Université Ahmed Zabana Relizane **Année Universitaire : 2022/20223**
Spécialité : LMD SM " 2 ème année Physique /Chimie"
Module : Méthodes Numériques et Programmation

TD/TP 4: Résolution d'un système linéaire Ax=b

1. Problème :

Soit un système linéaire Ax = b, ou A est une matrice carré (n*n) et x et b des vecteur a n composantes**.** Résoudre le système Ax=b consiste à trouver les vecteurs x vérifiant le système. Les méthodes classique (cramer devienne très lente en temps d'exécution des que n dépassé 4 (exp pour n =10 méthode cramer exige $3*10^9$ Operations).

2. Solution

Utilisation des méthodes numériques peuvent être directes comme la méthode de Gauss

3. Méthode De Gauss (Stratégie sans pivotation)

Pour résoudre le système linéaie, on le transforme en un système triangulaire supérieur équivalent. La matrice d'origine A est transformée en une matrice triangulaire supérieure comme suit : [A, b] [A', b'] .Ou A' : est une matrice triangulaire supérieure.

Etape 1 : élimination de Gauss

En supposant que $a_{kk} \neq 0$, on pose $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ i=k+1…………n, puis on remplace la ligne L_i Par la ligne $L_{i'}= L_i - m_{ik} * L_k$

Etape2 : remontée

C'est la phase de détermination de la solution du nouveau système **triangulaire supérieur,** et qui est très simple à résoudre.

- **Calcul déterminant (stratégie sans pivotation)**

$$Det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

4. Méthode De Gauss (Stratégie avec pivotation)

La méthode **Gauss (sans pivotation)** s'applique lorsque tous les pivots ne sont pas nuls. Or il peut s'avérer que ce ne soit pas le cas ou même que le pivot soit trop petit ce qui peut entrainer des erreurs d'arrondi importantes dans le calcul

Afin de diminuer les risques d'incidents numériques, le pivot choisi est le plus grand en valeur absolue. Lorsque ce pivot est trouve, on effectue les permutations nécessaires pour faire apparaitre ce nouveau pivot a la place de l'ancien pivot.

- ✓ **Pivot partiel :** on choisit comme pivot l'élément a_{rk} tel que $a_{rk} = max|a_{ik}|$ (k ≤i ≤n) et on permute les lignes r et k
- ✓ **Pivot total:** on choisit comme pivot l'élément a_{rm} tel que $a_{rm} = max|a_{ij}|$ (k ≤i ; j ≤n) et on permute les lignes r et k puis les colonnes m et k

Remarque :a chaque permutation des colonnes les inconnues changent de place

Calcul déterminant (stratégie avec pivotation)

$$Det(A) = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ou p désigne le nombre de permutation (lignes et colonnes)

Exercice 1

- Résoudre par la méthode de GAUSS (stratégie sans pivotation) le système linéaire suivant

6X+1Y+1Z=12

2X+4Y=0

1X+2Y+6Z=6

Exercice 2

Utiliser l'algorithme de GAUSS (avec pivotation partielle, puis totale) pour résoudre les le système linéaire suivant (le mettre sous la forme Ax=b) :

$X_1+3X_2+X_3=1$

$2X_1+4X_2+4X_3=2$

$X_1+5X_2+6X_3=-6$

- Calculer le déterminant de la matrice A.