Chapitre I :

Définition de la Métrologie :

- C'est la branche de la science qui traite des mesures. On l'appelle une science appliquée qui permet à l'industriel de contrôler, influencer divers paramètres ou grandeurs .On la définit aussi comme un art de quantification.

I.1.Généralité sur les grandeurs :

Une grandeur physique X est un paramètre auquel on peu associer une mesure.

On appelle grandeur physique X une propriété discernable caractérisant un objet, un système ou un état physique.

I.2.Les systèmes d'unités :

1.2.1. Les unités fondamentales :

Unité de longueur : le mètre (m)

Unité de masse : le kilogramme (kg) : Le kilogramme est l'unité de masse.

Unité de temps : la seconde (s).

Unité de l'intensité du courant électrique : l'ampère (A).

Unité de température thermodynamique : le Kelvin (K).

Unité de quantité de matière : la mole (mol)

Unité d'intensité lumineuse : la candela: La candela est l'intensité lumineuse.

Grandeurs fondamentales	*Unité*	*Symbole*
Longueur (L)	*mètre*	*m*
Masse (M)	*kilogramme*	*kg*
Temps (T)	*seconde*	*s*
Intensité de courant électrique (I)	*ampère*	*A*
Température thermodynamique (θ)	*kelvin*	*K*
Quantité de matière (N)	*mole*	*mol*
Intensité lumineuse (J)	*candela*	*cd*

Le Système International d'unités (SI) :

Ce système est fondé sur un choix de sept unités de base bien définie considérées par convention indépendante du point de vue dimensionnel.

Le Système MKSA ou de Giorgi : quatre grandeurs et unités. Les grandeurs de base : longueur, masse, temps, intensité électrique. Les unités : Mètre, Kilogramme, Masse, Second, Ampère.

Le Système CGS :trois grandeurs et unités. Les grandeurs de base : longueur, masse, temps. Les unités : Mètre, gramme, Masse, Second.

1.2.2. Les unités dérivées : Les sept unités de base du système international sont les unités de base dont on obtient en combinant d'autres unités, appelées unités dérivées. Certains d'entre eux ont reçu un nom scientifique : newton, pascal, joule, volt, tesla, etc.

Grandeur	Unité	*Symbole*	
Fréquence	*hertz*	**Hz**	*Heinrich Hertz, Allemagne (1857-1894)*
Force	*newton*	*N*	*Issac Newton, Angleterre (1642-1727)*
Pression, contrainte	*pascal*	*Pa*	*Blaise Pascal, France (1623-1662)*
Energie, travail	*joule*	*J*	*James Joule, Angleterre (1818-1889)*
Puissance	*watt*	*W*	*James Watt, Ecosse (1736-1819)*
Quantité d'électricité, charge électrique	*coulomb*	*C*	*Charles de Coulomb, France (1736-1806)*
Potentiel électrique, tension électrique, force électromotrice	*volt*	*V*	*Alexandro Volta, Italie (1745-1827)*
Capacité électrique	*farad*	*F*	*Michael Faraday, Angleterre (1791-1867)*
Résistance électrique	*ohm*	*Ω*	*Georges Ohm, Allemagne (1789-1854)*
Conductance électrique	*siemens*	*S*	*Werner Von Siemens Allemagne (1816-1892)*
Flux d'induction magnétique	*weber*	*Wb*	*Wilhelm Weber, Allemagne (1816-1892)*
Induction (champ) magnétique	*tesla*	*T*	*Nicola Tesla, Yougoslavie (1857-1943)*
Inductance	*henry*	*H*	*Joseph Henry, Etats Unis (1797-1878)*
Flux lumineux	*lumen*	*lm*	

1.2.3. Unités supplémentaires : En plus de ces unités de base et dérivés, il existe des unités supplémentaires.

L'unité de l'angle plan : radians ; le radian est l'angle plan compris entre deux rayons sur la circonférence d'un cercle, interceptant un arc égal au rayon.
L'unité d'angle solide: le stéradian ; Un stéradian est un angle solide, centré sur le sommet de la sphère, qui coupe sur sa surface une aire égale à l'aire d'un carré par rapport au rayon de la sphère.
Les grandeurs "à angle plan" et "solide" doivent être des unités sans dimension qui ne peuvent pas être utilisées dans l'expression de l'unité dérivée.

I.3.Dimension des grandeurs

Dimension : La dimension caractérise la nature de la grandeur et définit les unités utilisables.

Les dimensions caractérisent la nature des grandeurs et des unités utilisables

I.3.Dimension d'une grandeur :

Définition : On associe à chaque grandeur x une dimension notée [G] permettant l'analyse dimensionnelle du système ([G] la dimension de la grandeur G)

Exemple: l'unité d'une Longueur est le kilogramme sa dimension est M on écrit: dim[m]=[m]=M.
relie aussi l'unité dérivée g aux unités fondamentales l m t. La dimension est représentée par ce symbole : [ ]

Equation aux dimensions : est une équation reliant la dimension d'une grandeur physique dérivée G à celle des grandeurs de fondamentales L, M, T. Elle perme de trouver la dimension d'une grandeur physique. Elle relie aussi l'unité dérivée g aux unités fondamentales l m t. La dimension est représentée par ce symbole : [ ]

$G = L^a M^b T^c I^d \theta^e N^f J^k$

D'où L,M,T,I,θ,N, J sont les dimensions de bases.

a, b, c, d, e, f, k : Nombres naturelles (0, 1,2,….)

Utilité de l'équation aux dimensions : elle permet de vérifier la cohérence d'une formule ou d'une relation : comme le système d'unités dérivées est cohérent, il en résulte que : [1ermembre] = [2ème membre]. Chaque membre d'une relation doit évidemment avoir la même dimension.

Grandeur	Nom	Symbole	Dimension
Longueur	mètre	m	L
Masse	kilogramme	kg	M
Temps	seconde	s	T
Intensité du courant électrique	ampère	A	I
Température thermodynamique	kelvin	K	Θ
Quantité de matière	mole	mol	N
Intensité lumineuse	candela	cd	J

Quelques propriétés :

-On ne peut additionner que les termes ayant la même dimension.

-Certaines grandeurs n'ont pas de dimension comme certaines constantes, attention pas toutes les constantes. Les fonctions mathématiques comme par exemple sin, cos, tan, exp, log n'ont pas de dimension : [sin] = 1 ; [cos] = 1…... Leurs arguments x non plus : sin(x), cos(x), tan(x), exp(x), log(x) etc donc : [x] = 1.

-La dimension d'un produit de deux grandeurs est égal au produit de leurs dimensions $[A \times B] = [A] \times [B]$

-La dimension de G^n est la dimension de G puissance n (n sans dimension). $[G^n]= [G]^n$.

-$\left[\frac{dA}{dx}\right] = \frac{[A]}{[x]}$

- Une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension. A=b⇒ $[A]$=$[B]$.

-Une expression non homogène est nécessairement A≠b⇒ $[A] \neq [B]$. .fausse

Donc on peut permettre d'éliminer les résultats faux mais on peut pas confirmer qu'une expression est nécessairement juste.

Exemple :

-La relation d'Einstein $E=mc^2$ $[E]= [mc^2]=ML^2T^{-2}$⇒équation homogène.

-$E=mc^5$;$[E]= ML^2T^2$et $[mc^5]=ML^5T^{-5}$équation non homogène équation nécessairement fausse.

-Si on met $E=\frac{1}{3}mc^2$équation homogène mais fausse.

Remarque : Une équation homogène n'est pas nécessairement juste.

1.4. Erreurs et incertitudes

1.4. a. Erreur absolue et erreur relative :

L'erreur absolue d'une grandeur G mesurée est la différence ΔG entre la valeur expérimentale (mesurée) et une valeur référentielle considérée comme une valeur exacte.

$$\Delta G = G_{mes} - G_{ref}$$

Dans la pratique, la valeur exacte étant inaccessible, on l'approche en effectuant la moyenne d'une série de mesures de la grandeur G

$$G_{ref} = G_{moy} = \frac{\sum_1^n G_i}{n}$$

G_i : Sont les valeurs obtenues lors de la série des n mesures effectuées.

L'erreur relative : C'est le quotient de l'erreur absolue à la valeur de référence. L'erreur relative est sans dimension; elle s'exprime généralement en terme pourcentage (%).

$$\text{erreur}_{\text{relative}} = \frac{\Delta \text{G}}{\text{G}_{\text{ref}}}$$

1.4. b. Incertitude absolue et incertitude relative :

L'incertitude absolue : on appelle incertitude sur la mesure de G est l'erreur maximale susceptible d'être commise dans l'évaluation de G.

$$\Delta \text{G} = \frac{G_{max} - G_{min}}{2}$$

L'incertitude relative :c'est le rapport de l'incertitude absolue par rapport à la valeur mesurée.

$$\text{Incertitude}_{\text{relative}} = \frac{\Delta \text{G}}{\text{G}_{\text{mes}}}$$

1.4. C. Quelques propriétés :

-Cas d'une somme ou d'une différence Si $G = A + B \Rightarrow \Delta G = \Delta A + \Delta B$, et Si $G = A - B \Rightarrow \Delta G = \Delta A + \Delta B$

Autrement dit, l'incertitude absolue sur la somme ou la différence de deux grandeurs est égale à la somme des incertitudes absolues de ces grandeurs.

Cas d'un produit, d'un rapport ou d'une puissance Supposons maintenant que la grandeur cherchée G soit le résultat du calcul suivant :

$$G = K\,\frac{A^\alpha B^\beta}{C^\gamma}$$

Où A, B et C sont des grandeurs que l'on mesure et k est une constante. Dans ce cas l'incertitude relative sur le résultat s'obtient selon la démarche suivante : Nous appliquons la fonction logarithme aux deux membres de la relation

$$Log\ G = Log\left(K\,\frac{A^\alpha B^\beta}{C^\gamma}\right) = Logk + \alpha\ logA + \beta\ logB - \gamma \log C$$

La différentielle de l'expression donne :

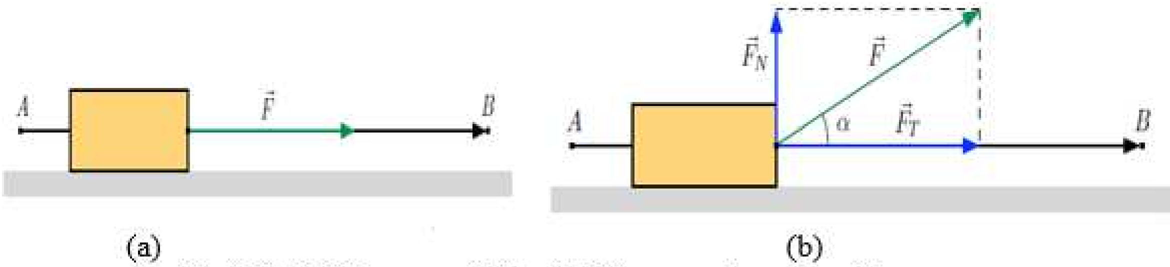
$$\frac{\Delta G}{G} = \alpha\frac{\Delta A}{A} + \beta\frac{\Delta B}{B} + \gamma\frac{\Delta C}{C}$$

Autrement dit, l'incertitude relative sur un produit ou un rapport de deux grandeurs est égale à la somme des incertitudes relatives de ces grandeurs. La valeur corrigée de G serait donc:

$$G_{corrigée} = G \pm \Delta G$$

II.1. Travail d'une force :

<u>Définition :</u> Le travail d'une force constante pour un déplacement rectiligne AB de son point d'application est le produit scalaire de F par AB. IL est note:



Fig(I.1): (a) Force parallèle. (b)Décomposiion d'une Force

$$W(\vec{F}) = F.AB = F.AB.\cos\alpha \begin{cases} W_{AB}(\vec{F}) : \text{ travail exprimé en Joules (J)} \\ F : \text{ valeur de la force en Newton (N)} \\ AB : \text{ longueur du déplacement (m)} \\ \alpha : \text{ angle entre F et AB (° ou rad)} \end{cases}$$

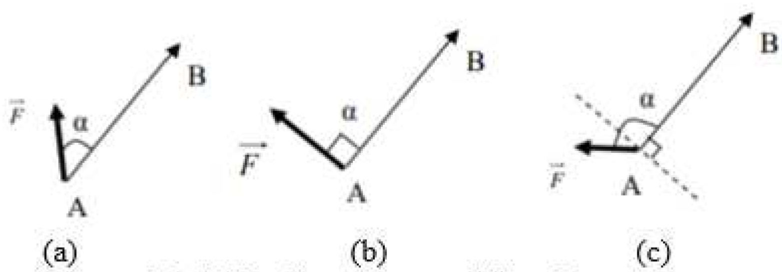
<u>Propriétés :</u>

Selon la valeur de l'angle α, avec 0 ≤ α ≤ 180◦. Le travail d'une force est positif, négatif ou nul :

α< 90°: cos α> 0 ==⇒W($\vec{F}$)> 0 (Travail positif) (figure a). La force favorise le mouvement, son travail est dit moteur.

α = 90°: cos α = 0 ==⇒W($\vec{F}$)= 0 (travail nul) (figure b). La force ne travaille pas.

α> 90°: cos α< 0 ==⇒ =W($\vec{F}$)< 0 (travail négatif). (Figure c). La force s'oppose au mouvement, son travail est dit résistant.



Fig(II.2): Signe du travaild'une Force

II.2.Energie Cinétique :

L'énergie cinétique d'une particule M de masse m et de vecteur vitesse$\vec{V}$ (M) est le scalaire E_c définit par:

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2} m v^2}$$

Le théorème de l'énergie cinétique : Lorsqu’un corps se déplace entre deux points A et B, sous l'action d'une force résultante$\vec{F}$, le travail de cette force est, quelque soient le chemin suivi et la nature des forces, égal à la variation de l'énergie cinétique du corps.

$$\Delta Ec|_A^B = \sum_i W_i\left(\vec{F}_i\right)_A^B = W_1\left(\vec{F}_1\right)_A^B + W_2\left(\vec{F}_2\right)_A^B + W_3\left(\vec{F}_3\right)_A^B + \ldots$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{dE_c = dw}$$

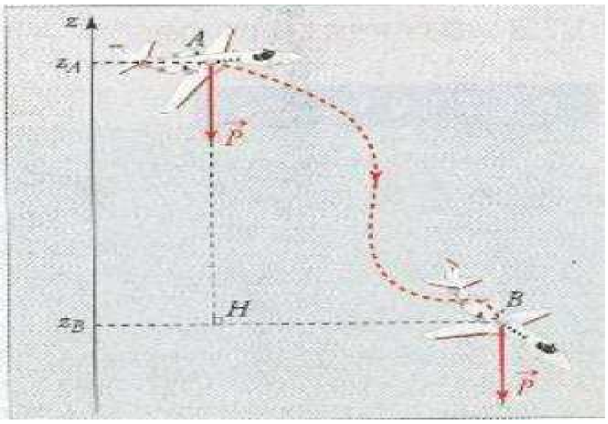
II.3.Energie potentielle:

II.3.a. Energie potentielle de pesanteur: Considérons le travail du poids d’un solide lors du déplacement de son centre de gravité G de A vers B.

Calculons le travail du poids au cours de son déplacement entre A et B :

$dE_p = W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = \vec{P}.(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})$

$\Longrightarrow dE_p$ =m.g. $(z_A - Z_B)$= m.g.h



II.3.b. Energie potentielle élastique:

La tension du ressort est une force variable, on doit donc calculer son travail en intégrant sur le chemin suivi :

Soit un ressort de raideur k sur lequel la tension du ressort est une force variablesur l’axe x dont l’origine correspond au ressort détendu. Le point d’application de cette force se déplace se déplace de A en B sur l’axe x avec $x_A < x_B$:

$$F_x = k\,x$$

(a) (b)

Fig (II.3): (a)Ressort détendu avec Fx = 0 (b)Ressort allongé avec Fx > 0

Le travail qu’elle effectue est égal à l’aire du trapèze délimité par la droite entre x_A et x_B :

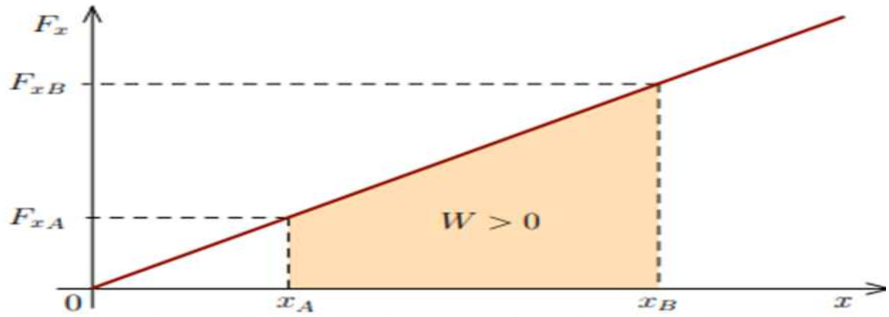
$W_{AB}(\vec{F}) = \frac{1}{2}(F_{xA} + F_{xB})(x_B - x_A)$

$= \frac{1}{2}(kx_A + kx_B)(x_B - x_A) = \frac{1}{2}k(x_A + x_B)(x_B - x_A)$

Le produit de la somme et de la différence est égal à la différence de deux carrés :

$W_{AB}(\vec{F}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{k}\,(x_B^2 + x_A^2)$

$W_{AB}(\vec{F}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{k}x^2$



Fig(II.4): Représentation de la force en fonction de l'allongement

II.4.Conservation de l'énergie mécanique totale :

II.4.a. définition : On appel énergie mécanique d'un corps M la somme de ses énergies cinétique E_c et potentielle E_p.

$$\boldsymbol{E_m = E_c + E_p}$$

II.4.b. Conservation de l'énergie mécanique totale :Dans les systèmes de la mécanique Newtonienne soumis à des forces conservatives, la somme des énergies cinétiqueE_c e énergies potentielles E_p est constante, elle demeure inchangée sous l'action de force conservatives uniquement.

$$E_{m_f} - E_{m_i} = 0 \Rightarrow E_{m_f} = E_{m_i} \Rightarrow E_{c_i} + E_{p_i} = E_{c_f} + E_{P_f}$$

$$\boldsymbol{\Delta E_c + \Delta E_p = 0}$$

L'énergie mécanique totale d'une particule soumise à des forces conservatives est constante.

II.5.Relation masse-énergie :

II.5.a. L'énergie au repos: À partir de l'hypothèse d'Albert Einstein, on peut définir l'énergie de masse au repos E_0 d'un corps grâce à l'expression suivante :

$$\mathbf{E_0 = mc^2}$$

Où E_0 : Énergie de masse d'un objet au repos (J)

m : Masse de l'objet au repos (kg).

c : Vitesse de la lumière (c=3.108 m/s).

II.5.b.La variation de l'énergie du système :On déduit que la variation de masse d'un système au repos correspond à une variation de son énergie de masse ΔE telle que : $\boldsymbol{\Delta E = c^2 \Delta m}$

II.6.La 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton en relativité à une dimension :

En mécanique classique, l'accélération d'un objet est proportionnelle à la somme des forces appliquées sur l'objet et inversement proportionnelle à son inertie ($\sum \vec{F}$=m$\vec{a}$). En mécanique relativiste, cette relation n'est plus valide, car la vitesse de l'objet influence l'efficacité de l'accélération par l'intermédiaire d'un facteur γ . Voici l'expression de la 2ième loi de Newton en mécanique relativiste :

$$\boldsymbol{\sum \vec{F} = \gamma m \vec{a}}$$

II.6.a. Cas d'une force parallèle : La 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton en relativité une dimension « Lorsqu'un objet se déplace seulement selon l'axe x et qu'il subit à la présence d'une force alignée uniquement selon l'axe x (la force perpendiculaire à la vitesse alors la 2ième loi de Newton se simplifie à une équation à une dimension :

$$F_x = \gamma_x^3 m a_x$$

II.6.b. Cas d'une force perpendiculaire : Lorsqu'un objet se déplace seulement selon l'axe x et qu'il subit la présence d'une force alignée uniquement selon l'axe y (force perpendiculaire à la vitesse), alors la 2ième loi de Newton se simplifie à une équation à une dimension :

$$F_y = \gamma_x^3 m a_y$$

II. 7.Energie totale et énergie cinétique en mécanique relativiste :

II.7.a. L'énergie cinétique en relativité :

À partir de la 2ième loi de Newton sous sa forme relativiste et de la définition du travail, nous pouvons évaluer l'augmentation de l'énergie cinétique d'un objet soumis à une force appliquée sur un déplacement :

$$\mathbf{K = (\gamma - 1)\, mc^2}$$

Où

K : Énergie cinétique relativiste (J).

m : Masse de l'objet au repos (kg).

γ : Le facteur gamma avec vitesse de l'objet. $\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

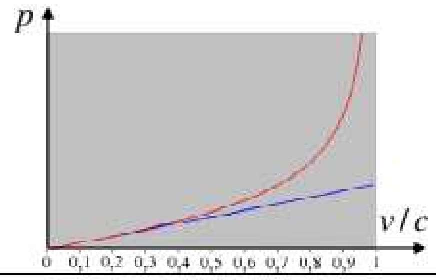
v : Vitesse de la particule (m/s).

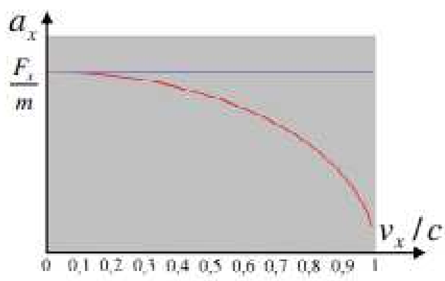
c: Vitesse de la lumière

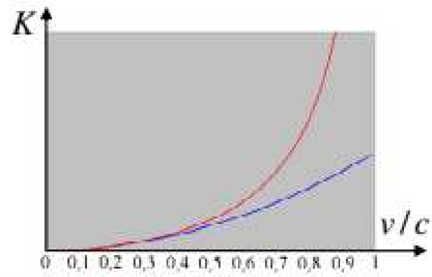
II.7.b. Classique et relativité

La mécanique classique (Newtonienne) représente une approximation à basse vitesse de la mécanique relativiste. Elle est valide seulement lorsque la vitesse de l'objet par rapport au référentiel de mesure est beaucoup inférieure à la vitesse de la lumière (v<< c).

Analysons graphiquement à quelle vitesse l'équation classique diverge de la solution relativiste :

Quantité de mouvement	
Équation classique : (**bleu**) $p = mv$ Équation relativiste : (**rouge**) $p = \gamma m v$	

2ième loi de newton classique, force parallèle au mouvement selon l'axe *x*	
Équation classique : (**bleu**) $F_x = m a_x \Rightarrow a_x = F_x / m$ Équation relativiste : (**rouge**) $F_x = \gamma_x^3 m a_x \Rightarrow a_x = F_x / \gamma_x^3 m$	

Énergie cinétique	
Équation classique : (**bleu**) $K = \frac{1}{2} m v^2$ Équation relativiste : (**rouge**) $K = (\gamma - 1) m c^2$	

Vérifions que l'expression classique de l'énergie cinétique K peut s'obtenir à partir de l'expression relativiste et de l'approximation des petites vitesse : (v<< c) :

$$K = (\gamma - 1) mc^2 \quad \Rightarrow \quad K = \gamma mc^2 - mc^2 \qquad (\text{Distribuer } mc^2)$$

$$\Rightarrow \quad K \approx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) mc^2 - mc^2 \qquad \left(\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2,\ v/c \ll 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad K \approx \frac{1}{2} mv^2 \quad \blacksquare \qquad (\text{Simplification})$$

II.7.c.L'hypothèse d'Albert Einstein :En analysant l'expression de l'énergie cinétique relativiste K =$(\gamma - 1)mc^2$, on réalise que cette expression peut être décomposée en deux termes : terme dépendant de la vitesse et terme indépendant de la vitesse. Albert Einstein émit l'hypothèse que l'expression indépendante de la vitesse menait à la découverte d'une nouvelle forme d'énergie jamais considérée auparavant : énergie de masse.

Bien qu'à première vue, cette énergie n'est que le résultat mathématique d'une constante d'intégration, elle fut observée lors d'expérience sur la force nucléaire plusieurs années plus tard.

Voici un calcul qui peut mener Albert Einstein au terme d'énergie de masse E_0 :

$$K = (\gamma - 1) mc^2 \quad \Rightarrow \quad K = \gamma mc^2 - mc^2 \qquad (\text{Distribuer } mc^2)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma mc^2 = K + mc^2 \qquad (\text{Isoler } \gamma mc^2)$$

$$\Rightarrow \quad E = K + E_0 \quad \blacksquare \qquad (\text{Remplacer } E = \gamma mc^2,\ E_0 = mc^2)$$

II.6.d. L'énergie totale relativiste:

En relativité, nous pouvons définir l'énergie totale *E* associée à un corps en mouvement grâce à l'expression suivante. Cette énergie regroupe l'énergie cinétique *K* et énergie de masse E_0 :

$$\boldsymbol{E = \gamma\, mc^2}$$

Où E : Énergie totale d'un objet en mouvement (J).($E = K + E_0$)

γ : Facteur gamma avec vitesse ordinaire de l'objet.$\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)$

m : Masse de l'objet au repos (kg)
c : Vitesse de la lumière (c=3.10^8 m/s).
II.7.d. L'énergie totale et la quantité de mouvement :
À partir de l'énergie totale E associée à un corps, nous pouvons établir une relation entre cette énergie et la quantité de mouvement :

$$\boldsymbol{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$

Où E : L'énergie totale d'un objet (masse et cinétique) (J).

p : Quantité de mouvement relativiste (Kg.m/s) (p = γ mv)

m : Masse de l'objet au repos (kg)

c : Vitesse de la lumière (c=3.10^8 m/s).

Chapitre III :

III.1. Passage du champ au potentiel :

A chaque point de l'espace M(x, y, z) sont associés deux fonctions, l'une vectorielle et l'autre scalaire, qui permettent de décrire l'espace électrique:
Le champ $\vec{E} = \vec{E}$ (x, y,z); le potentiel V = V (x, y,z)
Cela permet de calculer V à partir du champ $\vec{E}$:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

III.2. Champ et potentiel de gravitation :

Soi un système $\mathbf{S_d}$ de points matériels $\mathbf{P_i}$ de masses graves mi* $\boldsymbol{m_i^*}$et de positions{ri = OP_i}. Ce système exerce sur un autre point matériel **A**, de masse grave **m***, repéré par **r= OA**, une force **F** égale à la somme vectorielles des forces exercées par chacun des points.

$\boldsymbol{\sum_i F_{P_{i\to A}} = -Gm^* \sum_i \frac{m_i^*}{P_iA^2}\left(\frac{P_iA}{P_iA}\right) = -Gm^* \sum_i \frac{m_i^*}{R_i^2}\left(\frac{R_i}{R_i}\right)}$avec $\boldsymbol{R_i = P_iA = r - r_i}$

III.2. a. Champ de gravitation G:

Par définition, le champ de giraviation G produit par l'ensemble S des points matériel est la force de giraviation qu'exerce S sur A par unité de masse :

$$G = \frac{F}{m^*} = -G\sum_i \frac{m_i^*}{P_iA^2}\left(\frac{P_iA}{P_iA}\right) = -G\sum_i \frac{m_i^*}{R_i^2}\left(\frac{R_i}{R_i}\right)$$

III.2. b. Le potentiel de gravitation Φ:

Evaluons le travail élémentaire $\boldsymbol{\delta w}$ de la force **F** exercée sur le point matériel**A** par l'ensemble fixe$\{\boldsymbol{P_i}\}$ lorsque **A** se déplace de **dr**. Comme les vecteurs r_i sont fixes :
dr=dR_i et δw =F.dr =F.$dR_i = \boldsymbol{-Gm^*} \sum_i \frac{m_i^*}{R_i^2}\left(\frac{R_i}{R_i}\right), dR_i = \boldsymbol{-Gm^*}\sum_i \frac{m_i^*}{R_i^2}\; dR_i$
Puisque $R_i . dR_i = R_i dR_i$ .Il en résulte que :
$\delta w = -Gm^* \sum_i m_i^*\; d\left(-\frac{1}{R_i}\right) = d\left(m^* G \sum_i \frac{m_i^*}{R_i}\right)$ avec$P_t = P_I A$
Ainsi que δw présente sous la forme d'une différentielle (totale exacte) : La force **F** dérive donc d'une énergie potentielle de giraviation E_p.

$\delta w = -dE_p$avec$E_P = -m^* G \sum_i \frac{m_i^*}{R_i} + Cte$

Par définition, le potentiel de giraviation Φest l'énergie potentielle par unité de masse grave.

$$\Phi = \frac{\mathrm{E_p}}{\mathrm{m^*}} = -\mathrm{G} \sum_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{m_i^*}}{\mathrm{R_i}} + Cte$$

Comme E_P, Φ est défini à une constante additive prés, que l'on fixe en choisissant une origine des potentiels. Il est naturel de poser E_P= 0 lorsque les masses sont infiniment éloignées les unes des autres ; alors la constante est nulle :

$$\Phi = -G \sum_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{m_i^*}}{P_i A} \text{ ou } \Phi = -G \int_{\mathrm{v}} \frac{\rho^* \mathrm{d}\nu}{PA}$$

Si la distribution de charge est continue, P étant le point courant de la distribution.

Différence de potentiel électrique et champ électrique :

Une différence de potentiel électrique ΔV est la conséquence d'effectuer un déplacement $\vec{s}$ dans un champ électrique$\vec{E}$. C'est uniquement un déplacement parallèle au champ électrique qui fait varier le potentiel électrique (Rappel du produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:$\vec{A}.\vec{B}= |\vec{A}|.|\vec{B}| \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y$). Un déplacement dans le sens du champ électrique fait chuter le potentiel électrique et un déplacement dans le sens contraire du champ électrique fait augmenter le potentiel électrique :

$\Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{s} = -Es\cos(\theta)$ (Champ $\vec{E}$ constant)

$\Delta V = \int -\vec{E}\cdot d\vec{s}$ (Champ $\vec{E}$ non constant)

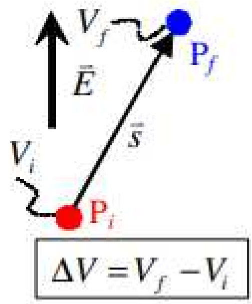
Où ΔV : Différence de potentiel électrique associé au champ $\vec{E}$ (V)

$\vec{E}$: Champ électrique (N/C).

$\vec{s}$: Déplacement dans le champ $\vec{E}$ en P_i et P_f (m).

$d\vec{s}$: Petit élément de déplacement dans le champ $\vec{E}$ (m)

θ: Angle entre le champ électrique $\vec{E}$ et le déplacement $\vec{s}$



III.3.Le champ électrique à partir du potentiel :

Puisque la variation du potentiel électrique est obtenue à partir d'un déplacement dans un champ électrique, nous pouvons obtenir le champ électrique à partir d'une variation de potentiel électrique en effectuant l'opération mathématique inverse. Selon l'axe *x*, le champ électrique E_x correspond à la variation du potentiel électrique d entre deux positions de V l'axe x divisé par la distance d entre ces deux positions :

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Où E_x : Champ électrique selon l'axe x (N/C ou V/m).
dV : Variation du potentiel électrique entre deux positions de l'axe *x* (V).
dx : Variation de position entre les deux positions de l'axe *x* (m).

Chapitré IV : Quantité de mouvement-Moment cinétique

La quantité de mouvement d'une particule es définit comme étant le produit de sa masse par son vecteur vitesse : $\vec{p} = m\vec{v}$.

Pour un système constitué de N particules, on défini la quantité de mvt :$\vec{p}_t = \sum_1^N \vec{P_i}$

La quantité de mouvement est un vecteur ayant la même direction et le même sens que la vitesse.

Principe de la conservation de la quantité de mouvement :

Soit une particule de masse m et de vitesse v au temps t et v' au temps t' pendant l'intervalle de tempsΔt, il y a une variation de la vitesse $\Delta\, v = v' - v$; $\Delta\, p = p' - p = m\Delta v$.

Si nous avons deux particules de masses m_1 et m_2 interagissons entre eux, on peu écrire :

$$\Delta p_1 = m_1(v_1' - v_1)$$
$$\Delta p_2 = m_2(v_2' - v_2)$$
$$\Delta p_1 = -\Delta p_2$$
$$\begin{cases} \Delta p_1 = p_1' - p_1 \\ \Delta p_2 = p_2' - p_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta \mathrm{p}_1 = -\Delta p_2 \Leftrightarrow (\mathrm{p}_1' - \mathrm{p}_1) = -(\mathrm{p}_2' - \mathrm{p}_2)$$
$$\Leftrightarrow \quad p_1' - p_1 = p_2 - p_2'$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{p}_1' + \mathrm{p}_2'}_{\mathrm{t}'} = \underbrace{\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2}_{\mathrm{t}}$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{totale}} = \mathrm{cste}$$

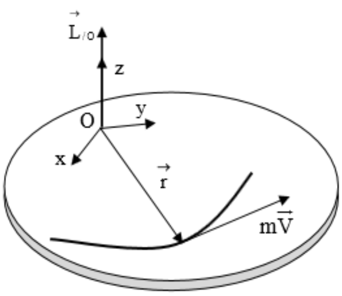
La quantité de mouvement totale d'un système de deux particules soumises uniquement à leur interaction mutuelle, ce résulta constitue le principe de la conservation de la quantité de mouvement.

$$\vec{p}_t = \sum_{1}^{N} \overrightarrow{p_i} = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$$

IV.2.Moment cinétique :

IV.2.1.Définition : En supposant qu'une particule de masse m se trouve en un point défini par le vecteur de position $\vec{r}$ et se déplace avec une vitesse $\vec{v}$, son moment cinétique $\vec{L}$, par rapport à l'origine O, est défini par : $\overrightarrow{L_{/0}} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

Le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\vec{r}$ et $\overrightarrow{p}$ et orienté de façon à ce que le trièdre $(\vec{r}, \vec{L}, \vec{p})$soit direct et son module est:



$\left|\overrightarrow{L_{/0}}\right| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin[\vec{r}, \vec{p}]$

IV.2.2.Théorème du moment cinétique pour une particule :

La dérivée du moment cinétique s'obtient en appliquant les règles de dérivation des produits de fonctions :

$$\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt} = \frac{d\left(\vec{r} \times \vec{\mathcal{P}}\right)}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\mathcal{P}}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}\right)$$

Remarquons que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\mathcal{P}} = \vec{V} \times m\vec{V} = 0$$

et, en vertu de la deuxième loi de Newton,

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

La dérivée du moment cinétique se réduit alors à la forme

$$\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Où $\vec{F}$ est la résultante des forces extérieures appliquées sur la particule. De la définition du moment de $\vec{F}$ par rapportt à l'origine

$$\vec{\tau}_{/O}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Il en résulte que :

$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{\tau}_{/O}(\vec{F})$$

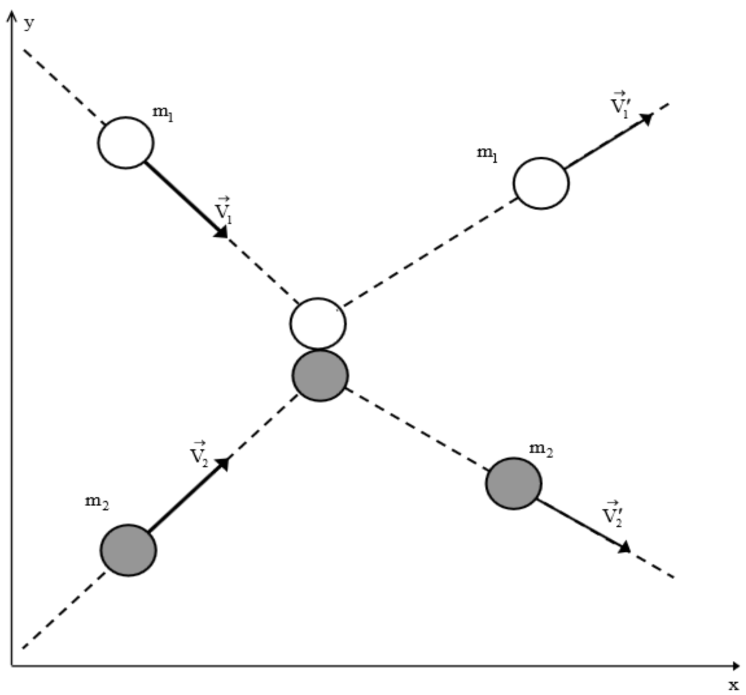
IV.3. Théorème de la conservation :

IV.3.a. Cas d'une particule

Principe de conservation de la quantité de mouvement : une particule libre se déplace avec une quantité de mouvement constante.

Un corps isolé a de l'inertie et se déplace donc à une vitesse constante, ce qui implique qu'il conserve sa quantité de mouvement.

La figure IV.2 représente une collision entre deux particules réalisée dans les conditions de frottements « nuls » sur un plan horizontal.



Fig(IV.2)

Considérons le système composé de deux particules.. Pour pouvoir lui appliquer le principe de conservation de la quantité de mouvement, la force extérieure agissant sur lui doit être nulle. Les forces appliquées sur les deux particules sont le poids et la force de contact avec le plan horizontal.

Fig(IV.3)

Lorsque le mouvement est maintenu dans le plan horizontal, cela signifie_ qu'aucune des deux forces ne l'emporte sur l'autre et que leur somme vectorielle est nulle. Le bilan des forces extérieures est alors :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \underbrace{\vec{P}_1 + \vec{C}_1}_{0} + \underbrace{\vec{P}_2 + \vec{C}_2}_{0} = 0$$

Remarque : Cette relation est également vérifiée durant le choc car la force exercée par m_1 sur m_2 et celle appliquée par m_2 sur m_1 sont des forces internes au système formé par les deux masses.

La résultante des forces externes agissant sur le système étant nulle, nous pouvons lui appliquer le principe de conservation de la quantité de mouvement, soit :

$$\underbrace{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}_{\vec{\mathcal{P}}_t} = \underbrace{m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2'}_{\vec{\mathcal{P}}_t'}$$

Puisqu'il s'agit d'une équation vectorielle, la conservation de la quantité de mouvement vaut pour chaque composante :

$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 V_{1x}' + m_2 V_{2x}'$$
$$m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} = m_1 V_{1y}' + m_2 V_{2y}'$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement est illustré par la figure IV.4

Fig(IV.4)

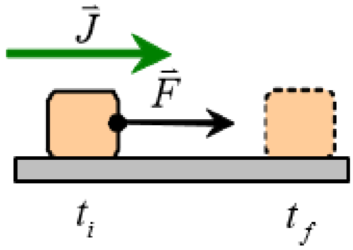
Principe de conservation de la quantité de mouvement : Ce principe peut être étendu à un système formé d'un nombre quelconque de particules : La quantité de mouvement totale d'un système isolé de plusieurs particules est constante.

$$\text{Si} \quad \sum \vec{F}_{ext} = 0, \quad \text{alors} \quad \vec{\mathcal{P}}_t = \sum \vec{\mathcal{P}}_i = \text{ constante}$$

IV.4. <u>L'impulsion d'une force :</u>

IV.4. a. L'impulsion d'une force constante : L'impulsion est le transfert de quantité de mouvement causé par une force $\vec{F}$ appliquée durant un intervalle de temps Δt :

$$\vec{J} = \vec{F}\,\Delta t$$



où $\vec{J}$: Impulsion appliquée sur un objet (Ns ou kg · m/s).

$\vec{F}$: Force qui effectue l'impulsion (N).

Δt : Durée d'application de la force ($\Delta t = t_f - t_i$) (s).

IV.4. b. Conservation de la quantité de mouvement avec impulsion : Puisque qu'une impulsion produit une variation de la quantité de mouvement, nous pouvons ajouter ce terme à notre théorème de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{J}_{ext}$$

où $\vec{p}_f$: Quantité de mouvement final (Ns ou kg · m/s)

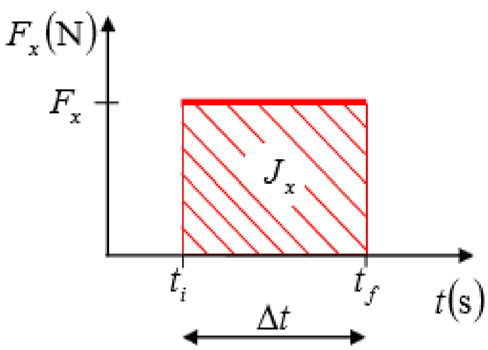
$\vec{p}_i$: Quantité de mouvement final (Ns ou kg · m/s)

$\vec{J}_{ext}$: Impulsion totale extérieure appliquée (Ns ou kg · m/s)

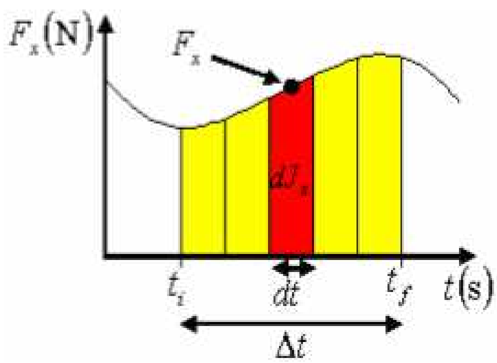
IV.4. c. Impulsion d'une force non constante

Pour évaluer l'impulsion $\vec{J}$ d'une force $\vec{F}$, nous avons besoin d'évaluer l'aire sous la courbe d'un graphique de force en fonction du temps t. Ce calcul peut s'effectuer grâce à l'intégrale d'une fonction $F_x(t)$:

Force constante dans le temps :



Force non constante dans le temps :



Équation : $J_x = F_x \Delta t$

Équation : $J_x = \int_{t=t_i}^{t_f} F_x dt$

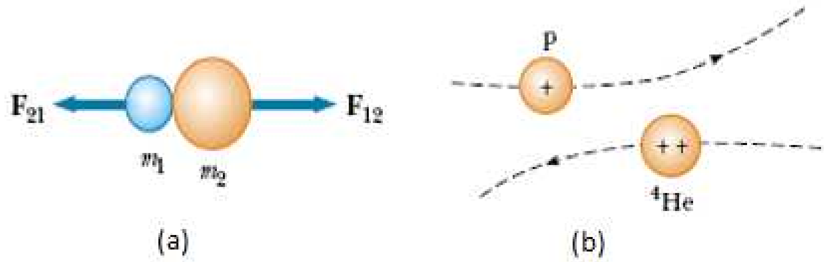
Sous forme vectorielle, l'impulsion prend la forme suivante :

$$\vec{J_x} = \int_{t=t_i}^{t_f} \vec{F_x}\, \mathrm{dt}$$

IV.5.Etude des chocs :

IV.5.1. Définition : Les collisions et les chocs sont des interactions dans lesquelles des objets agissent les uns sur les autres, sur une courte période de temps, des forces en interaction. Ces dernières sont relativement élevées par rapport à celles provenant de l'environnement extérieur au système formé par les particules en interaction.

La collision entre deux particules a lieu lorsqu'elles se dirigent l'une vers l'autre pour se percuter. Une collision peut se produire avec un contact physique (cas de la figure V.1.a), comme elle peut se produire par interaction à distance (cas de la figure V.1.b). Dans ce dernier cas l'interaction a lieu avec une force de très courte portée.



Fig(IV.)

La figure V.1.b représente une collision par interaction à distance entre un proton et le noyau d'un atome d'hélium. Les deux particules portant des charges de même signe ne peuvent pas entrer en contact physique en raison des forces électrostatiques, très fortes, qu'elles subissent lorsqu'elles sont très proches l'une de l'autre.

IV.5.2. L'impulsion et la quantité de mouvement :

Considérons un système constitué de deux particules qui entrent en interaction. Pour chaque particule, nous avons vu qu'en mécanique newtonienne, la relation entre la force et le mouvement est donnée par la 2e loi de Newton:

$$\vec{R} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$$

Où $\vec{R}$ est la résultante des forces extérieures appliquées sur la particule. Cette dernière subit une force ext $\vec{F}$ provenant de l'environnement extérieur et une force $\vec{F}$ provenant de l'action de l'autre particule (figure V.2) :

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_{ext}$$

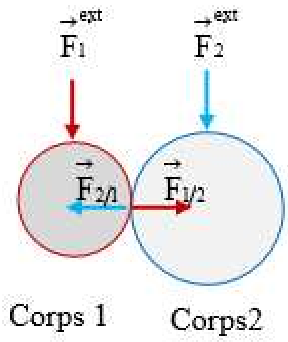


Figure V.2

On a alors :

$$d\vec{\mathcal{P}} = \vec{R}\,dt$$

La variation de la quantité de mouvement entre le début de l'interaction à l'instant t_i et sa fin correspondant à l'instant t_f, s'obtient en intégrant cette relation :

$$\Delta\vec{\mathcal{P}} = \int_{\mathcal{P}_i}^{\mathcal{P}_f} d\vec{\mathcal{P}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}\,dt$$

L'intégrale du membre de droite qui mesure à la fois la force de l'interaction et la durée de l'interaction est appelée impulsion $\vec{I}$ de la force$\vec{R}$ qui est la résultante des forces et F_{ext} :

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}\,dt$$

Théorème: La variation de la quantité de mouvement d'une particule est égale à l'impulsion de la résultante des forces qui agissent sur la particule durant l'intervalle de temps considéré.

Remarque : Nous pouvons développer la relation (V.3) en écrivant :

$$\Delta\vec{\mathcal{P}} = \int_{\mathcal{P}_i}^{\mathcal{P}_f} d\vec{\mathcal{P}} = \int_{t_i}^{t_f} \left(\vec{F} + \vec{F}_{ext}\right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt + \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext}\,dt$$

En général, la durée des chocs est suffisamment faible pour que l'impulsion des forces extérieures ne provoque pas une variation de quantité de mouvement significative. Il devient raisonnable de considérer que le système des deux particules est isolé et d'écrire :

$$\Delta\vec{\mathcal{P}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = \text{impulsion de } \vec{F}$$

Cette relation vaut pour chaque composante :

$$\Delta\mathcal{P}_x = I_x = \int_{t_i}^{t_f} F_x dt$$

$$\Delta\mathcal{P}_y = I_y = \int_{t_i}^{t_f} F_y dt$$

$$\Delta\mathcal{P}_z = I_z = \int_{t_i}^{t_f} F_z dt$$

Si l'on s'intéresse maintenant au système formé par les deux particules, la variation de la quantité de mouvement totale durant l'interaction est :

$$\Delta\vec{\mathcal{P}}_{12} = \int_{t_i}^{t_f} \left(\underbrace{\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1}}_{0} \right) dt = 0$$

En effet, en vertu de la troisième loi de Newton, la force $\overrightarrow{F_{1/2}}$ exercée par la particule « 1 » sur la particule « 2 » est opposée à $\overrightarrow{F_{2/1}}$ exercée par la particule « 2 » sur la particule « 1 ». Le principe de conservation de la quantité de mouvement du système formé par les deux particules est donc vérifié au cours de la collision.

IV.5.3. Collisions des particules isolées :

On doit pouvoir diviser le temps ainsi : avant, durant et après la collision, comme le suggère la figure V.3.

Ici, le principe de conservation de la quantité de mouvement du système formé par les particules est donc vérifié avant et après la collision.

$$\underbrace{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}_{\vec{\mathcal{P}}} = \underbrace{m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2}_{\vec{\mathcal{P}}'}$$

IV.5.4. Collisions élastiques

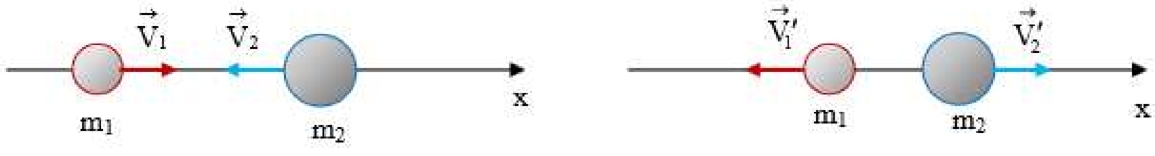
Dans une collision élastique entre éléments d'un système isolé, l'énergie cinétique et la quantité de mouvement totales se conservent. Les collisions élastiques se produisent lorsque les forces d'interaction entre les particules impliquées sont conservatives. lorsque les particules entrent en collision, une partie de l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle pour ensuite être restituée sous forme d'énergie cinétique.
Ici, les principes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique du système formé par les particules sont donc vérifiés :

$$m_1\,\vec{V}_1 + m_2\,\vec{V}_2 = m_1\,\vec{V}'_1 + m_2\,\vec{V}'_2$$

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2$$

IV.5.3. a. Collision en une dimension :

Pour commencer, considérons le cas où les deux objets qui entrent en collision se déplacent sur un axe (Ox). C'est un cas particulier d'une collision plus générale qu'on étudiera ultérieurement. On suppose que le premier objet se déplace initialement à une vitesse.
$V_1 = V_{1x}\vec{\imath}$ et le second à une vitesse $V_2 = V_{2x}\vec{\imath}$. Après la collision, les deux corps ont respectivement des vitesses $V'_1 = V'_{1x}\vec{\imath}$ et $V'_2 = V'_{2x}\vec{\imath}$. La figure V.4 montre un exemple qui n'est pas unique puisque, comme nous allons le voir plus loin, il existe plusieurs possibilités.



Avant collision

Après collision

Le problème est de déterminer précisément V'_{1x}etV'_{2x} en fonction de V_{1x}et V_{2x} et des masses des deux objets. A cet effet nous utiliserons:

- la loi de conservation de la quantité de mouvement qui s'écrit sous la forme scalaire :

$$m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = m_1V'_{1x} + m_2V'_{2x}$$

- la loi de conservation de l'énergie cinétique qui s'exprime, en fonction des composantes :

$$\frac{1}{2}m_1V_{1x}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2x}^2 = \frac{1}{2}m_1V_{1x}'^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2x}'^2$$

Pour déterminer les deux inconnues V'_{1x}et V'_{2x} , nous avons besoin de réécrire les équations (V.14) et (V.15) sous les formes:

$$m_1\left(V_{1x} - V'_{1x}\right) = -m_2\left(V_{2x} - V'_{2x}\right)$$

$$m_1\left(V_{1x} + V'_{1x}\right)\left(V_{1x} - V'_{1x}\right) = -m_2\left(V_{2x} + V'_{2x}\right)\left(V_{2x} - V'_{2x}\right)$$

La division membre à membre des équations (V.16) et (V.17) donne lieu à :

$$V_{1x} + V'_{1x} = V_{2x} + V'_{2x}$$

Soit :

$$\underbrace{V_{1x} - V_{2x}}_{(V_{1/2})_x} = -\underbrace{\left(V'_{1x} - V'_{2x}\right)}_{(V'_{1/2})_x}$$

Cette équation montre que les modules des vitesses relatives des deux particules (i.e. la vitesse d'une particule par rapport à l'autre) avant et après la collision sont égaux lorsque cette dernière est élastique.

L'équation (V.19) permet d'écrire :

$$V'_{2x} = V_{1x} + V'_{1x} - V_{2x}$$

Cette relation peut être utilisée pour éliminer V'_{2x} dans (V.16) :

$$m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = m_1V'_{1x} + m_2\left(V_{1x} - V_{2x} + V'_{1x}\right)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\left(m_1 + m_2\right)V'_{1x} = \left(m_1 - m_2\right)V_{1x} + 2m_2V_{2x}$$

ce qui permet d'écrire :

$$V'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}V_{1x} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}V_{2x}$$

Un calcul similaire donne lieu à la relation :

$$V'_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}V_{1x} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}V_{2x}$$

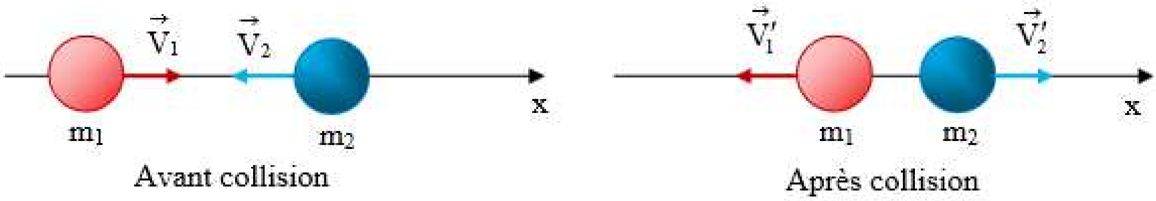
Les relations (V.23) et (V.24) sont compliquées pour être interprétées sous cette forme. Nous pouvons cependant les exploiter pour les cas particuliers suivants :

• Cas où les deux corps ont la même masse (figure V.5): $m = m_1 = m_2$

(V.23) et (V.24) deviennent :

$$V'_{1x} = V_{2x} \quad ; \quad V'_{2x} = V_{1x}$$

Ainsi, m1 communique sa vitesse à m2 et cette dernière transmet la sienne à m1.

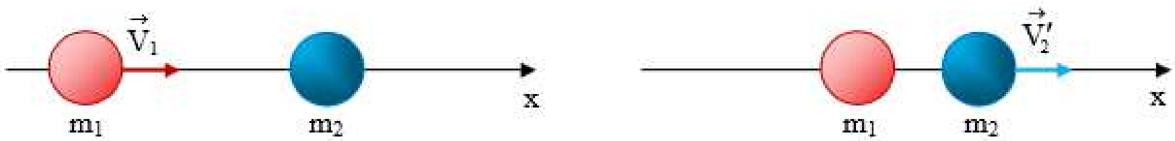


Cas où les deux corps ont la même masse et m.2 est initialement au repos :

m1=m2=m, $\overrightarrow{V_2} = 0$ (figure V.6).

(V.23) et (V.24) deviennent :

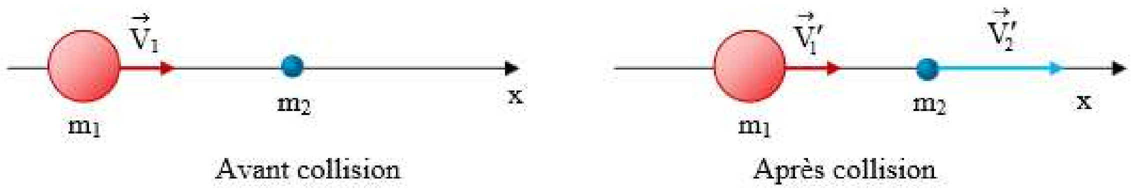
$$V'_{1x} = 0 \quad ; \quad V'_{2x} = V_{1x}$$



Ainsi la particule qui était en mouvement s'arrête et celle qui était initialement au repos se met en mouvement avec la vitesse d'incidence de la première.

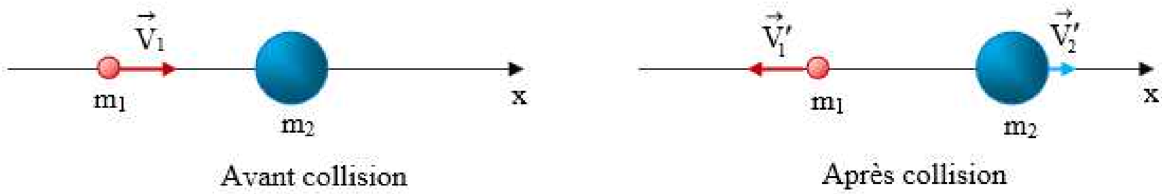
• Cas où m.2 est au repos $\left(\overrightarrow{V_2} = 0\right)$et m1>> m2 (figure V.7)

$$V'_{1x} \approx V_{1x} \; ; \quad V'_{2x} \approx 2V_{1x}$$



• Cas où m.2 est au repos $(\vec{V_2} = 0)$ et m1<< m2 (figure V.8),

$$V'_{1x} \approx -V_{1x} \quad ; \quad |V'_{2x}| << |V'_{1x}|$$



IV.5.3. b. Collision en deux dimensions :

Nous allons maintenant généraliser les calculs précédents au cas d'une collision en deux dimensions. Dans ce cas, les particules peuvent avoir des directions différentes avant ou après ou avant et après la collision. Nous devons alors exprimer les vitesses sous la forme vectorielle dans la conservation de la quantité de mouvement :

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2$$

Puisqu'il s'agit d'une équation vectorielle, la conservation de la quantité de mouvement vaut pour chaque composante :

$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 V'_{1x} + m_2 V'_{2x}$$
$$m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} = m_1 V'_{1x} + m_2 V'_{2y}$$

La loi de conservation de l'énergie cinétique est l'équation scalaire :

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2$$

Le problème consiste à déterminer les quatre inconnues V'_{1x} V'_{1y} V'_{2x} et V'_{2y},alors que nous ne disposons que des trois équations (V.25), (V.26) et (V.27). En conséquence, pour des conditions initiales (avant le choc) données, il n'y a pas une solution unique pour les composantes des vitesses engendrées par le choc des particules. Il faut donc ajouter des contraintes pour éviter cette situation. Les deux exemples suivants en sont des illustrations.

IV.5.4. Collisions parfaitement inélastiques

Rappelons que lorsque l'énergie cinétique totale du système n'est pas conservée après une collision, on dit que cette dernière est inélastique même si la quantité de mouvement totale ne change pas. Nous allons nous intéresser au cas des collisions parfaitement inélastiques dans lesquelles les deux particules ont une vitesse commune après l'interaction en restant collées l'une à l'autre. En conséquence, le principe de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$$

La vitesse commune après collision est alors :

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}$$

Références :

1- Lorenzo Zago, Bases de métrologie.
2- Marc Séguin, Physique XXI Volume A, XXI Volume B, XXI Volume C.
3- Lamria Benallague, Mohamed debiane, Azeddine Gourari, Amar mahamdia, Mécanique du point matériel.