TD/TP3: Résolution numérique des équations non-linéaires

1. PROBLEME

La détermination des racines exactes de l'équation f(x)=0 lorsque l'expression de la fonction f est complexe est un problème difficile a résoudre il n'existe pas de formules pour les polynômes de degré supérieur à 4 ni, pour les équations transcendantes.

2. SOLUTION

Utilisation de méthodes numériques de résolution d'équation de la forme F(x)=0 telle que Newton et Dichotomie.

3.PROCEDES DE SEPARATION DES RACINES

La mise en œuvre des méthodes numériques pour le calcul de la racine α, suppose que la racine α a été **séparée** .Séparer la racine α revient a déterminer l'intervalle a,b

tel que $a<\alpha< b$

α est la seule racine comprise entre a et b

-La méthode Graphique: Tracer la courbe puis situer la solution

-La méthode Algébrique : utilisation du théorème des valeurs intermédiaire

- ✓ **Théorème des valeurs intermédiaires**

Si f est continue et dérivable dans [a, b] et f(a).f(b) < 0 alors il existe au moins un point $\alpha \in]a,b[/ f(\alpha)=0$ Si de plus f est monotone dans [a,b] alors α est unique dans [a,b].

4.METHODE NEWTON

Théorème de convergence

Soit [a,b] un intervalle de R tel que : $\begin{cases} F(a)* F b) <0 \\ \forall x \in [a,b]\ F'(x) \neq 0 \\ \forall x \in [a,b]\ F''(x) \neq 0 \end{cases}$ Alors F(x)=0 possède une seule racine α dans cet intervalle et la suite de newton convergent vers l'unique solution α

4.1 Principe

-Soit $X_{0,}$ une première estimation de la racine telle que $F(X0_{,})* F''(X_{0,}) >0$

On détermine les X_n selon la formule suivante $X_{n+1}=X_n-\frac{F(X_n)}{F'(X_n)}$

Condition d'arrêt

Si $|X_n - X_{n-1}| \leq \varepsilon$ (précision) alors X_n est le résultat de l'estimation de la racine.

5. METHODE DICHOTOMIE

Soit une fonction f continue sur un intervalle [a; b]. On suppose que f admet une et une seule racine α dans]a; b[et que f (a)*f (b) < 0.

5.1 Principe

On pose $a_0=a$, $b_0=b$, on calcule $x_0 =(a_0+b_0)/ 2$

Si $f(x_0) = 0$, le point x(0) est le zéro de f et le problème est résolu.

Sinon
$$\begin{cases} \text{Si } f(x_n)f(b_n)<0 & \text{alors } a_{n+1}=x_n \text{ et } b_{n+1}=b_n \\ \text{Si } f(a_n)f(x_n)<0 & \text{alors } a_{n+1}=a_n \text{ et } b_{n+1}=x_n \end{cases}$$

Condition d'arrêt

On continue jusqu'a $| X_n - X_{n-1}| \leq \varepsilon$ ou $(b-a)/2^n \leq \varepsilon$

Exercice1

Approcher la racine de l'équation $f(x)=e^x-4*x^2 =0$

-Vérifier que $f(x)$=0 admet une racine dans [4,5]

Utiliser la méthode de newton puis dichotomie pour calculer cette racine ((prendre $\varepsilon=5*10^{-2}$).

-Comparer le nombre d'itérations.

Exercice 2

Montrer que l'équation $2x^3+2x-3=0$ admet une solution réelle unique dans un intervalle de la forme [a, a+1] ; (a : un entier naturel) que l'on localisera graphiquement.

-Donner le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la solution selon la méthode dichotomie puis calculer cette racine (prendre $\varepsilon=5*10^{-3}$).

Exercice 3

Montrer que l'équation $f(x) = \cos(x) - x$ =0. admet une solution unique dans un intervalle [0,1] puis utiliser la méthode de newton pour calculer cette racine (prendre $\varepsilon=10^{-2}$).

Exercice4

Ecrire le programme Fortran qui utilise la méthode de Bissection(dichotomie) et la méthode de Newton pour résoudre une équation sur un intervalle [a,b] avec une précision ξ: