

Série n°5

Exercice 1

1. Calculer en eV et en joules, l'énergie des quatre premiers niveaux de l'ion hydrogénoïde Li^{2+} , sachant qu'à l'état fondamental, l'énergie du système noyau-électron de l'atome d'hydrogène est égale à -13,6 eV.
2. Quelle énergie doit absorber un ion Li^{2+} , pour que l'électron passe du niveau fondamental au premier niveau excité.
3. Si cette énergie est fournie sous forme lumineuse, quelle est la longueur d'onde $\lambda_{1 \rightarrow 2}$ du rayonnement capable de provoquer cette transition ?

On donne : Li ($Z=3$) $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Joules $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹

1-Energie de l'électron sur une orbite de rang n des hydrogénoïdes

$$E_n = E_1 \frac{Z^2}{n^2} \quad E_n = -13,6 \frac{Z^2}{n^2} \text{ (eV)} \quad 1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Joules}$$

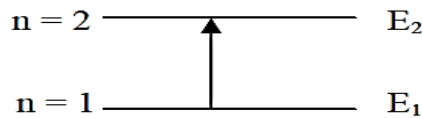
$$E_1 = -13,6 \cdot (3)^2 = -122,4\text{eV}$$

$$n=2 \quad E_2 = -30,6\text{eV} = -4,9 \cdot 10^{-18}\text{J}$$

$$n=3 \quad E_3 = -13,6\text{eV} = -2,18 \cdot 10^{-18}\text{J}$$

$$n=4 \quad E_4 = -7,65\text{eV} = -1,22 \cdot 10^{-18}\text{J}$$

2. Imaginons la transition entre deux niveaux d'énergie $n=1$ et $n=2$ (absorption)



Energie absorbée: $\Delta E_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1 = -30,6 - (-122,4) = 91,8\text{eV}$

3 Conservation de l'énergie $h\nu_{1 \rightarrow 2} = \Delta E_{1 \rightarrow 2} = \frac{hc}{\lambda_{1 \rightarrow 2}}$

$$\lambda_{1 \rightarrow 2} = \frac{hc}{\Delta E_{1 \rightarrow 2}}$$

$$\lambda_{1 \rightarrow 2} = (6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8) / (91,8 \times 1,6 \cdot 10^{-19}) = 1,35 \cdot 10^{-8}\text{m} = 135 \text{ \AA}$$

(Rayonnement dans le domaine de l'ultraviolet)

Exercice 2

1. Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est composé de plusieurs séries de raies. Donner pour chacune des trois premières séries, les longueurs d'onde de la première raie et de la raie limite.

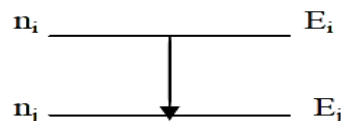
On établira d'abord la formule donnant $1/\lambda_{i \rightarrow j}$, où $1/\lambda_{i \rightarrow j}$ représente la longueur d'onde de la radiation émise lorsque l'électron passe du niveau n_i au niveau n_j . ($n_i > n_j$)

La première raie de la série de Brackett du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène a pour longueur d'onde 4,052 mm. Calculer, sans autre donnée, la longueur d'onde des trois raies suivantes

1. L'énergie du niveau n , pour l'hydrogène ($Z = 1$) est :

$$(E_n)_H = -\frac{me^4}{n^2 8\epsilon_0^2 h^2} = \frac{(E_1)_H}{n^2}$$

Imaginons la transition entre deux niveaux i (n_i) et j (n_j) avec $i > j$ (émission)



Le photon émis a une longueur d'onde $\lambda_{i \rightarrow j}$ telle que : $|E_j - E_i| = \frac{hc}{\lambda_{i \rightarrow j}}$

$$\frac{1}{\lambda_{i \rightarrow j}} = \frac{|(E_1)_H|}{hc} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

La formule est du même type que la formule empirique de Ritz.

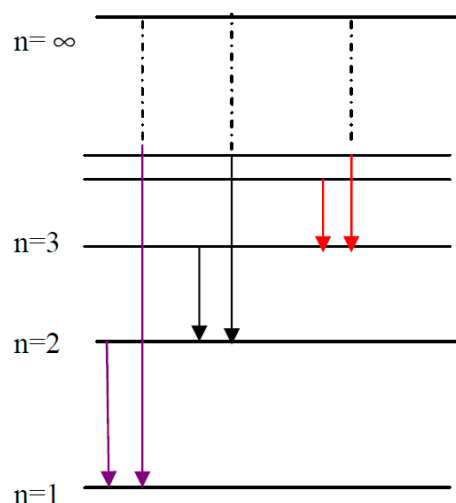
En calculant l'expression $\frac{|(E_1)_H|}{hc}$, qui s'identifie à la constante de Rydberg, on trouve la valeur expérimentale :

$$\frac{|(E_1)_H|}{hc} = (13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}) / (6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8) = 1,096 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Série Lyman : transition $\lambda_{i \rightarrow j}$ avec $j=1$ et $i \geq 2$

Série Balmer : transition $\lambda_{i \rightarrow j}$ avec $j=2$ et $i \geq 3$

Série Paschen : transition $\lambda_{i \rightarrow j}$ avec $j=3$ et $i \geq 4$



La première raie de chaque série est : $\lambda_{j+1 \rightarrow j}$

La dernière raie (raie limite) de chaque série est : $\lambda_{\infty \rightarrow j}$

En appliquant la formule de Ritz, nous obtenons :

$$\frac{1}{\lambda_{i \rightarrow j}} = 1,097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ en } (m^{-1})$$

$$\frac{1}{\lambda_{2 \rightarrow 1}} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 1,097 \cdot 10^7 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 8,2275 \cdot 10^6 m^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_{2 \rightarrow 1}} = 8,2275 \cdot 10^6 m^{-1} \Rightarrow \lambda_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{8,2275 \cdot 10^6} = 1,216 \cdot 10^{-7} m = 1216 \text{ Å}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\infty \rightarrow 1}} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 1,097 \cdot 10^7 (1 - 0) = 1,097 \cdot 10^7 m^{-1}$$

$$\lambda_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7} = 9,12 \cdot 10^{-8} m = 912 \text{ Å}$$

Série Lyman : $\lambda_{2 \rightarrow 1} = 1216 \text{ Å} \dots \dots \dots \lambda_{\infty \rightarrow 1} = 912 \text{ Å}$

Domaine ultra-violet

Série Balmer : $\lambda_{3 \rightarrow 2} = 6565 \text{ Å} \dots \dots \dots \lambda_{\infty \rightarrow 2} = 3647 \text{ Å}$

Domaine visible

Série Paschen : $\lambda_{4 \rightarrow 3} = 18756 \text{ Å} \dots \dots \dots \lambda_{\infty \rightarrow 3} = 8206 \text{ Å}$

Domaine infra-rouge

2. Série de Brackett : transition $\lambda_{i \rightarrow j}$ avec $j = 4$ et $i \geq 5$

La première raie de la série de Brackett correspond à la transition du niveau $n_5 \rightarrow n_4$
soit $\lambda_{5 \rightarrow 4} = 4,052 \mu m$

$$\frac{1}{\lambda_{5 \rightarrow 4}} = \frac{|(E_1)_H|}{hc} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{6 \rightarrow 4}} = \frac{|(E_1)_H|}{hc} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{7 \rightarrow 4}} = \frac{|(E_1)_H|}{hc} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{7^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{8 \rightarrow 4}} = \frac{|(E_1)_H|}{hc} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{8^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{5 \rightarrow 4}} = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{6 \rightarrow 4}} = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right)$$

$$\frac{\lambda_{6 \rightarrow 4}}{\lambda_{5 \rightarrow 4}} = \frac{\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right)}{\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right)}$$

$$\frac{\lambda_{7 \rightarrow 4}}{\lambda_{5 \rightarrow 4}} = \frac{\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{7^2} \right)}{\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right)}$$

$$\lambda_{6 \rightarrow 4} / \lambda_{5 \rightarrow 4} \Rightarrow \lambda_{6 \rightarrow 4} = 2,626 \mu m$$

$$\lambda_{7 \rightarrow 4} / \lambda_{5 \rightarrow 4} \Rightarrow \lambda_{7 \rightarrow 4} = 2,166 \mu m$$

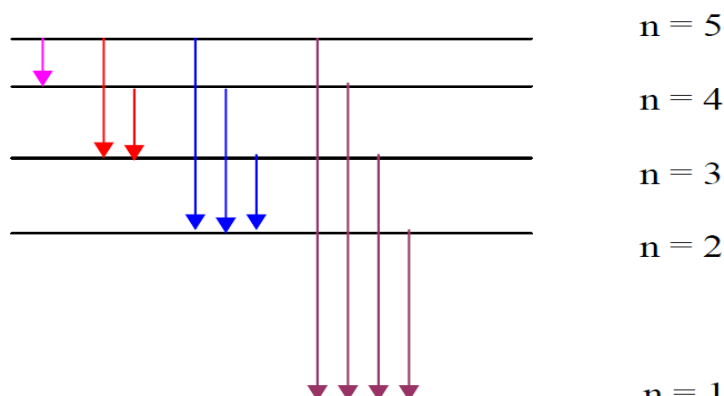
$$\lambda_{8 \rightarrow 4} / \lambda_{5 \rightarrow 4} \Rightarrow \lambda_{8 \rightarrow 4} = 1,945 \mu m$$

Exercice 3

Si l'électron de l'atome d'hydrogène est excité au niveau $n=5$, combien de raies différentes peuvent-elles être émises lors du retour à l'état fondamental.

Calculer dans chaque cas la fréquence et la longueur d'onde du photon émis.

Dix raies sont possibles lors du retour de l'électron d'hydrogène du niveau excité ($n=5$) à l'état fondamental (émission).



Modèle de Bohr : $E_n = \frac{(E_1)H}{n^2}$

Formule de Ritz : $\frac{1}{\lambda_{i \rightarrow j}} = R_H \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$

$$|\Delta E_{n_i \rightarrow n_j}| = \left| \frac{(E_1)H}{n_j^2} - \frac{(E_1)H}{n_i^2} \right| = |(E_1)H| \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\Delta E = h \cdot \nu \quad \text{et} \quad \nu = c / \lambda$$

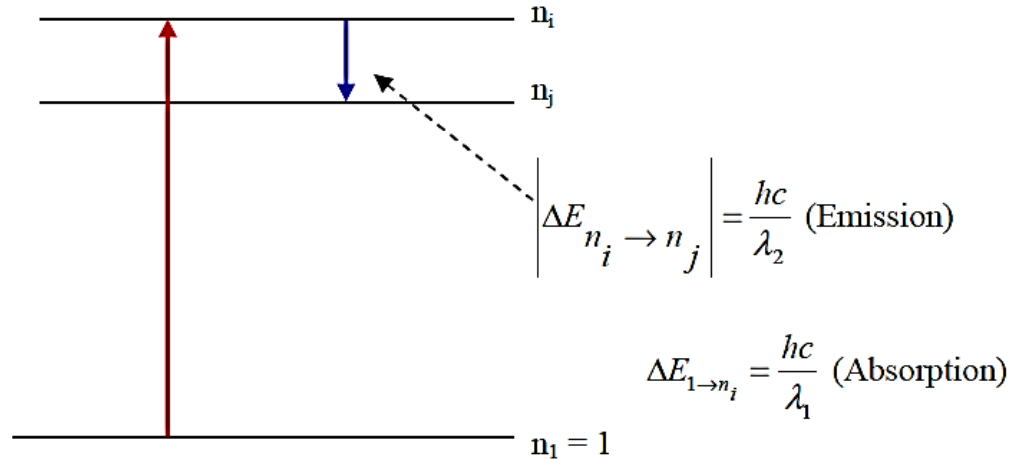
$$(E_1)_H = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$$

Raie - Transition	Energie (J)	Fréquence (10^{15} Hz)	Longueur d'onde (nm)	Domaine spectral	Série
$5 \rightarrow 4$	$4,905 \cdot 10^{-20}$	0,074	4049	I.R	Bracket
$5 \rightarrow 3$	$1,55 \cdot 10^{-19}$	0,23	1281	I.R	Paschen
$5 \rightarrow 2$	$4,58 \cdot 10^{-19}$	0,69	433,8	Visible	Balmer
$5 \rightarrow 1$	$2,09 \cdot 10^{-18}$	3,16	94,9	U.V	Lyman
$4 \rightarrow 3$	$1,06 \cdot 10^{-19}$	0,16	1874	I.R	Paschen
$4 \rightarrow 2$	$4,09 \cdot 10^{-19}$	0,62	486	Visible	Balmer
$4 \rightarrow 1$	$2,04 \cdot 10^{-18}$	3,09	97,2	U.V	Lyman
$3 \rightarrow 2$	$3,02 \cdot 10^{-19}$	0,46	656	Visible	Balmer
$3 \rightarrow 1$	$1,93 \cdot 10^{-18}$	2,93	102,5	U.V	Lyman
$2 \rightarrow 1$	$1,63 \cdot 10^{-18}$	2,5	121,5	U.V	Lyman

Exercice 4

Si un atome d'hydrogène dans son état fondamental absorbe un photon de longueur d'onde λ_1 puis émet un photon de longueur d'onde λ_2 , sur quel niveau l'électron se trouve-t-il après cette émission ? $\lambda_1 = 97,28 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 1879 \text{ nm}$

Imaginons la transition entre deux niveaux $n=1$ et n_i (absorption) et la transition entre deux niveaux i (n_i) et j (n_j) avec $i > j$ (émission)



$$\Delta E_{1 \rightarrow n_i} = \frac{hc}{\lambda_1} = |(E_1)_H| \left(1 - \frac{1}{n_i^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\Delta E_{1 \rightarrow n_i}}{hc} = \frac{|(E_1)_H|}{hc} \left(1 - \frac{1}{n_i^2}\right) = R_H \left(1 - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_1 R_H} = \left(1 - \frac{1}{n_i^2}\right) = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7 \times 97,28 \cdot 10^{-9}} = 0,937$$

$$\frac{1}{n_i^2} = 1 - 0,937 = 0,0629 \Rightarrow n_i^2 = 15,89 \Rightarrow n_i = 4$$

$$\left| \Delta E_{n_i \rightarrow n_j} \right| = \frac{hc}{\lambda_2} = |(E_1)_H| \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\left| \Delta E_{n_i \rightarrow n_j} \right|}{hc} = \frac{|(E_1)_H|}{hc} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda_2 R_H} = \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7 \times 1879 \cdot 10^{-9}} = 0,0485 \Rightarrow n_j^2 = 9,009 \Rightarrow n_j = 3$$