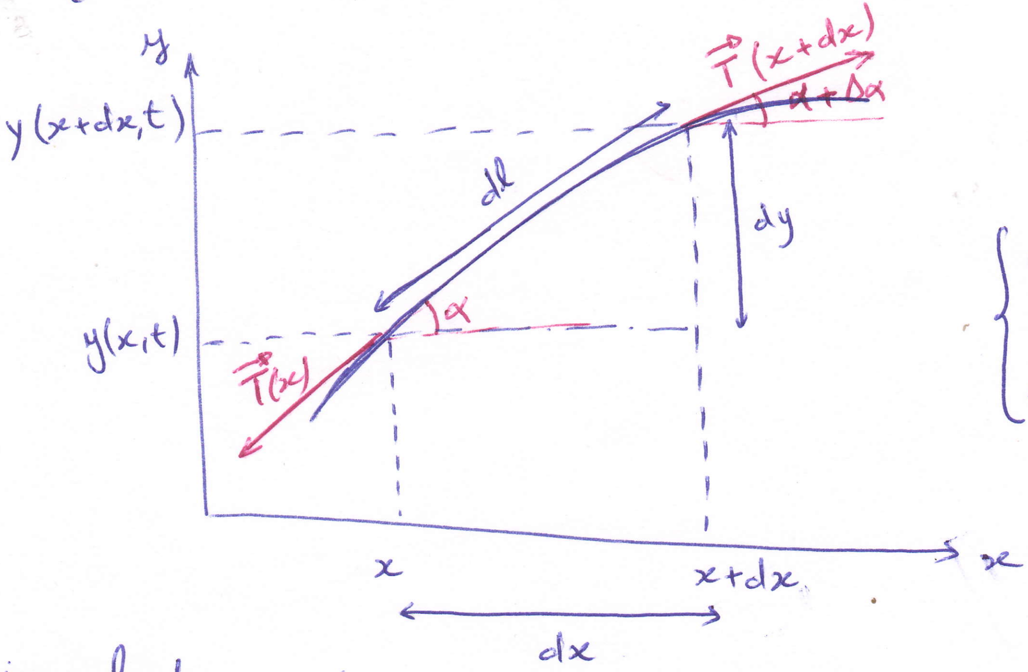
Chapitre 05 **Cordes vibrantes**

- On considère une corde tendue sur l'axe ox, la perturbation crée est stationnaire (Onde stationnaire)



$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{dl} \approx 1 \\ \sin\alpha = \dfrac{dy}{dl} \approx \alpha \end{cases}$$

T : désigne la tension éxercée aux niveau des 2 cotée de l'élément de la corde, En négligeant l'action de la pésanteur et on applique la R.F.D (2ème loi de Newton) à un élément de longueur dl, On trouve :

$$\boxed{\mu \cdot dx \cdot \vec{a} = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t)}$$

μ : Masse linéique [Kg/m] $\longrightarrow \mu = \dfrac{\Delta m}{\Delta x}$

a : l'accélération [m/s²] $\longrightarrow a = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

* Sur l'axe oy :

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx,t)\sin(\alpha+\Delta\alpha) - T(x,t)\cdot\sin\alpha$$

avec α est très petit :

$$\begin{cases} \sin(\alpha) \approx \alpha & \text{avec } \alpha = \dfrac{dy}{dl} = \dfrac{dy}{dx}\Big|_x \\ \sin(\alpha+\Delta\alpha) \approx \alpha+\Delta\alpha & \rightsquigarrow \alpha+\Delta\alpha = \dfrac{dy}{dl} = \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x+dx} \end{cases}$$

$$\boxed{\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot dx = T(x+dx,t)\frac{dy}{dx}\Big|_{x+dx} - T(x,t)\cdot\frac{dy}{dx}\Big|_x} \quad \text{--- } (1)$$

Sur l'axe ox : l'accélération $a = 0$ (pas de déplacement de la matière)

$$0 = T(x+dx) \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha) - T(x,t)\cos\alpha$$

α est très petit :

$$\begin{cases} \cos\alpha \simeq 1 \\ \cos(\alpha+\Delta\alpha) \simeq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{T(x+dx,t) = T(x,t) = T_0} \quad \dots 2$$

A partir de l'équation 1 et 2, On obtient :

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{dy}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - T_0 \cdot \frac{dy}{dx}\bigg|_x$$

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x\right] = T_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$$

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$ Eq d'onde de la corde

$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$: Vitesse d'onde [m/s]

Dans le cas d'une corde fixée à ses extrémités (Encastré - Encastré). la solution $y(x,t)$ de l'équation de propagation (Eq d'Alembert) est sous la forme :

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(k \cdot x + \varphi_x)\cos(\omega t + \varphi_t)} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

$\forall t$, l'amplitude de la vibration est nulle aux extrémités :

$$y(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L,t) = 0$$

$y(0,t) \rightsquigarrow y(0,t) = y_0 \cos(\varphi_x)\cos(\omega t + \varphi_t) = 0 \rightsquigarrow \boxed{\varphi_x = -\frac{\pi}{2}}$

$y(L,t) \rightsquigarrow y(L,t) = y_0 \sin(k.L)\cos(\omega t + \varphi_t) = 0$

$\sin(kL) = 0 \longrightarrow \boxed{k.L = n\pi}$

Mode propres :

Il existe un ensemble discret de modes d'oscillations libres appelés "modes propres", de la forme :

$$\boxed{y_n(x,t) = y_n \sin(k_n . x)\cos(\omega_n t + \varphi_n)}$$

avec :

$$\boxed{k_n = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}}$$

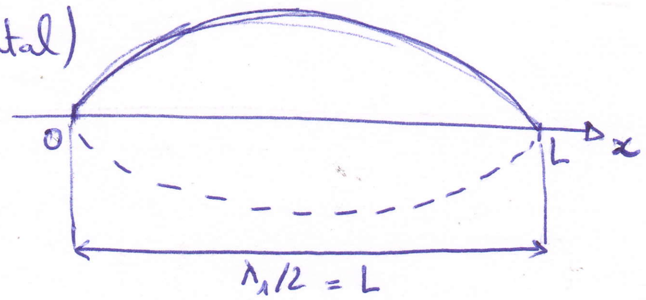
- les pulsations des modes sont donnés par :

$$\boxed{\omega_n = \frac{n\pi . c}{L} = \frac{n.\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

- λ_n : représente la longueur d'onde dans le mode n

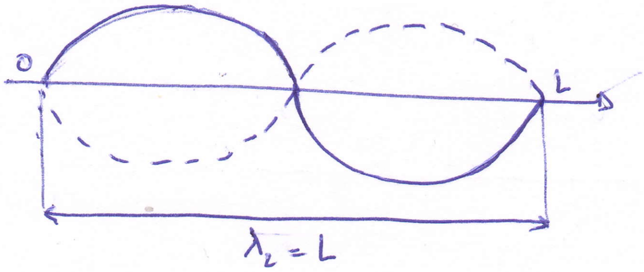
$n = 1$

(mode fondamental)



modes Harmoniques

$n = 2$



$n = 3$