## 2 - Vibrations forcées d'un système à 2 ddl :

Pour un système à 2ddl en vibration forcés, les équations de Lagrange, s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_{q_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F_{q_2} \end{cases}$$

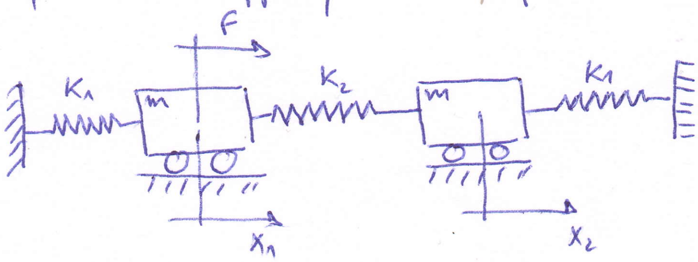
$F_{q_1}$, $F_{q_2}$ : forces généralisés.

**Système masse - ressort :**

Soit le système masse - ressort, la force est appliqué sur le premier solide :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_1 x_2^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2$$




Eq de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} m\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2) x_1 - K_2 x_2 = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + (K_1 + K_2) x_2 - K_2 x_1 = 0 \end{matrix}}$$

.. Eqs de mvt

On peut écrire les équations du mvt sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\{\ddot{q}\}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 \\ -K_2 & (K_1 + K_2) \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\{q\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{F\}}$$

### Solutions dans le cas d'un force Harmonique (Sinusoïdale)

On suppose : $\boxed{F(t) = f_0 \cos \Omega t = f_0 e^{j\Omega t}}$

$\Omega$ : pulsation de la force
$f_0$ : Amplitude de la force

On cherche des solution sous la forme :

$$x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) = X_1 e^{j\varphi_1} e^{j\Omega t} = \bar{x}_1 e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\Omega t + \varphi_2) = X_2 e^{j\varphi_2} e^{j\Omega t} = \bar{x}_2 e^{j\Omega t}$$

tel que : $\bar{x}_1 = X_1 e^{j\varphi_1}$ , $\bar{x}_2 = X_2 e^{j\varphi_2}$ : Amplitudes complexes.

On a : $\boxed{\begin{cases} x_1(t) = \bar{x}_1 e^{j\Omega t} \\ x_2(t) = \bar{x}_2 e^{j\Omega t} \\ F(t) = f_0 e^{j\Omega t} \end{cases}}$

$$\begin{cases}(K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_1 e^{j\Omega t} - K_2\bar{x}_2 e^{j\Omega t} = f_0 e^{j\Omega t}\\ -K_2\bar{x}_1 e^{j\Omega t} + (K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_2 e^{j\Omega t} = 0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases}(K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_1 - K_2\bar{x}_2 = f_0 & \dots\dots (1)\\ -K_2\bar{x}_1 + (K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_2 = 0 & \dots\dots (2)\end{cases}}$$

A partir de l'équation (2), on a : $\Downarrow$

$$\bar{x}_2 = \left(\frac{K_2}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1$$

On remplace $\bar{x}_2$ dans (1), on trouve :

$$(K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_1 - K_2\left(\frac{K_2}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1 = f_0$$

$$\left(\frac{(K_1+K_2-m\Omega^2)^2 - K_2^2}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1 = f_0 \Longrightarrow \left(\frac{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1 = f_0$$

Donc :

$$\boxed{\bar{x}_1 = \frac{f_0\,(K_1+K_2-m\Omega^2)}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)}}$$

$$\bar{x}_2 = \left(\frac{K_2}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1 = \frac{K_2}{\cancel{K_1+K_2-m\Omega^2}}\cdot\frac{f_0\,\cancel{(K_1+K_2-m\Omega^2)}}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)}$$

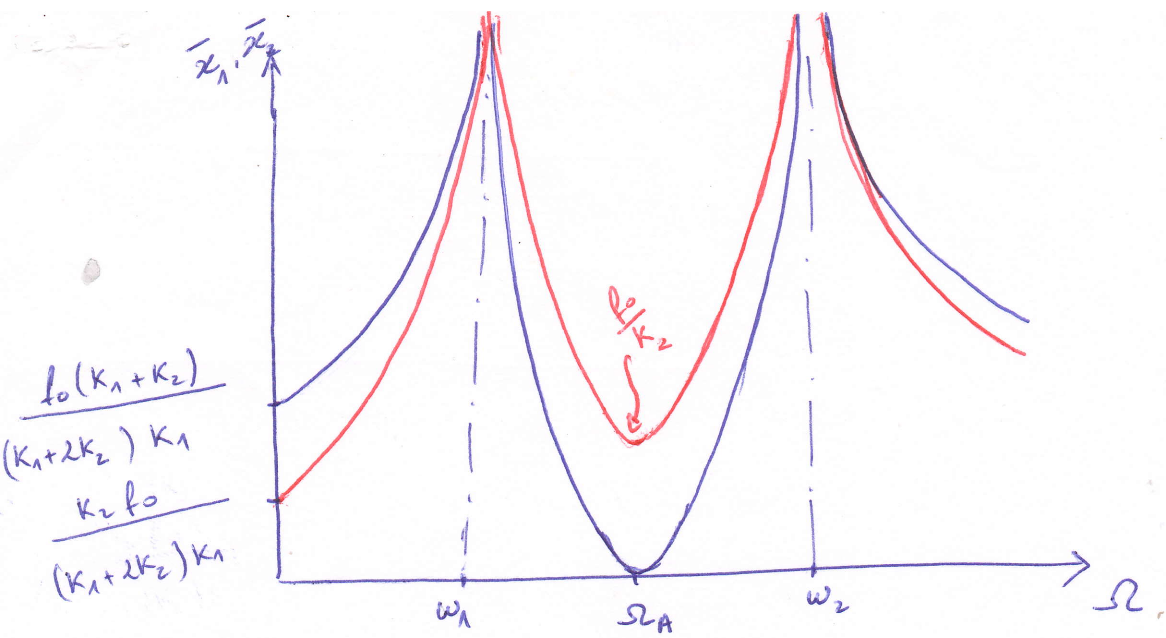
$$\boxed{\bar{x}_2 = \frac{K_2\cdot f_0}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)}}$$

$(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2) \neq 0$ (phénomène de résonance, Amplitude $\to +\infty$)

$$\boxed{\begin{aligned}\Omega &\neq \sqrt{\frac{K_1}{m}} = \omega_1\\ \Omega &\neq \sqrt{\frac{K_1+2K_2}{m}} = \omega_2\end{aligned}}$$

si $\Omega = \omega_1$ ou $\Omega = \omega_2$ on a un phénomène de résonance.

$\omega_1$ et $\omega_2$ : pulsations fondamentale et harmonique de ce système si $F(t) = 0$




- $\bar{x}_1 = 0$, si $f_0(K_1+K_2-m\Omega^2) = 0 \rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}} = \Omega_A}$ $\boxed{\omega_1 < \Omega_A < \omega_2}$

la pulsation $\Omega_A$ est appelée la pulsation "d'antirésonance"

- si $\Omega = \Omega_A \rightarrow \boxed{\bar{x}_2 = \frac{f_0}{K_2}}$

Donc les solutions des équations du mvt $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{f_0(K_1+K_2-m\Omega^2)}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)} \cdot e^{j\Omega t} \\ x_2(t) &= \frac{K_2 f_0}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)} \cdot e^{j\Omega t} \end{aligned}}$$