
Chapitre IV

Fonctions élémentaires

Vous connaissez déjà des fonctions classiques : $\exp$, $\ln$, $\cos$, $\sin$, $\tan$. Dans ce chapitre il s'agit d'ajouter à notre catalogue de nouvelles fonctions : $\cosh$, $\sinh$, $\tanh$, $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$, Argch , Argsh , Argth .

1 Fonctions trigonométriques

1.1 Les fonctions sinus et cosinus

Fonction	Domaine de définition	Parité	Période	Continuité	La dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	impaire	2π	sur $\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	paire	2π	sur $\mathbb{R}$	$-\sin x$

La relation fondamentale en trigonométrie est :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Formule d'addition $\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

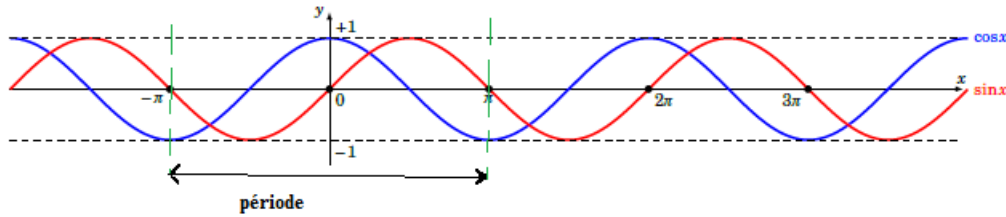
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Formule de duplication $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = -1 + 2 \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$

variations

les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur tout $\mathbb{R}$. Comme elles sont périodiques, de période 2π , on peut restreindre le domaine de l'étude à l'intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi, \pi]$.



1.2 Les fonctions tangent et cotangente

Définition 1.1 ★ On appelle *tangente* la fonction $\tan$ (ou tg) définie par :

$$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \forall x \in \mathbb{R} - A, \text{ où } A = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

★ On appelle *cotangente* la fonction $\cot$ définie par :

$$x \mapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \forall x \in \mathbb{R} - B, \text{ où } B = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} - (A \cup B)$, on a l'égalité : $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.

Dérivées-Variations

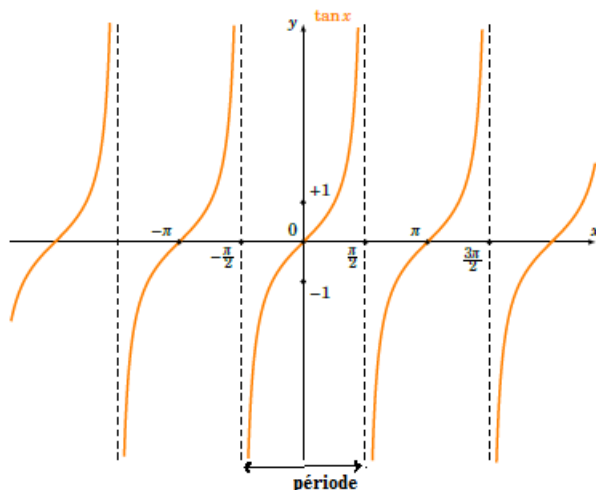
Les fonctions tangente et cotangente sont continues et dérivable sur leurs domaines de définition et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} - A \quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \iff \tan' x = 1 + \tan^2 x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - B \quad \cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x} \iff \cot' x = -(1 + \cot^2 x)$$

Chapitre IV. Fonctions élémentaires

Les deux fonctions étant périodiques de période π , on peut donc restreindre le domaine de l'étude à un intervalle de longueur π , par exemple $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ pour la tangente et $]0, \pi[$ pour la cotangente.



2 Les fonctions trigonométriques réciproques

2.1 Arccosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \cos x$.

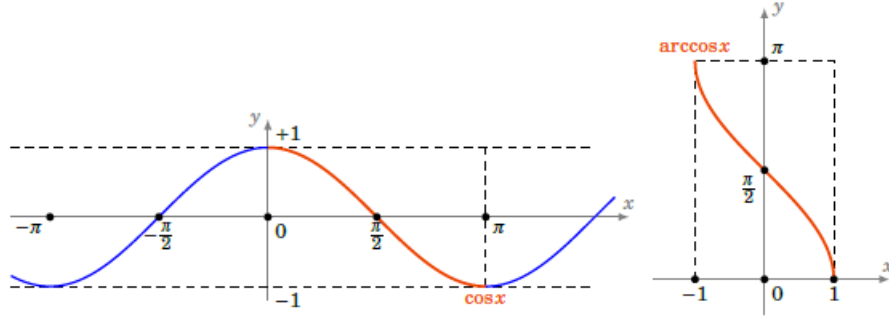
Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est une bijection. Sa fonction (bijection) réciproque est la fonction **arccosinus** :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

IV.2 Les fonctions trigonométriques réciproques



On a donc, par définition de la fonction réciproque :

$$\begin{aligned} \cos(\arccos(x)) &= x \quad \forall x \in [-1, 1] \\ \arccos(\cos(x)) &= x \quad \forall x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\text{Si } x \in [0, \pi] \quad \cos(x) = y \iff x = \arccos y$$

la dérivée de arccos :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Preuve 2.1 On démarre de l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) &= x \\ \implies -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) &= 1 \\ \implies \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\ \implies \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \quad (*) \\ \implies \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Le point crucial (*) se justifie ainsi : on démarre de l'égalité $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, en substituant $\alpha = \arccos x$ on obtient $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ donc $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$.

Chapitre IV. Fonctions élémentaires

On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$ (avec le signe + car $\arccos x \in [0, \pi]$, et donc on a $\sin(\arccos x) \geq 0$).

2.2 Arcsinus

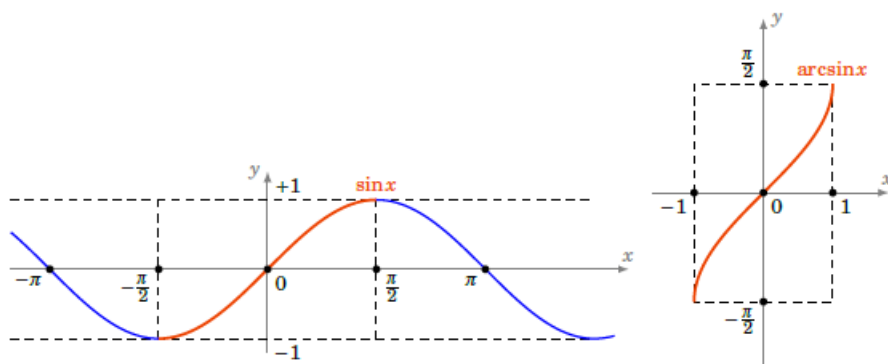
La restriction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est une bijection.

Sa fonction réciproque est la fonction **arcsinus**:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$



$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(x)) &= x \quad \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin(\sin(x)) &= x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\text{Si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \quad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

2.3 Arctangente

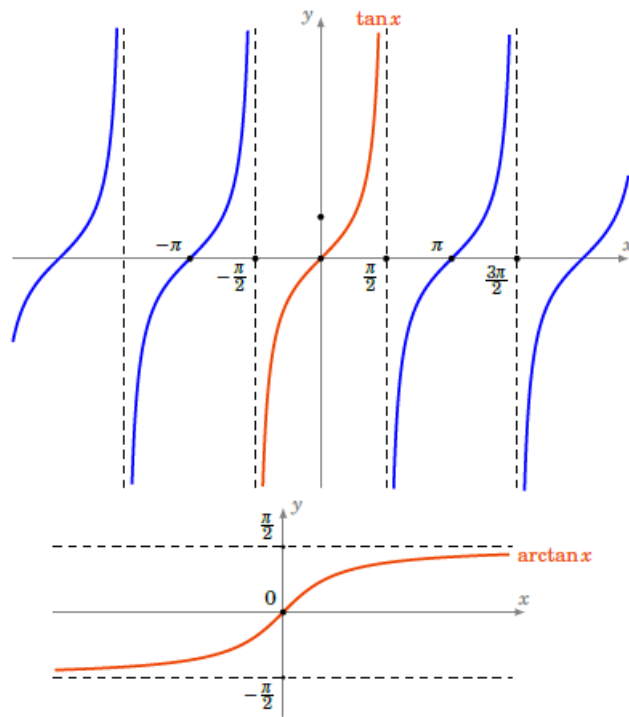
La restriction

$$\tan :]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

est une bijection.

Sa fonction réciproque est la fonction **arctangente** :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$



$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan(x)) &= x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

$$\text{Si } x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\quad \tan(x) = y \iff x = \arctan y$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3 Logarithme et exponentielle

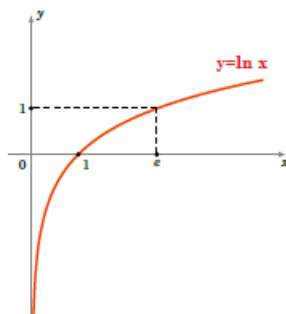
3.1 Logarithme

Proposition 3.1 *Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{pour tout } x > 0) \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

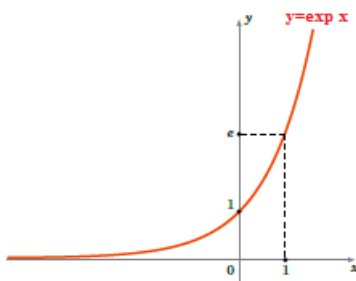
1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n \ln a$, (pour tout $n \in \mathbb{N}$)
4. $\ln$ est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.



Remarque 3.1 $\ln x$ s'appelle le *logarithme naturel* ou aussi *logarithme néperien*

3.2 Exponentielle

Définition 3.1 *La fonction réciproque de $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ s'appelle la fonction *exponentielle*, notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.*



IV.4 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition 3.2 *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

- $\boxed{\exp(\ln x) = x \text{ pour tout } x > 0}$ et $\boxed{\ln(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$
- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$.
- La fonction exponentielle est dérivable et $\exp' x = \exp x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

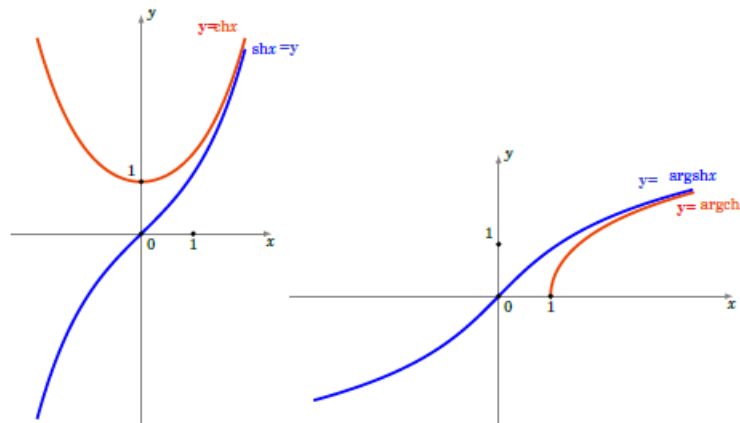
4.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le **cosinus hyperbolique** est :

$$\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La restriction $\cosh : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ est une bijection.

Sa fonction réciproque est $\operatorname{Argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$. (Argument cosinus hyperbolique)



4.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le **sinus hyperbolique** est :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$, c'est donc une bijection.

la fonction réciproque est $\text{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (Argument sinus hyperbolique)

Proposition 4.1 • $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

- $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$
- $\text{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue.
- Argsh est dérivable et $\text{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- $\text{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Preuve 4.1

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2] = \frac{1}{4}[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] = 1.$$

- $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$.
- Car c'est la réciproque de $\sinh$.
- Comme la fonction $x \mapsto \sinh' x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $\sinh(\text{Argsh} x) = x$:

$$\text{Argsh}' x = \frac{1}{\cosh(\text{Argsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(\text{Argsh} x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- Notons $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ alors

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \text{Argsh}' x$$

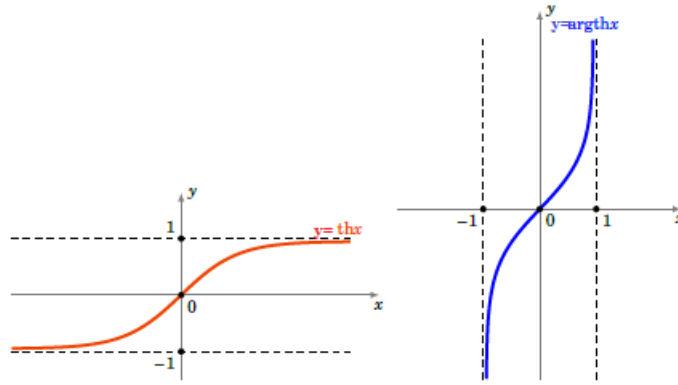
Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\text{Argsh} 0 = 0$ (car $\sinh 0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \text{Argsh} x$.

4.3 Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la **tangente hyperbolique** est :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

La fonction $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est une bijection, on note $\operatorname{Argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.



4.4 Trigonométrie hyperbolique

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(a + b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b$$

$$\cosh(2a) = \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2 \cosh^2 a - 1 = 1 + 2 \sinh^2 a$$

$$\sinh(a + b) = \sinh a \cdot \cosh b + \sinh b \cdot \cosh a$$

$$\sinh(2a) = 2 \sinh a \cdot \cosh a$$

$$\tanh(a + b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \cdot \tanh b}$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1)$$

$$\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\operatorname{Argth}' x = \frac{1}{1 - x^2} \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{Argch} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (x \geq 1)$$

$$\operatorname{Argsh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) \quad (-1 < x < 1)$$