
(1, 5)	3	(1, 6)	3.5
(1, 6)	3.5	(1, 8)	4.5
(1, 8)	4.5	(3, 5)	4
(3, 1)	2	(3, 6)	4.5
(3, 3)	3	(3, 8)	5.5
(3, 5)	4	(5, 6)	5.5
(3, 6)	4.5	(5, 8)	6.5
(3, 8)	5.5	(8, 6)	7
(5, 1)	3		
(5, 3)	4		
(5, 5)	5		
(5, 6)	5.5		
(5, 8)	6.5		
(6, 1)	3.5		
(6, 3)	4.5		
(6, 5)	5.5		
(6, 6)	6		
(6, 8)	7		
(8, 1)	4.5		
(8, 3)	5.5		
(8, 5)	6.5		
(8, 6)	7		
(8, 8)	8		

أ. حساب الوسط الحسابي للمجتمع:

$$\mu = (\sum X_i) / N \Longrightarrow \quad \mu = (1 + 3 + 5 + 6 + 8)/5 = 4.6$$

ب. حساب الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي في الحالتين عند السحب بالارجاع وبدون ارجاع.

ب.1. حالة السحب بالارجاع

$$\mu_{\bar{x}i} = (\sum \bar{X}_i) / N^n$$

$\mu_{\overline{x}i}$=(1+2+3+3.5+4.5+2+3+4+4.5+5.5+3+4+5+5.5+6.5+3.5+4.5+5.5+6+7+4.5+5.5+6.5+7+8) / 25

$\mu_{\overline{x}i} = 4.6$

ب.2. حالة السحب بدون ارجاع

$\mu_{\overline{x}i} = (\sum \overline{X}_i) / C^n_N$

$\mu_{\overline{x}i}$=(2+3+3.5+4.5+4+4.5+5.5+5.5+6.5+7) / 10

$\mu_{\overline{x}i} = 4.6$

ملاحظة :

من خلال حسابنا للوسط الحسابي للمجتمع والوسط الحسابي لمجموع متوسطات المعاينة في الحالتين في حالة تم السحب بالارجاع أو بدون ارجاع توصلنا الى أن: $\mu = \mu_{\overline{x}i}$ وهو ما نصت عليه **النظرية 01.**

مثال.02:

أحسب تباين المجتمع في المثال.01، أحسب التباين (والانحراف المعياري) لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma^2_{\overline{x}i}$ علما أن العينة مسحوبة بالإرجاع (غير نفادية)، قارن بين تباين المجتمع وتباين متوسطات العينات الممكنة (توزيع المعاينة للمتوسطات).

الحل:

- حساب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات

أ.حالة المعاينة بالإرجاع

لدينا:

$\sigma^2_{\overline{X}i} = [\sum_i (\overline{X}_i - \mu_{\overline{x}i})^2]/25 = 2.92;$

$\sigma^2 = [\sum_i (x_i - \mu)^2]/5 = 5.84$

المقارنة:

2.92 = 5.84 / 2

أي أن:

$$\sigma^2_{\overline{x}i} = \frac{\sigma^2}{n}$$

هذا المثال يمهد للنظرية التالية:

نظرية .2:

إذا كانت X متغير عشوائي يمثل مجتمع ما و$\overline{x}_i$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع بالإرجاع، فإن تباين $\overline{x}_i$ (تباين توزيع المعاينة للمتوسطات) يكتب كما يلي: $\sigma^2_{\overline{x}i} = \frac{\sigma^2}{n}$ حيث n حجم العينة.

البرهان (صالح، 2006، ص.82)**:**

لنرمز ب Xi لقيم المتغيرة الأصلية X .

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_i Xi\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i V(Xi) = \frac{1}{n^2}\sum_i \sigma^2 = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

ب. حالة المعاينة بدون إرجاع.

في **المثال.1** أحسب تباين المتوسطات الممكنة للعينة $\sigma^2_{\bar{X}i}$ في حالة المعاينة بدون إرجاع، قارن بين تباين المجتمع وتباين المتوسطات الممكنة للعينة.

الحل:

لدينا:

$\sigma^2_{\bar{X}i} = [\sum_i (\bar{X}_i - \mu_{\bar{x}i})^2]/10 = 2.19$

$\sigma^2 = [\sum_i (x_i - \mu)^2]/5 = 5.84$

المقارنة بين تباين متوسط العينة و تباين المجتمع:

$$2.19 = \frac{5.84}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right)$$

هذا يمهد للنظرية التالية:

نظرية .3:

إذا كانت X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما حجمه N و$\bar{x}_i$ متغيرة ع تمثل متوسط عينة حجمها n مسحوبة من ذات المجتمع بدون إرجاع، فإن تباين $\bar{x}_i$ (تباين توزيع المعاينة للمتوسطات) يكتب كما يلي:

$$\sigma^2_{\bar{x}i} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

وتسمى النسبة $\frac{N-n}{N-1}$ معامل الإرجاع أو معامل التصحيح.

3.2.2. طبيعة توزيع $\bar{x}_i$

سندرس طبيعة توزيع متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات من خلال النظريات التالية:

نظرية.1:

إذا كان لدينا مجتمع موزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2 فإن متوسط العينة المسحوبة منه يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2/n،

ونكتب: $\bar{x}_i \approx N(\mu, \sigma^2/n)$

نظرية.2:

إذا كان المجتمع الذي تسحب منه العينة ذو متوسط μ وتباين σ^2 لكن ليس بالضرورة موزع طبيعيا فإن المتغيرة المعيارية z لـ $\bar{x}_i$ حيث: $z = \frac{\bar{x}_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ تؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري عندما يكون n كبيرا $(n \geq 30)$ ونكتب: $z \approx N(0, 1)$ **منطوق هذه النظرية هو ما يعرف بنظرية النهاية المركزية** (جلال و مصطفى، 1990، ص.55).

$$\sigma_{\bar{x}i} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

أما في حالة كان المجتمع محدود والمعاينة نفادية فنستبدل العبارة $\sigma/\sqrt{n}$ بـالعبارة:

عمليا يستخدم الإحصائيين هذه الصيغة المعدلة بمعامل الإرجاع للانحراف المعياري عندما تكون النسبة $n/N \geq 0.05$

مثال.03:

مجتمع حجمه 900 بمتوسط $\mu=20$ وانحراف معياري $\sigma = 12$ ، بعد استخراج جميع العينات الممكنة ذات الحجم $(n = 36)$ والحجم $(n = 64)$.

المطلوب:

أحسب المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات في الحالتين:

أ. في الحالة (1): حجم العينة $n = 36$

ب. في الحالة (2): حجم العينة $n = 64$

الحل:

حساب الوسط الحسابي لمجموع متوسطات المعاينة

نعلم أن:

$$\mu_{\bar{x}i} = \mu$$

وبالتالي:

$$\mu_{\bar{x}i} = 20$$

أ. في الحالة (1): حجم العينة $n = 36$

أولا نقوم بحساب النسبة (n/N):

لدينا:

$$n/N = 36/900 = 0.04 < 0.05 \Rightarrow \sigma_{\bar{x}i} = \sigma/\sqrt{n} = 12/\sqrt{36} = 2$$

ب. في الحالة (2): حجم العينة $n = 64$

أولا نقوم بحساب النسبة (n/N):

لدينا:

$$n/N = 64/900 = 0.071 > 0.05$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}i} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}i} = \frac{12}{\sqrt{64}}\sqrt{\frac{900-64}{900-1}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}i} = 1.92$$

مثال.04:

باستخدام معطيات المثال السابق باعتماد أن حجم العينة مساو لـ $(n = 36)$.

المطلوب:

- أحسب احتمال أن يكون $\bar{X}i$ محصورا بين 18 و22.
- أحسب نفس الاحتمال باعتماد أن حجم العينة مساو لـ $(n = 64)$

الحل:

أ. في الحالة (1): حجم العينة $n = 36$

لدينا:

$$P(18 < \bar{X} < 22) = P(Z_1 < Z < Z_2)$$

وبالتالي يجب علينا حساب كل من : Z_1 و Z_2

$$Z_1 = \frac{\bar{X}i_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{18-20}{12/\sqrt{36}} = -1\ ,\quad Z_2 = 1 \Rightarrow P(18 < \bar{X} < 22) = P(Z_1 < Z < Z_2) = 0.6827$$

أ. في الحالة (2): حجم العينة $n = 64$

لدينا:

$$Z_1 = \frac{\bar{X}i_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{18-20}{1.92} = -1.04\ ,\quad Z_2 = 1.04 \Rightarrow P(18 < \bar{X} < 22) = P(-1.04 < Z < 1.04) = 0.70$$

4.2.2. ملخص مختصرلأهم خصائص توزيع المعاينة للمتوسطات.

الجدول.02: ملخص مختصرلأهم خصائص توزيع المعاينة للمتوسطات.

المجتمع	المعاينة	الخاصية
مجتمع ما حجمه N	سحب بالإرجاع أو بدون إرجاع	$E(\bar{X}i) = \mu_{\bar{X}i} = \mu$
مجتمع ما حجمه N	سحب بالإرجاع	$\sigma^2_{\bar{X}i} = \frac{\sigma^2}{n}$
مجتمع ما حجمه N	سحب بدون إرجاع	$\sigma^2_{\bar{X}i} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
مجتمع ما حجمه N بمتوسط μ وتباين σ^2 لكن ليس بالضرورة طبيعيا	عندما يكون n كبيرا ($n \geq 30$)	$z = \frac{\bar{X}i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0, 1)$

المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على النظريات السابقة

واجب منزلي:

إذا كان لدينا مجتمع يمثل أعمار ثلاثة أطفال، وكانت أعمارهم على التوالي: 2، 4، 6

المطلوب :أ-احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجتمع ؟

ب- بفرض أننا سحبنا كل العينات العشوائية الممكنة من حجم طفلين من هذا المجتمع،

- ✓ أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع معاينة للوسط الحسابي؟
- ✓ أحسب احتمال أن يكون عمر الطفل محصورا بين 2 و5.

3.2. توزيع المعاينة للنسبة

نفترض انه لدينا مجتمع غير محدود موزعا توزيعا ذي الحدين باحتمال وجود صفة معينة نرمز لها بالرمز(p) واحتمال عدم وجدو هذه الصفة بالرمز(q=1 -p) ، وكمثال على ذلك يكون المجتمع هو كل رميات قطعة عملة متكاملة التوازن ويكون احتمال الحصول على الصورة $p=1/2$ ، لنعتبر أن كل العينات الممكنة ذات الحجم n المسحوبة من هذا المجتمع وفي كل عينة نحدد احصاء نسبة النجاح p وفي هذا المثال تكون النسبة تمثل نسبة عدد الصور التي نحصل عليها الى حجم العينة n وبالتالي نحصل على توزيع المعاينة الذي متوسطه μ_p وانحرافه المعياري σ_p في الصورة (موراي، جون، و ألو، 2004، ص.77).

حيث : $\dot{p}=na/n$ $\qquad$ $P=Na/N$

مع:

Na:عدد المفردات التي تحقق خاصية ما في مجتمع

N : حجم المجتمع

na : عدد المفردات التي تحقق نفس الخاصية في حجم العينة

n : حجم العينة

نظرية.01:

لتكن المتغيرة العشوائية X_i التي تمثل مجتمع ما غير محدود وموزع توزيعا طبيعيا حيث p نسبة المفردات في المجتمع ذات صفة معينة، ولتكن $\dot{p}$ متغيرة عشوائية تمثل نسبة المفردات ذات الصفة المذكورة في العينة المسحوبة من ذات المجتمع (نفس الصفة)، نحصل على توزيع للإحصائية $\dot{p}$ حيث معالمه: $E(\dot{p})$ و$\sigma_{\dot{p}}$، هذه المعالم تساوي (موراي، جون، و ألو، 2004، ص.77):

$$E(\dot{p}) = \mu_{\dot{p}} = p \qquad ; \qquad \sigma^2_{\dot{p}} = \frac{pq}{n}$$

عند $n \geq 30$: $\qquad \dot{p} \approx N(p, \sigma_{\dot{p}})$

أي أنه اذا كانت P تمثل النسبة في المجتمع تحقق خاصية ما و$\dot{p}$ تمثل النسبة في العينة التي تحقق نفس الخاصية فان توزيع المعاينة يقترب من التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية لما ($n \geq 30$) مع $n(1-p) > 5$.

ملاحظة:

عندما يكون المجتمع محدودا والمعاينة نفاديه نضرب في معامل الإرجاع عند حساب الانحراف المعياري.

مثال.01:

يحتوي احدى المستشفيات على 800 مريض من بينهم 320 مريض يعاني من مرض مزمن، اذا سحبنا عينة من 40 مريض بدون ارجاع.

المطلوب:

- حدد طبيعة توزيع المرضى المصابين بمرض مزمن في العينة
- ما هو احتمال ان تكون نسبة المصابين بمرض مزمن في العينة أقل من 50%

الحل:

$n=40$ $N=800$ $P = Na/ N = 320/ 800 = 0.4$

نلاحظ ان حجم العينة $(n = 40 >=30)$ وعليه فان توزيع المعاينة النسبة ṗ يقترب من التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية مع $n(1-p) =40\ (1-0.4)=24>5$.

وبما اننا في حالة السحب بدون ارجاع يصبح لدينا:

$$\dot{p} \approx N(p, \sigma_{\dot{p}})$$

$$\dot{p} \approx N(p, pq/n*(N-n/N-1))$$

مع:

$$\mu_{\dot{p}} = p = 0.4$$

$$\sigma_{\dot{p}} = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{40}}\sqrt{\left(\frac{800-40}{800-1}\right)} = 0.75$$

اذا :

$$\dot{p} \approx N(0.4, 0.75)$$

حساب احتمال أن تكون نسبة المصابين بمرض مزمن في العينة أقل من50% :

$$P(\dot{p}<0.5) = P(Z<0.5-0.4/0.75) = P(Z<0.13) = 0.5517$$

مثال.02:

لاحظت إدارة الجامعة أنه في عينة مكونة من 100 طالب، 40 طالب تحصلوا أخيرا على الشهادة الجامعية، تريد الإدارة تقدير نسبة الطلبة الذين يحصلون على الشهادة داخل مجال يكون احتماله 90 بالمائة.

$$P(p_1< \dot{p}< p_2) = 0.9\ ;\ n \geq 30,$$

نفترض أن N كبير بحيث : $n/N < 0.05$

$$=> \dot{p} \sim N(p, \sigma_{\dot{p}}),\ \sigma_{\dot{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.4(0.6)}{100}} \cong 0.05$$

$$P(p_1 < \dot{p} < p_2) = 0.9 = P(z_1 < Z < z_2) => z_1 = -1.64, \qquad z_2 = 1.64$$

$$Z1 = \frac{(p_1 - p)}{\sigma_{\dot{p}}} \Rightarrow p = \dot{p} \pm z(\sigma_{\dot{p}}) = 0.4 \pm 1.64(0.05) = 0.4 \pm 0.082$$

$$\Rightarrow P(0.318 < p < 0.482) = 0.9.$$

1.4.2. متوسط توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

اذا كان لدينا مجتمعين حجمهما N_1 وN_2 نسحب من كل منهما عينة عشوائية حجمها على التوالي n_1 وn_2 ، نحسب في كل عينة مسحوبة من المجتمع الأول الإحصائية S_1 ونحسب نفس الاحصائية (المتوسط مثلا أو التباين ...) في كل عينة من المجتمع الثاني ونسميها S_2. إن الفرق بين الاحصائيتين S_2 – S_1 يشكل بدوره متغيرة عشوائية لها المتوسط والتباين التاليين (موراي، جون، و ألو، 2004، ص.ص، 78.79):

$$\mu_{S1-S2} = \mu_{S1} - \mu_{S2}$$
$$\sigma^2_{S1-S2} = \sigma^2_{S1} + \sigma^2_{S2}$$

فإذا كانت الاحصائية هي **المتوسط** فإن:

$$\mu_{\bar{X}1-\bar{X}2} = \mu_{\bar{X}1} - \mu_{\bar{X}2} = \mu_1 - \mu_2$$
$$\sigma^2_{\bar{X}1-\bar{X}2} = \sigma^2_{\bar{X}1} + \sigma^2_{\bar{X}2} = \sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2$$

أما إذا كانت الاحصائية هي **النسبة** فإن:

$$\mu_{\dot{p}1-\dot{p}2} = \mu_{\dot{p}1} - \mu_{\dot{p}2} = p_1 - p_2$$
$$\sigma^2_{\dot{p}1-\dot{p}2} = \sigma^2_{\dot{p}1} + \sigma^2_{\dot{p}2} = p_1q_1/n_1 + p_2q_2 / n_2$$

وإذا كان الاهتمام بمجموع الاحصائيتين بدلا من الفرق بينهما فإن:

$$\mu_{S1+S2} = \mu_{S1} + \mu_{S2}$$
$$\sigma^2_{S1+S2} = \sigma^2_{S1} + \sigma^2_{S2}$$

2.4.2. طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين

إذا كان المجتمعين الذين سحبت منه العينتين ليس بالضرورة موزعين توزيعا طبيعيا وكانت العينتين المسحوبتين حجمهما $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$ ، فبالاستدلال بمنطوق نظرية النهاية المركزية فان توزيع المتغيرة المعيارية للفرق بين متوسطين يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري. ونكتب (صالح، 2006، ص.85):

$$\mu_{\bar{x}1-\bar{x}2} \approx N(0, 1)$$

مثال.01:

اذا كان لدينا مجتمعين الأول وسطه الحسابي يساوي 30 وتباينه 25، والثاني وسطه الحسابي يساوي 20 وتباينه 16، وسحبت منهما عينتين حجمها على التوالي 30 مشاهدة و35 مشاهدة.

المطلوب:

- أوجد توزيع الفرق بين متوسطي العينتين؛
- احسب الاحتمال $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 12)$

الحل:

لدينا:

$$\mathbf{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \approx N(\mu_{\bar{x}1-\bar{x}2} ; \sigma^2_{\bar{X}1-\bar{X}2})}$$

مما سبق يصبح لدينا:

$$\mathbf{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \approx N(}\mu_1 - \mu_2 \mathbf{;} \ \sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2\mathbf{)}$$

فنحصل على:

$$\mathbf{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \approx N(}30 - 20 \mathbf{;} \ 25/30 + 16/35\mathbf{)}$$
$$\mathbf{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \approx N(}10 \ ; \ 1.29\mathbf{)}$$

وبالتالي:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 12) = P(Z<(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 12 / \sqrt{1.29}) = P(Z<1.76) = 0.9608$$

مثال.02:

اذا كانت نسبة النجاح في امتحان توجهي في مدرسة للبنات P هي 0.7 ؛ وكانت نسبة النجاح في ذلك الامتحان في مدرسة للذكورهي 0.65 واخذت عينة عشوائية حجمها $n_1=70$ من مدرسة البنات وأخذت عينة عشوائية حجمها n2=35 من مدرسة الذكور.

المطلوب:

ما هو احتمال ان تزيد نسبة النجاح في مدرسة البنات عن نسبة النجاح في مدرسة الذكور بمقدار 0.10 على الاكثر؟

الحل:

حساب احتمال ان تزيد نسبة النجاح في مدرسة البنات عن نسبة النجاح في مدرسة الذكور بمقدار 0.10 على الاكثر، يعني حساب ما يلي:

$$P(\dot{p}1 - \dot{p}2 < 0.10) = ?$$

لدينا:

$$P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 < 0.10) = P\left(\frac{(\dot{P}1 - \dot{P}2) - (P1 - P2)}{\sqrt{\frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} < \frac{0.10 - (0.70 - 0.65)}{\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{70} + \frac{0.(1-0.65)}{35}}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{0.05}{0.097}\right) = P(Z < 0.51)$$

$$= 0.6950$$

5.2. تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

اذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية (0،1،3،6) ونسحب منه عينة ذات مفردتين، $n=2$.

المطلوب:

أوجد متوسط وتباين المجتمع؟

أحسب عدد العينات الممكنة ومعالم العينة ($\mu_{\bar{x}}$, $\sigma_{\bar{x}}^2$) باستعمال طريقة الجداول (وقارن بين معالم المجتمع ومعالم العينة في الحالات التالية:

1. في حالة كان السحب بالإرجاع؟
2. في حالة كان السحب بدون ارجاع؟

التمرين الثاني:

اذا كانت أجور العاملين في مصنع للسيارات تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $\mu=100$ ألف دينار وانحراف معياري قدره $\sigma=75$ ألف دينار، تم اختيار وبدون ارجاع عينة عشوائية من 25 عاملا

المطلوب:

اذا كان عدد العمال العاملين في المصنع هو 60000 عامل، ما هو عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 130 ألف دينار في المجتمع؟

أوجد احتمال أن يكون متوسط الأجور في العينة أقل من 80 ألف دينار

أوجد احتمال أن يكون متوسط الأجور في العينة محصور بين 70 و130 ألف دينار.

التمرين الثالث:

أجريت دراسة على مجتمع للمراهقين حجمه 70 مراهقا، فأثبتت النتائج أن 28 مراهقا يعانون من البدانة، اذا تم أخذ عينة عشوائية مكونة من 10 مراهقين من هذا المجتمع.

المطلوب:

أوجد توزيع المعاينة لنسبة المراهقين الذين يعانون من البدانة.

أوجد احتمال أن تكون نسبة البدانة في العينة أقل من 35%.

أوجد احتمال ان تكون نسبة البدانة بين المراهقين في العينة محصورة بين 35 و 45%.

التمرين الرابع:

سجلت ادارة كلية العلوم الاقتصادية بجامعة الجزائر 1000 طالب في السنة الثانية، وبناءا على نتائج السنوات السابقة تبين أن معدلات الطلبة في مادة الاحصاء تتبع التوزيع الطبيعي واقترحت الادارة ان تكون نسبة الطلبة المتحصلين على المعدل في مقياس الاحصاء 60 % .اذا تم اختيار فوج من قسم علوم التسيير مكون من 30 طالبا.

المطلوب:

فما هو توزيع المعاينة للنسبة في هذا الفوج؟

ما هو احتمال أن لا تقل نسبة طلبة هذا الفوج المتحصلين على المعدل في هذه المادة على 70%

إذا علمت أن ادارة قسم علوم التسيير والتي يبلغ عدد الطلبة فيها من نفس السنة 300 طالبا تقترح نفس النسبة 60 % وباعتبار هؤلاء الطلبة يمثلون مجتمعا جديدا

أجب على نفس الاسئلة السابقة

ما هو تعليقك على النتائج؟

التمرين الخامس:

اذا كانت نسبة النجاح لطلبة السنة الاولى في كلية العلوم الاقتصادية بجامعة الجزائر هي 85% وكانت نسبة النجاح في كلية العلوم الانسانية من نفس الجامعة هي 80 % وتم سحب عينة عشوائية حجمها 100 طالب من كلية العلوم الاقتصادية وعينة أخرى حجمها 90 طالبا من كلية العلوم الانسانية

المطلوب:

أوجد احتمال أن تزيد نسبة النجاح في كلية العلوم الاقتصادية عن نسبة النجاح في العلوم الإنسانية بمقدار 10 % على الاكثر.

التمرين السادس:

إذا علمت أن وزن علبة طماطم ينتجها مصنع ما تتبع التوزيع الطبيعي ومعرفة بالشكل التالي $X_1 \sim N\ (100,850)$ ؛ بينما كان وزن علب الطماطم في مصنع آخر معرف بالشكل التالي $X_2 \sim N(835,60)$.

المطلوب:

ما هو التوزيع العيني للفرق بين متوسطي العينتين الأولى من المجتمع الأول حجمها 50، والثانية من المجتمع الثاني حجمها 30؟

ما هو احتمال أن لا يزيد الفرق بين المتوسطين عن 15؟

التمرين السابع:

اذا كانت رواتب المعلمين في وزارة التربية و التعليم تخضع لتوزيع طبيعي معدله 230 دج وانحراف معياري 36 دينار ورواتب المعلمين في المدارس الخاصة تخضع كذلك لتوزيع الطبيعي معدله 180 دج وانحراف معياري 40 دج؛

اخذت عينة عشوائية من المعلمين في الوزارة حجمها 16 معلما وعبرنا عن وسطها الحسابي بالرمز $\bar{X}$

واخذت عينة عشوائية من معلمي المدارس الخاصة حجمها 10 وعبرنا عن وسطها الحسابي بالرمز $\bar{Y}$.

المطلوب:

أوجد احتمال أن يزيد $\bar{X}$ عن $\bar{Y}$ بمقدار 60.