Université Ahmed Zabana Relizane **Année Universitaire : 2022/2023**
Spécialité : LMD SM " 2 ème année PHYSIQUE & CHIMIE"
Module : Méthodes Numériques et Programmation

TD/TP2: INTEGRATION NUMERIQUE

1. PROBLEME

Certaine fonctions qu'on doit intégrer $\int_a^b f(x)dx$ sont trop difficiles à calculer (a la main) leur calcul est long et peut qui faite appel à d'autres fonctions elles-mêmes longues à évaluer

2. SOLUTION

Trouver des méthodes qui permettent de calculer rapidement une valeur **approchée** de l'intégrale à calculer. La fonction a intégrer est remplacée par un **polynôme**. Il existe plusieurs méthodes d'intégration numériques, nous allons nous intéresser aux méthodes des trapèzes et de Simpson

3. MÉTHODES DES TRAPÈZES

- **Principe**

On veut estimer $\int_a^b f(x)dx$ a l'aide de la méthode numérique des trapèzes on commence par subdiviser l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n sous- intervalles

Posez $h = \dfrac{b-a}{n}$ tel que h est le pas de découpage et n le nombre de sous intervalles

Considérer les points $x_0 = a$, $x_1 \begin{cases} = a + h,\ x_i = a + ih,\ x_n = a + nh = b \\ x_1 = x_0 + h,\ x_i = x_{i-1} + h,\ x_n = x_{n-1} + h \end{cases}$

$f(x_i) = f_i$; i = 0, 1, 2, …, n.

- **La formule des trapèzes :**

$$\int_a^b f(x)dx \approx Tn = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$\mathrm{Tn} = \frac{\mathrm{h}}{2}(\mathrm{f}_0 + \mathrm{f}_n + 2(\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \cdots + \mathrm{f}_{n-1}))$$

- **Evaluation de l'erreur :**

$$E(h) <= \frac{h^2}{12}(b-a)\max|(f''(\xi)| \quad , \quad \xi \in [a,b].$$

4. MÉTHODE DES SIMPSON

- **Principe**

on veut estimer $\int_a^b f(x)dx$ a l'aide de la méthode numérique Simpson on commence par subdiviser l'intervalle d'intégration $[a,b]$ en un nombre **pair** de sous- intervalles

poser $h = \dfrac{b-a}{n}$ et considérer les points $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_i = a + ih$, $x_n = a + nh = b$

- **La formule de Simpson:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + ... + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

$$S_n = \frac{h}{3}[f_0 + f_n + 4(f_1 + f_3 + ...f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + ...f_{n-2})]$$

- **Evaluation de l'erreur**

$$E(h) <= \frac{h^4}{180}(b-a)\max\left|(f^{(4)}(\xi)\right| \quad , \quad \xi \in [a,b].$$

Exercice1

X	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
F(x)	1	0.6666	0.5	0.4	0.3333	0.2857	0.25

- Approximer l'intégrale de la fonction $f(x)$ par la méthode des Trapèzes puis celle de Simpson,

-Ces points d'appui sont ceux de la fonction f(x) = $\frac{1}{x}$, comparer le résultat obtenu à la valeur analytique exacte.

Exercice 2

Approximer l'intégrale suivante : f(x)=$\int_0^1 e^{-x^2}dx$ pour n =4

1.Selon la méthode des trapèzes

2. Selon la méthode de SIMPSON

3. Evaluer l'erreur commise par la méthode des trapèzes

Exercice 3

Trouver le nombre n de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration [-π, π], pour évaluer a 0.5 10^{-3} prés grâce a la méthode de Simpson et des trapèzes, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx$. (prendre la valeur de π=3.1416 tout au long de l'exercice)

Exercice 4

Elaborer un programme Fortran77 qui par la méthode des trapèzes et de Simpson permet de calculer l'intégrale d'une fonction

TD/TP3: Résolution numérique des équations non-linéaires

1. PROBLEME

La détermination des racines exactes de l'équation f(x)=0 lorsque l'expression de la fonction f est complexe est un problème difficile a résoudre il n'existe pas de formules pour les polynômes de degré supérieur à 4 ni, pour les équations transcendantes.

2. SOLUTION

Utilisation de méthodes numériques de résolution d'équation de la forme F(x)=0 telle que Newton et Dichotomie.

3.PROCEDES DE SEPARATION DES RACINES

La mise en œuvre des méthodes numériques pour le calcul de la racine α, suppose que la racine α a été **séparée** .Séparer la racine α revient a déterminer l'intervalle a,b

tel que $a<\alpha< b$

α est la seule racine comprise entre a et b

-La méthode Graphique: Tracer la courbe puis situer la solution

-La méthode Algébrique : utilisation du théorème des valeurs intermédiaire

- ✓ **Théorème des valeurs intermédiaires**

Si f est continue et dérivable dans [a, b] et f(a).f(b) < 0 alors il existe au moins un point $\alpha\in$]a,b[/f(α)=0 Si de plus f est monotone dans [a,b] alors α est unique dans [a,b].

4.METHODE NEWTON

Théorème de convergence

Soit [a,b] un intervalle de R tel que : $\begin{cases} F(a)* F b) <0 \\ \forall x \in [a,b]\ F'(x) \neq 0 \\ \forall x \in [a,b]\ F''(x) \neq 0 \end{cases}$ Alors F(x)=0 possède une seule racine α dans cet intervalle et la suite de newton convergent vers l'unique solution α

4.1 Principe

-Soit $X_{0,}$ une première estimation de la racine telle que F (X0,)* F''($X_{0,}$) >0

On détermine les X_n selon la formule suivante $X_{n+1}=X_n-\dfrac{F(X_n)}{F'(X_n)}$

Condition d'arrêt

Si $|X_n - X_{n-1}| \leq \varepsilon$ (précision) alors X_n est le résultat de l'estimation de la racine.

5. METHODE DICHOTOMIE

Soit une fonction f continue sur un intervalle [a; b]. On suppose que f admet une et une seule racine α dans]a; b[et que f (a)*f (b) < 0.

5.1 Principe

On pose $a_0=a$, $b_0=b$, on calcule $x_0 =(a_0+b_0)/ 2$

Si $f(x_0) = 0$, le point x(0) est le zéro de f et le problème est résolu.

Sinon
$$\begin{cases} \text{Si } f(x_n)f(b_n)<0 & \text{alors } a_{n+1}=x_n \text{ et } b_{n+1}=b_n \\ \text{Si } f(a_n)f(x_n)<0 & \text{alors } a_{n+1}=a_n \text{ et } b_{n+1}=x_n \end{cases}$$

Condition d'arrêt

On continue jusqu'a $| X_n - X_{n-1}| \leq \varepsilon$ ou $(b-a)/2^n \leq \varepsilon$

Exercice1

Approcher la racine de l'équation $f(x)=e^x-4*x^2 =0$

-Vérifier que $f(x)$=0 admet une racine dans [4,5]

Utiliser la méthode de newton puis dichotomie pour calculer cette racine ((prendre $\varepsilon=5*10^{-2}$).

-Comparer le nombre d'itérations.

Exercice 2

Montrer que l'équation $2x^3+2x-3=0$ admet une solution réelle unique dans un intervalle de la forme [a, a+1] ; (a : un entier naturel) que l'on localisera graphiquement.

-Donner le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la solution selon la méthode dichotomie puis calculer cette racine (prendre $\varepsilon=5*10^{-3}$).

Exercice 3

Montrer que l'équation $f(x) = \cos(x) - x =0$. admet une solution unique dans un intervalle [0,1] puis utiliser la méthode de newton pour calculer cette racine (prendre $\varepsilon=10^{-2}$).

Exercice4

Ecrire le programme Fortran qui utilise la méthode de Bissection(dichotomie) et la méthode de Newton pour résoudre une équation sur un intervalle [a,b] avec une précision ξ: