

Ch II Optique ondulatoire

I. Généralité

1. Définitions :

a. Onde

On appelle onde scalaire toute déformation ou vibration dont l'amplitude $A(x,y,z,t)$ ou encore $A(r,t)$ est une fonction périodique des variables temporelle (t) et spatiale (r).

Exemple d'onde progressive : perturbation locale A se propageant le long d'une corde (onde mécanique).

b. Onde plane

Onde plane : A ne dépend que d'une coordonnée cartésienne : ici x .

Une onde plane progressive est dite monochromatique si pour une position donnée les variations temporelles sont sinusoïdales

$$A(x,t) = A_M \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right]$$

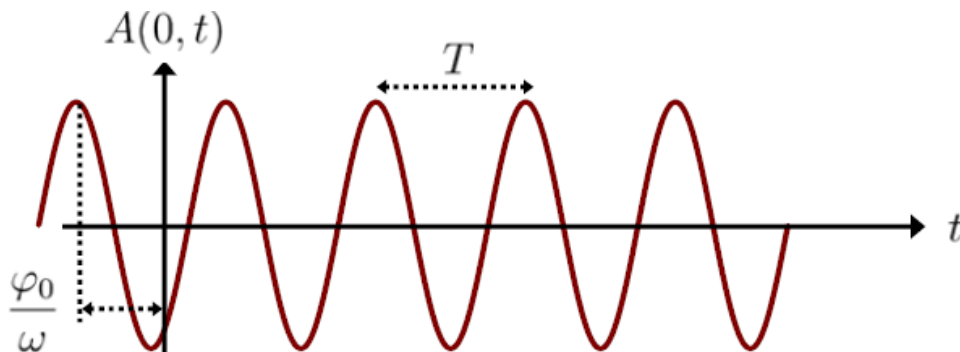
-Amplitude maximale (quantité positive) : A_M

-Pulsation de l'onde monochromatique : ω

- Fréquence f de l'onde monochromatique définie par : $\omega=2\pi f$

- Période de l'onde monochromatique : $T=1/f$

-Phase à l'origine : φ_0



La longueur d'onde λ de l'onde monochromatique est la distance parcourue par l'onde pendant une période : $\lambda=vT$.

c. Phase de l'onde

On appelle phase de l'onde monochromatique la quantité :

$$\varphi(x,t) = \omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0$$

Vecteur d'onde de l'onde plane monochromatique progressive :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$$

La longueur d'onde λ est reliée à la pulsation ω et à la fréquence f par :

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n} = \frac{c}{nf}$$

La longueur d'onde λ dans un milieu d'indice n est différente de celle λ_0 dans le vide et s'écrit $\lambda = \lambda_0/n$.

Cas général : on écrit la phase

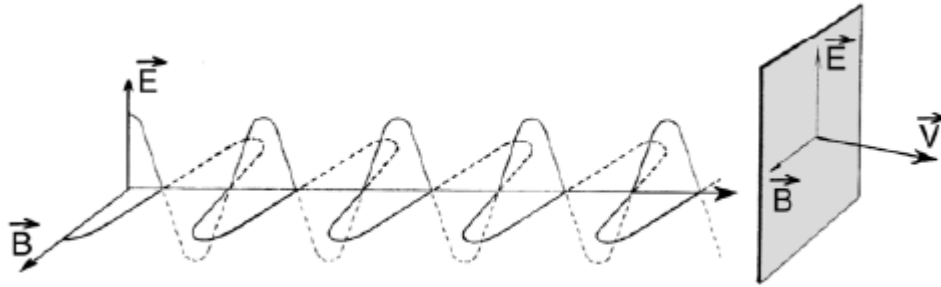
$$\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$$

2. Ondes lumineuses

La lumière correspond à la propagation d'un champ électromagnétique qui est la superposition d'un champ électrique E et d'un champ magnétique B dépendant du temps et de la position.

Champ électrique : $\vec{E}(\vec{r}, t)$

Champ magnétique : $\vec{B}(\vec{r}, t)$



La lumière se propage à la vitesse : $v=c/n$

c est la vitesse de la lumière dans le vide et n est l'indice de réfraction

La fréquence f correspond à la couleur de la lumière : $\lambda=c.T=c/f$

Les relations entre le champ électrique et le champ magnétique sont données par les équations de Maxwell :

$$\text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t}; \quad \text{div}E = 0; \quad \text{div}B = 0; \quad \text{rot}B = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Avec ϵ_0 la permittivité diélectrique et μ_0 la perméabilité magnétique dans le vide.

Avec :

$$\text{div}E = \nabla \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\text{rot}E = \nabla \wedge E = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

L'équation d'une onde électromagnétique est donnée par $\Delta E - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

La solution de cette équation est donnée par : $E(r, t) = E_M \cos(\omega t - k \cdot r + \varphi_0)$

La même chose pour B : $B(r, t) = B_M \cos(\omega t - k \cdot r + \varphi_0')$

II. Principe de superposition de deux ondes et notion de cohérence :

Soit deux ondes planes de même longueur d'onde :

$$E_1(r, t) = E_{01} \cdot \cos(\omega_1 t - k_1 \cdot r + \varphi_1)$$

$$E_2(r, t) = E_{02} \cdot \cos(\omega_2 t - k_2 \cdot r + \varphi_2)$$

Au point M les deux ondes se superposent. D'après la linéarité des équations de Maxwell, le champ électrique E en M est la somme des deux champs E_1 et E_2 .

L'intensité est donnée par $I(M) = 2 \langle E^2(M, t) \rangle$

Avec $E(M, t) = E_1(r, t) + E_2(r, t)$

$$\begin{aligned} I(M) &= 2 \langle E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 \cdot E_2 \rangle \\ &= I_1(M) + I_2(M) + I_{12}(M) \end{aligned}$$

Avec $I_1(M) = 2 \langle E_1^2 \rangle$; $I_2(M) = 2 \langle E_2^2 \rangle$; $I_{12}(M) = 4 \langle E_1 \cdot E_2 \rangle$

Le terme I_{12} mesure les corrélations, ou la cohérence entre les deux ondes E_1 et E_2 . Lorsque I_{12} n'est pas identiquement nul, les deux ondes sont cohérentes. Dans le cas contraire, les deux ondes sont incohérentes, et l'éclairement résultant est la somme des éclairements individuels.

$$I_{12} = 4E_{01} \cdot E_{02} \langle \cos(\omega_1 t - k_1 \cdot r - \varphi_1) \times \cos(\omega_2 t - k_2 \cdot r - \varphi_2) \rangle$$

La première condition pour que deux ondes (ou deux sources) soient cohérentes est que le produit scalaire $E_{01} \cdot E_{02}$ ne soit pas nul, c'est-à-dire que les deux ondes ne soient pas orthogonales l'une à l'autre.

$$\begin{aligned} I_{12} &= 2E_{01} \cdot E_{02} \langle \cos[(\omega_1 t - \omega_2 t) - (k_1 - k_2) \cdot r - (\varphi_1 - \varphi_2)] \rangle \\ &\quad + 2E_{01} \cdot E_{02} \langle \cos[(\omega_1 t + \omega_2 t) - (k_1 + k_2) \cdot r - (\varphi_1 + \varphi_2)] \rangle \end{aligned}$$

Car $\cos a \cdot \cos b = 1/2 [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

La valeur moyenne $\langle \cos(\omega t - \varphi) \rangle$ est nulle sauf pour $\omega = 0$. Le deuxième terme est donc toujours nul et le premier terme est non nul que si les pulsations des deux ondes sont égales. Ainsi, deux ondes cohérentes ont nécessairement la même pulsation, ou la même fréquence, ou la même longueur d'onde. Dans ce cas on a :

$$I_{12} = 2E_{01} \cdot E_{02} \langle \cos[(k_1 - k_2) \cdot r + (\varphi_1 - \varphi_2)] \rangle$$

Dans la pratique, $(\varphi_1 - \varphi_2)$ varie aléatoirement avec le temps : deux ondes émises par des sources ponctuelles distinctes sont incohérentes.

Pour avoir deux sources cohérentes il faut donc que $(\varphi_1 - \varphi_2)$ soit constante.

Dans ce cas l'intensité lumineuse en M vaut :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2 \cos \theta \sqrt{I_1 I_2} \cos \phi_M$$

Où $\Phi_M = (k_1 - k_2) \cdot r + (\varphi_1 - \varphi_2)$ et θ est l'angle entre les deux vecteurs champs électriques.

III. Interférences de deux ondes cohérentes :

1. Conditions d'interférences :

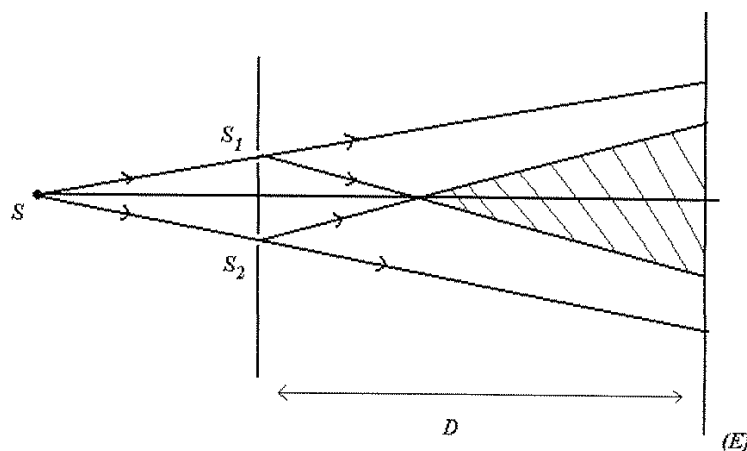
Une méthode courante utilisée pour produire deux sources cohérentes consiste à utiliser une seule source monochromatique pour éclairer un écran contenant deux petites fentes rapprochées. La lumière sortant des deux fentes est cohérente, et les deux fentes servent seulement à séparer le faisceau initial en deux parties.

Pour obtenir des interférences il faut donc que :

- les champs électriques des deux ondes ne soient pas perpendiculaires
- les deux ondes aient même fréquence (longueur d'onde)
- les deux ondes soient issues d'une même source ponctuelle.

2. Expérience des fentes de Young :

Le dispositif de Young est constitué d'une source principale S de longueur d'onde λ et S_1 et S_2 sont deux ouvertures fines dans un écran opaque et perpendiculaire au plan de la figure. E est un écran placé parallèlement au plan contenant S_1 et S_2 la région d'interférence est la zone hachurée :

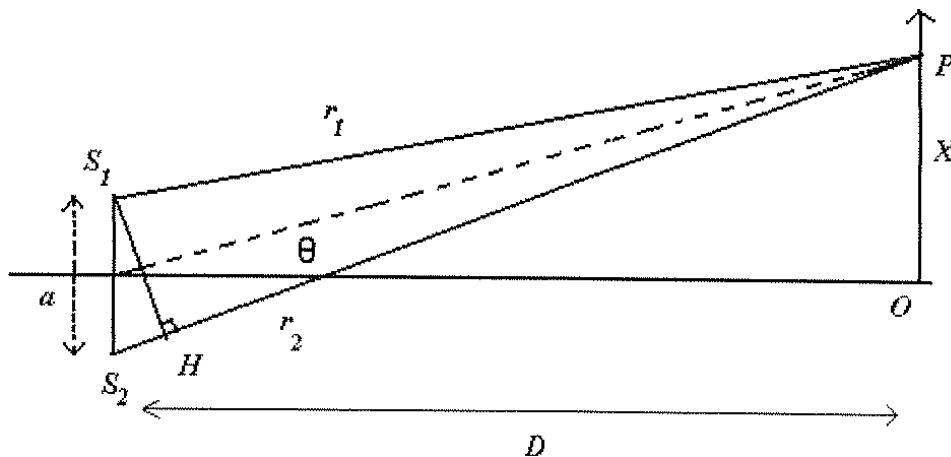


S_1 et S_2 jouent le rôle de deux sources secondaires cohérentes et en phase ($\varphi_1 = \varphi_2$) dans ce cas on a

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi_M$$

$$\text{Tq } \varphi = (k_1 - k_2) \cdot r = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta$$

Où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde incidente, et δ est la différence de marche optique pour les deux trajets S_1P et S_2P



En supposant que les deux rayons sont parallèles et que les angles sont petits on a $r_2 - r_1 = S_2H = a \frac{X}{D}$ avec $a = S_1S_2$ et D la distance entre les sources et l'écran.

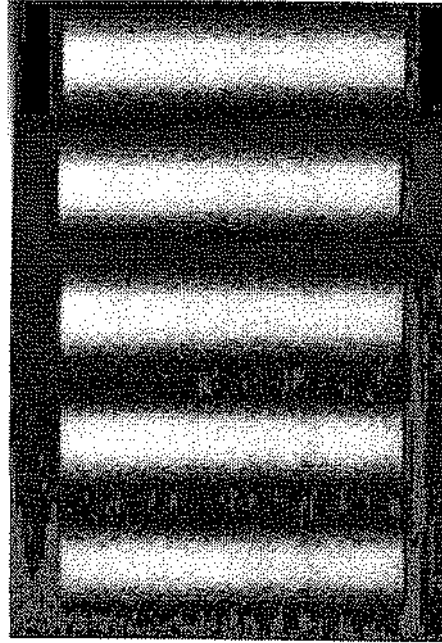
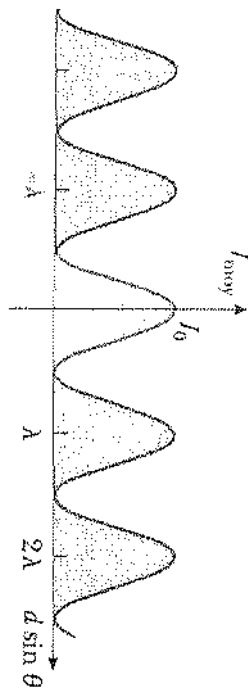
La différence de phase s'écrit alors $\varphi(r) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{aX}{D}$

Pour caractériser les interférences lumineuses, on définit les franges brillantes comme les surfaces où l'intensité lumineuse est maximum (interférences constructives). Alors $\cos \varphi_M = +1$, c'est-à-dire $\varphi_M = 2n\pi$, ou encore $\delta = n\lambda$ avec n entier. On appelle n l'ordre d'interférences.

– Les franges brillantes sont obtenues lorsque les deux ondes sont en phase, ou que la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde, ou que l'ordre d'interférence est entier.

De même, on appelle franges sombres les surfaces où l'éclairement est minimum (interférence destructives). Alors $\cos \varphi_M = -1$, c'est-à-dire $\varphi_M = (2n + 1)\pi$, ou encore $\delta = n\lambda + \lambda/2$ avec n entier. L'ordre d'interférences est alors demi-entier.

– Les franges sombres sont obtenues lorsque les deux ondes sont en opposition de phase, ou que la différence de marche est un multiple impair de la demi-longueur d'onde, ou que l'ordre d'interférences est demi-entier.



On caractérise la visibilité des franges par le facteur de contraste C. Si $I_{\max}$ et $I_{\min}$ désignent respectivement l'intensité des franges brillantes et des franges sombres, C

est défini par :
$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Avec la formule des interférences, nous obtenons :

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}; \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$\text{Donc } C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Le contraste d'une figure d'interférences est donc maximal si les éclairements des sources qui interfèrent sont voisins.

IV. Interférences à ondes multiples :

1. Définition :

Si on a plus de deux trous et si tous ces trous émettent des ondes cohérentes (i.e sont éclairés par la même source primaire), le champ en M est la superposition (la somme) des N ondes émises par les N trous.

$$s(M) = s_1(M) + s_2(M) + \dots + s_N(M)$$

$$I(M) = \langle s_1(M) + s_2(M) + \dots + s_N(M) \rangle^2$$

On parle alors d'interférence à ondes multiples.

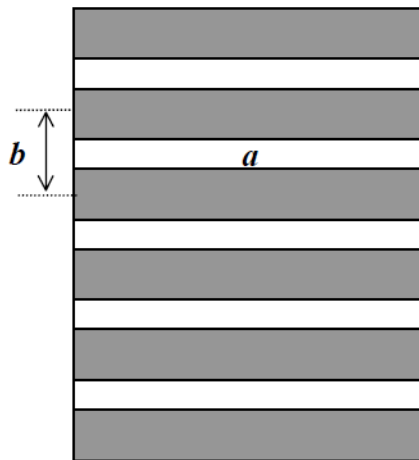
2. Division de front d'onde et division d'amplitude :

Dans le dispositif des trous d'Young, les deux ondes sont obtenues en divisant l'onde incidente à l'aide de deux petits trous percés dans un écran. Cet appareil est classé avec

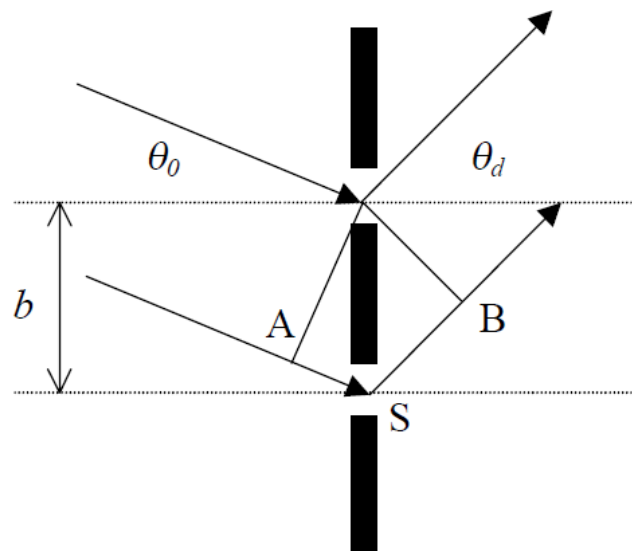
les interféromètres à division de front d'onde. Dans de tels dispositifs, le front d'onde de l'onde primaire sera séparé à l'aide de diaphragmes, de miroirs, de prismes etc... Les interféromètres à division d'amplitude sont basés sur le fait qu'un rayon incident sur un dioptre est séparé en un rayon transmis et un rayon réfléchi. D'un point de vue ondulatoire, l'onde incidente donne naissance à deux ondes cohérentes mais avec des amplitudes différentes.

3. Le réseau :

Le réseau est constitué de N ouvertures périodiquement espacées de b . Nous supposons qu'il est éclairé par une onde plane monochromatique.



On définit le nombre de traits N du réseau et le nombre de traits par millimètre $n = N/L = 1/b$.



La différence de marche totale entre les deux ondes passant par deux fentes consécutives est donnée par : $\delta = AS + SB$

Soit $\delta = b(\sin \theta_d - \sin \theta_0)$

θ_d est positif alors que θ_0 est négatif ce qui explique le signe - dans la relation précédente.

Les ondes issues des différentes fentes du réseau interféreront constructivement si la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde c'est à dire si

$$b(\sin \theta_d - \sin \theta_0) = p\lambda$$

Le nombre p est appelé ordre de la déviation ou ordre d'interférence.

Le champ en P est donc obtenu en sommant les champs issus de toutes les ouvertures soit :

$$E = Ae^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P)} (1 + e^{-i\phi} + e^{-2i\phi} + \dots + e^{-(N-1)i\phi})$$

Cette relation peut se transformer en :

$$E = Ae^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P)} \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}$$

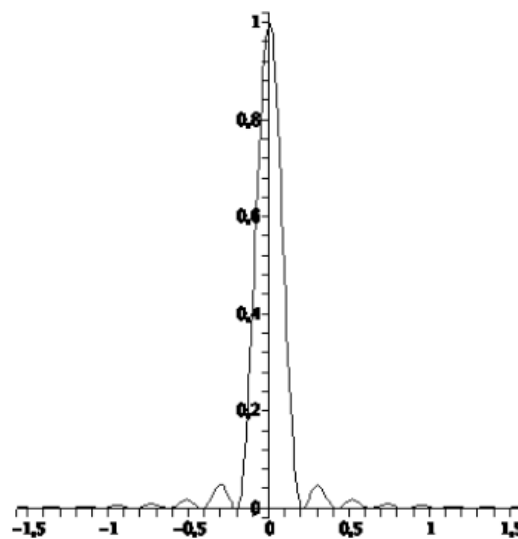
Et l'intensité s'écrit :

$$I(\phi) = EE^* = A^2 \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

La figure d'interférence est caractérisée par :

- des maxima principaux d'amplitude proportionnelle à N^2
- N-2 maxima secondaires de très faible amplitude
- N-1 minima nuls

Où N représente le nombre de fentes (ou de traits) qui participent à la figure d'interférence.



La position des maxima principaux est obtenue pour $\sin \frac{\phi}{2} = 0$ c'est à dire :

$$\phi = 2m\pi$$

La position des minima est obtenue pour $\sin \frac{N\phi}{2} = 0$ soit à chaque fois que :

$$\phi = \frac{2m\pi}{N}$$

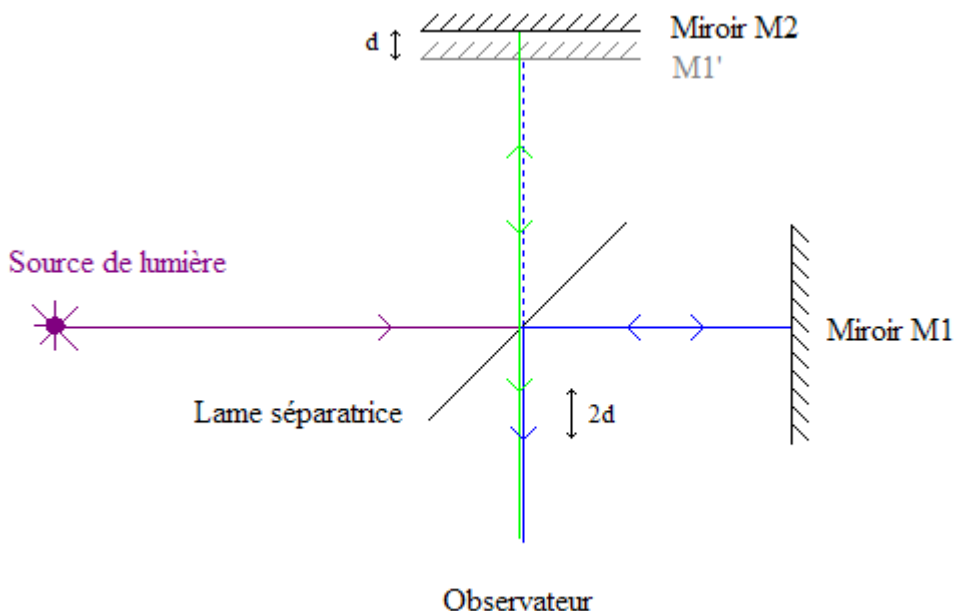
La position des maxima secondaires est obtenue pour $\sin \frac{N\phi}{2} = 1$ soit :

$$\phi = \frac{(2m+1)\pi}{2N}$$

4. Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson est un dispositif à division d'amplitude. Il est constitué de deux miroirs et une fine lame de verre traitée pour réfléchir 50% du rayonnement incident (fine couche de métal sur sa surface) appelée : séparatrice. Le système est équivalent à une lame à face parallèle remplie d'air avec un indice de réfraction $n=1$, une épaisseur $e=OM_2-OM_1$.

Les miroirs M_1 et M_2 sont réglés de manière à être quasi-perpendiculaires. On note M'_1 l'image de M_1 par la séparatrice.



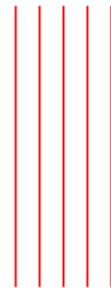
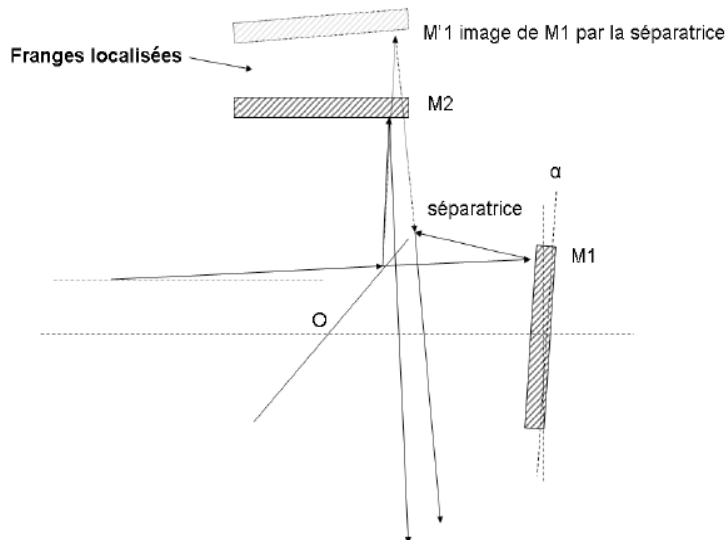
a. Réglage en coin d'air

Dans ce cas M_1 et M_2 ne sont pas perpendiculaires, les surfaces de M_2 et M'_1 forment alors un petit angle entre elles noté α . Si on éclaire le Michelson avec une source monochromatique, des franges rectilignes seront visible dans une région proche de M_2 et M'_1 . Le déphasage est donné par

$$\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{4\pi e(x,y)}{\lambda}$$

$e(x,y)$, "l'épaisseur" locale du coin d'air au point (x,y) , c'est à dire l'écart entre M2 et M'1 au point (x,y) .

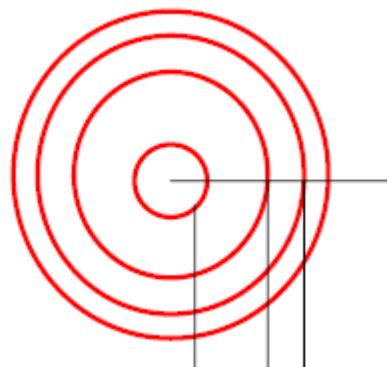
On a $e(x,y) = e_0 + x \tan(\alpha)$.



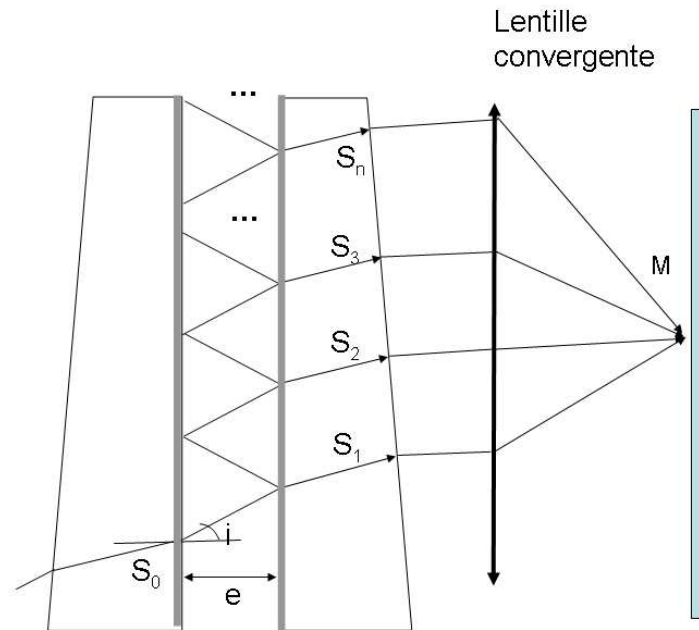
b. Réglage en lame d'air

M1 et M2 sont perpendiculaires. Les surfaces M'1 et M2 sont alors parallèles. Le Michelson est alors équivalent à une lame d'air d'épaisseur e_0 . Les franges sont des anneaux d'égale inclinaison. Le déphasage entre les ondes sortant de l'interféromètre ne dépend plus que de l'angle d'incidence i sur l'interféromètre :

$$\phi(i) = \frac{4\pi e_0 \cos(i)}{\lambda}$$



5. Interféromètre de Fabry-Pérot



L'interféromètre Fabry-Pérot est un interféromètre à division d'amplitude et à ondes multiples. Il est constitué par deux lames de verre qui sont placées l'une en face de l'autre de manière à créer une lame d'air d'épaisseur e . Les faces en vis-à-vis sont parallèles entre elles. Les faces extérieures sont inclinées pour ne pas créer deux lames de verre qui viendraient perturber le fonctionnement de l'instrument. Les interférences sont observées à l'infini, au foyer d'une lentille convergente.

Un rayon incident entre les deux lames se réfléchit un très grand nombre de fois avant de sortir. A chaque réflexion, une portion R de l'intensité est réfléchie et une portion $(1 - R)$ est transmise. L'interférence multiple ne peut être constructive que si tous les rayons sont approximativement en phase et ceci d'autant plus que le nombre de rayons est important donc que R est grand.

Les rayons ne sont en phase que pour certains angles i particuliers qui dépendent de λ et de e .

La différence de marche est donnée par $\delta = 2e \cos i$ le déphasage est :

$$\phi = 4\pi e \cos(i) / \lambda$$

Et l'intensité transmise est donnée par
$$I = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\phi/2)\right)}$$

Posant $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ on a
$$I = \frac{I_0}{(1 + F \sin^2(\phi/2))}$$

I est maximale si $\sin^2(\phi/2) = 0$ donc $\phi = 2\pi p$ et $I_{\max} = I_0$

I est minimale si $\sin^2(\phi/2) = 1$ donc $\phi = 2\pi p + \pi$ et $I_{\min} = \frac{I_0}{(1+F)}$

Les franges d'interférence sont des anneaux.

V. Interférences en lumière polychromatique :

La plupart des sources naturelles ne sont pas monochromatiques. Soit l'exemple précédent des trous d'Young éclairé par une source polychromatique. Au point M le champ incident est une superposition d'ondes monochromatiques de différentes pulsations ω . L'intensité dI émise dans l'intervalle spectral $[\omega, \omega + d\omega]$ est :

$dI(\omega) = (I_1(\omega) + I_2(\omega) + 2\sqrt{I_1(\omega)I_2(\omega)} \cos \phi_M) d\omega$. La grandeur $I(\omega)$ associée à chaque pulsation est appelée **intensité spectrale**.

Pour des trous identiques on a $I(M) = 2I_0(\omega)(1 + \cos(\phi))$

$$\text{pour } \lambda_1 : I_1 = 2I_{10}(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_1})$$

$$\text{pour } \lambda_2 : I_2 = 2I_{20}(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_2})$$

L'éclairement total vaut en supposant $I_{10} = I_{20}$:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= 2I_0 \left(2 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda_1} + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda_2} \right) \\ &= 4I_0 \left(1 + \cos \pi \delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \cos \pi \delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \end{aligned}$$

Dans le cas d'interférences à deux sources en lumière polychromatique, chaque longueur d'onde va donner son propre système de franges, les interfranges respectifs étant différents, on a des coïncidences (quand les maximum d'intensité des radiations correspondent) et des anti-coïncidences (quand le maximum d'intensité d'une radiation correspond au minimum d'intensité de l'autre radiation).

Si les deux longueurs d'onde sont très voisines, le terme en $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}$ est très petit par rapport au terme en $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$. Les franges se brouillent alors progressivement à partir

de la frange centrale brillante pour laquelle la visibilité est maximale. On a alors :

$$I \cong 4I_0 \left(1 + \cos \pi \delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right)$$

Si les radiations sont très différentes (par exemple rouge et verte), il y aura au voisinage des coïncidences des franges brillantes de couleur mélangée rouge-vert et des franges bien noires.

Au voisinage des anti-coïncidences, il n'y aura pas de franges noires mais seulement des franges alternativement rouges et vertes.

