

CH III. Diffraction et ses applications

I. Introduction

On appelle diffraction, le phénomène au cours duquel une onde qui traverse une petite ouverture ou rencontre un petit objet change de direction sans modification de fréquence ou de longueur d'onde.

Le phénomène est d'autant plus important que la taille de l'obstacle ou de l'ouverture est faible.

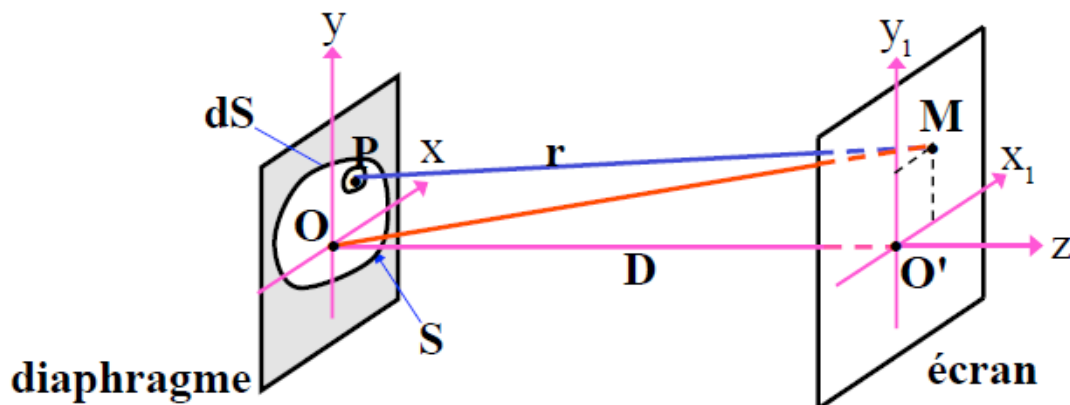
Pour que le phénomène de diffraction apparaisse, il faut que la taille de l'obstacle ou de l'ouverture soit du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de l'onde.

II. Principe d'Huygens-Fresnel

Soit une source ponctuelle de lumière monochromatique et une surface (S) entourant cette source. Tout se passe comme si chaque surface élémentaire dS en chaque point P de la surface (S) émettait une ondelette sphérique de même fréquence et de même phase que l'onde incidente,

En posant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $r = PM$, l'amplitude complexe de l'onde diffractée en M s'exprime en fonction de l'amplitude complexe de l'onde incidente en P par la relation intégrale :

$$A(M) = C \iint_S A(P) \frac{e^{ikr}}{r} dS$$



C est une constante et r peut être confondu avec D. La formulation pratique du principe de Huyghens-Fresnel est donc : $A(M) = K \iint_S A(P) e^{ikr} dS$

Avec $K = C/D = \text{cte}$

Supposons que le diaphragme soit un plan. Le point P, a pour coordonnées (x,y). Le point M, a pour coordonnées (x₁,y₁).

On pose : $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ donc $\vec{r} = \vec{R} - \vec{\rho}$

Par suite $r^2 = R^2 + \rho^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{\rho}$

Si on suppose que $\rho \ll R$ on peut écrire : $r = R\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{R^2} - 2\frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2}} \approx R + \frac{\rho^2}{2R} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R}$

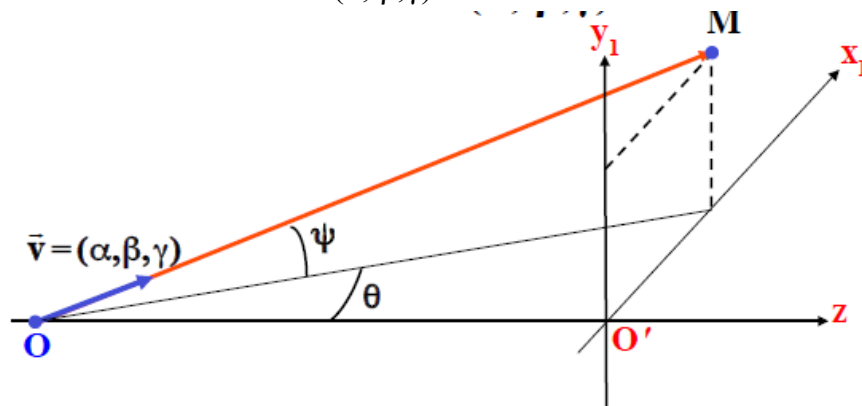
En utilisant les coordonnées de R et ρ , on déduit :

$$r \approx R + \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{x_1 x - y_1 y}{R}$$

L'amplitude au point M s'écrit donc :

$$A(M) = Ke^{ikR} \iint_S A(P) \exp\left[\frac{-ik(x_1 x + y_1 y)}{R}\right] \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R}\right] dS$$

On introduit les sinus directeur (α, β, γ) :



$$\alpha = x_1/R = \cos\psi\sin\theta, \beta = y_1/R = \sin\psi, \gamma = \cos\psi\cos\theta$$

L'expression précédente s'écrit :

$$A(M) \approx Ke^{ikR} \iint_S A(P) \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R}\right] dS$$

C'est l'approximation fondamentale de la diffraction dans l'approximation de *Fresnel*.

Dans certaines conditions on simplifie parfois cette expression en écrivant :

$$\frac{x^2 + y^2}{R} \gg (\alpha x + \beta y) \text{ c.à.d } R \text{ petit.}$$

$$A(M) \approx Ke^{ikR} \iint_S A(P) \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R}\right] dS$$

Nous sommes dans le cas de la diffraction à distance finie ou *diffraction de Fresnel*.

III. Diffraction de Fraunhofer

Lorsque $R \rightarrow \infty$ le terme quadratique devient négligeable devant le terme linéaire et l'expression devient :

$$A(M) \approx Ke^{ikR} \iint_S A(P) \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] dS$$

Nous sommes dans le cas de la diffraction à l'infini ou diffraction de Fraunhofer.

Les conditions de Fraunhofer correspondent à une double exigence :

- la source lumineuse est décrite par une onde plane monochromatique
- L'observation est faite à très grande distance

On dit aussi bien « diffraction à l'infini », ce qui sous-entend observation à l'infini et source à l'infini.

IV. Diffraction par une ouverture rectangulaire

Considérant une fente fine rectangulaire de largeur a et de longueur b ($a \ll b$), éclairée uniformément par un faisceau monochromatique parallèle à l'axe oz .

Sachant que $A(P) = A(x,y) = \text{Cte}$ (éclairage uniforme), la relation suivante :

$$A(M) \approx Ke^{ikR} \iint_S A(P) \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] dS$$

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta) &= \text{Cte} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] dx dy \\ \text{s'écrit :} \quad &= \text{Cte} \int_{-a/2}^{+a/2} \exp(-ik\alpha x) dx \int_{-b/2}^{+b/2} \exp(-ik\beta y) dy \end{aligned}$$

$$\text{En utilisant la relation : } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\text{On obtient : } A(\alpha, \beta) = C.ab \frac{\sin\left[\frac{k\alpha a}{2}\right]}{\frac{k\alpha a}{2}} \frac{\sin\left[\frac{k\beta b}{2}\right]}{\frac{k\beta b}{2}}$$

$$\text{Ou encore : } A(\alpha, \beta) = C.ab \frac{\sin\left[\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right]}{\frac{\pi\alpha a}{\lambda}} \frac{\sin\left[\frac{\pi\beta b}{\lambda}\right]}{\frac{\pi\beta b}{\lambda}}$$

Puisque $k = 2\pi/\lambda$

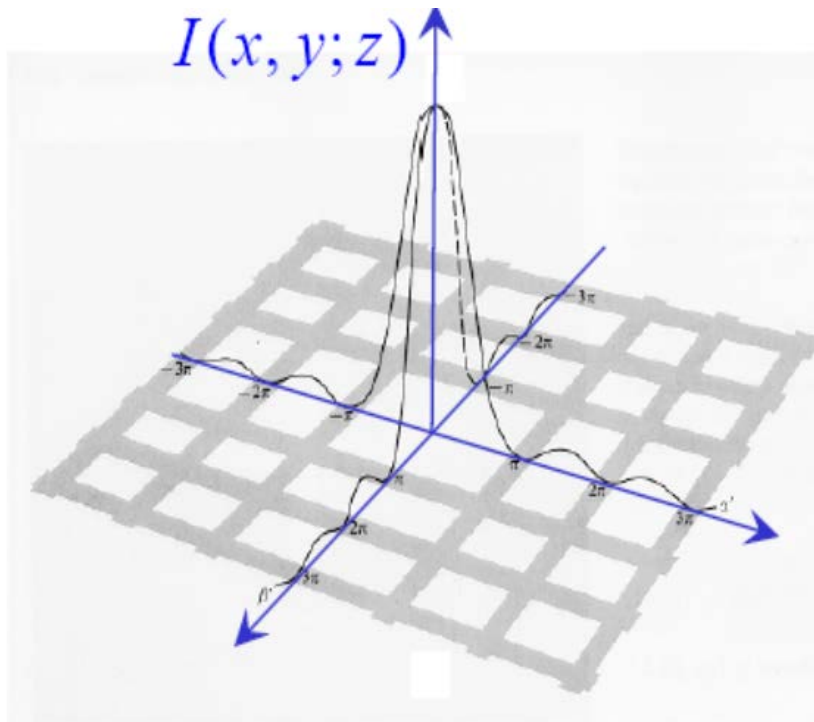
$$\text{Cette expression est de la forme : } A(\alpha, \beta) = C.ab \text{sinc}\left[\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right] \text{sinc}\left[\frac{\pi\beta b}{\lambda}\right]$$

A partir de cette expression il est facile d'obtenir l'expression de l'intensité diffractée

$$\text{à l'infini par une ouverture rectangulaire : } I(x_1, y_1) = I_0 \left[\frac{\sin p}{p} \right]^2 \left[\frac{\sin q}{q} \right]^2$$

$$\text{Avec } p = \frac{\pi a x_1}{\lambda f}, \quad q = \frac{\pi b y_1}{\lambda f} \quad \text{et} \quad I_0 = C^2 \cdot a^2 b^2 \quad \text{et} \quad I = C \cdot a \cdot b$$

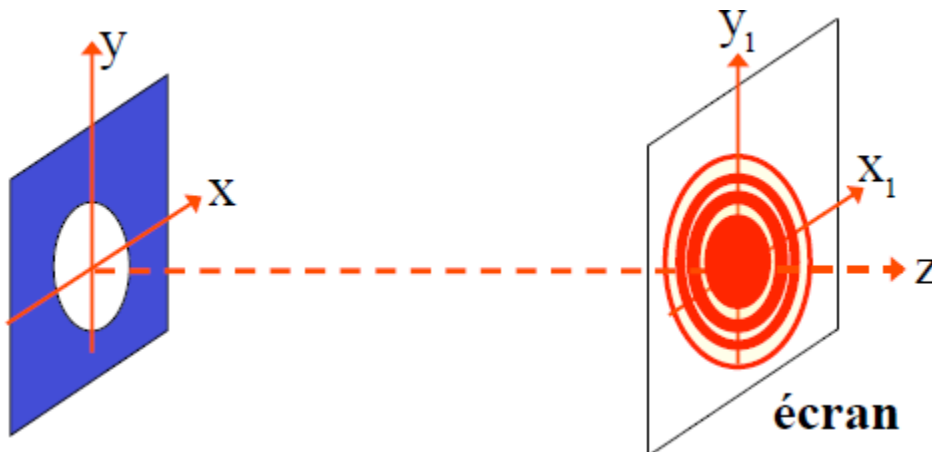
La répartition a la forme d'une croix.



La tache centrale est plus large dans la direction où la fente est plus étroite et inversement.

V. Diffraction par une ouverture circulaire

Soit une ouverture circulaire de rayon d centré sur l'axe Oz . La symétrie de révolution implique que la figure de diffraction aura cette même symétrie. On observera des *anneaux* alternativement lumineux et sombres.



On effectue le changement de variables suivant :

$x = \rho \cos(\phi)$ $y = \rho \sin(\phi)$ donc $dS = dx dy = \rho d\rho d\phi$

Puisqu'il y a une symétrie de révolution, on peut se placer dans un plan contenant l'axe optique Oz (exemple xOz).

L'amplitude diffractée à l'infini s'écrit :

$$A(\alpha, \beta) = C \iint_S \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] dS$$

$$= C \int_0^{2\pi} \int_0^d \exp(-ik \sin(\theta) \rho \cos(\varphi)) \rho d\rho d\varphi$$

Cette expression ne s'intègre pas au moyen des fonctions élémentaires mais nécessite l'introduction des fonctions de *Bessel*.

L'intensité s'exprime alors : $I = I_0 \left[\frac{2J_1(m)}{m} \right]^2$ Où $J_1(m)$ est une fonction de *Bessel*

de premier ordre, et $m = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$

La tache centrale porte souvent le nom de *tache d'Airy*, c'est en elle que se trouve concentrée "presque toute la lumière". Les minimums nuls ne sont pas équidistants.