# Chapitre 03 — Vibration d'un système à 2 ddl

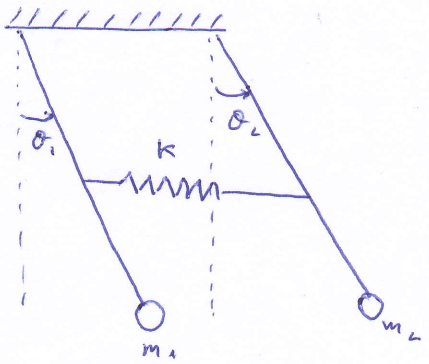
## 1- Vibrations libres d'un système à 2 ddl :

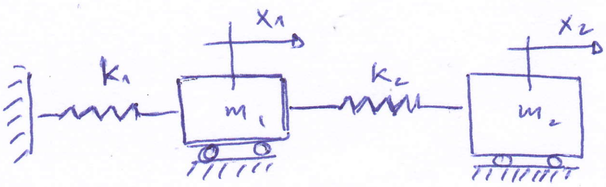
Un système est dit à 2 ddl, si on ne peut le décrire qu'à l'aide de deux coordonnées généralisés $q_1$ et $q_2$, où $q_1$ et $q_2$ n'ont aucune relations entre eux.

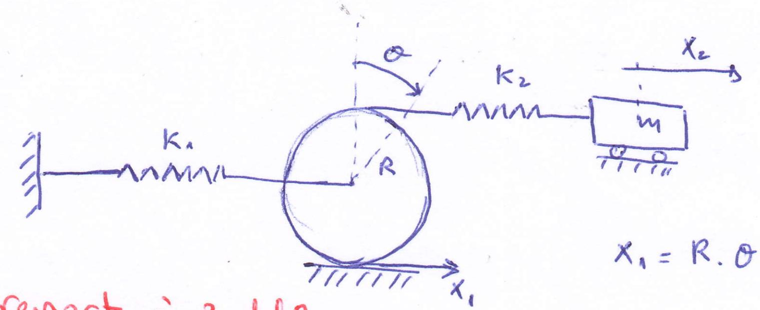
Les équations de lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

Exemples



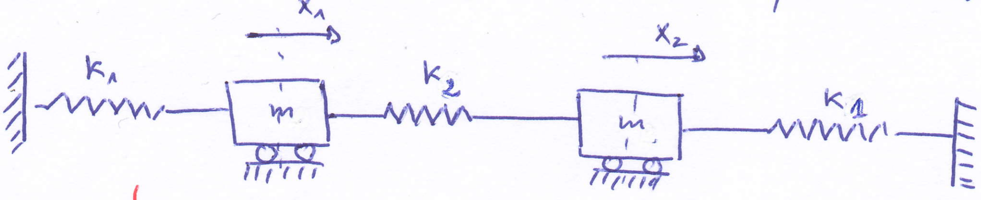




$x_1 = R.\theta$

### Système masse-ressort à 2 ddl :

On considère le système masse-ressort ~~que~~ suivant :




### Energie cinétique totale :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

## Energie potentielle ~~de~~ totale

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_1 x_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

**Eq de Lagrange** : on a deux coordonnées généralisé $x_1$, $x_2$ :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = m\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = m\ddot{x}_2 + k_1 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Donc on a deux équations de mvt couplées

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + k_1 x_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}}$$ Eq de mvt.

On dit que le système est couplé élastiquement.

On peut écrire les équations du mvt sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{[m]} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_1 + k_2) \end{bmatrix}}_{[k]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$[m]$ est la matrice masse du système.

$[k]$ est la matrice de rigidité du système, l'inverse de ~~la~~ la matrice de rigidité $[k]^{-1}$ est la matrice de souplesse ou de flexibilité

## Solutions de l'équation du mvt :

On cherche les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a :

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -A_1\omega \sin(\omega t+\varphi) \\ \dot{x}_2(t) = -A_2\omega \sin(\omega t+\varphi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -A_1\omega^2 \cos(\omega t+\varphi) \\ \ddot{x}_2(t) = -A_2\omega^2 \cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

On remplace $x_1, \ddot{x}_1, x_2, \ddot{x}_2$ dans les équations du mvt :

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1\cos(\omega t+\varphi) + (K_1+K_2)A_1\cos(\omega t+\varphi) - K_2A_2\cos(\omega t+\varphi) = 0 \\ -m\omega^2 A_2\cos(\omega t+\varphi) + (K_1+K_2)A_2\cos(\omega t+\varphi) - K_2A_1\cos(\omega t+\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (K_1+K_2-m\omega^2)A_1\cos(\omega t+\varphi) - K_2A_2\cos(\omega t+\varphi) = 0 \\ (K_1+K_2-m\omega^2)A_2\cos(\omega t+\varphi) - K_2A_1\cos(\omega t+\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (K_1+K_2-m\omega^2)A_1 - K_2A_2 = 0 \\ (K_1+K_2-m\omega^2)A_2 - K_2A_1 = 0 \end{cases} \quad \text{------} \; 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_1+K_2-m\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1+K_2-m\omega^2 \end{bmatrix}}_{[B]} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{[A]} = 0$$

On calcul de déterminant de la matrice $[B]$, pour calculer les pulsations du système

$$\Delta \begin{vmatrix} K_1+K_2-m\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1+K_2-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(K_1+K_2-m\omega^2)^2 - K_2^2 = 0 \qquad a^2-b^2 \rightarrow (a-b)(a+b)$$

$$(K_1+K_2-m\omega^2-K_2)(K_1+K_2-m\omega^2+K_2) = 0$$

$$\begin{cases} K_1 - m\omega^2 = 0 \\ K_1+2K_2-m\omega^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{K_1}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{K_1+2K_2}{m}} \end{cases}}$$

$\omega_1, \omega_2$ : pulsations propres du système

On a : $\boxed{\omega_1 < \omega_2}$

$\omega_1$ : pulsation du mode fondamentale

$\omega_2$ : " du mode Harmonique

les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ~~sont~~ sont données par :

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}}$$

$A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$ sont déterminé à partir des condition initiales

$x_1(t=0)$, $\dot{x}_1(t=0)$, $x_2(t=0)$, $\dot{x}_2(t=0)$

## Rapport des amplitudes dans les deux modes

**Mode fondamental** : $A_{12} = 0$, $A_{22} = 0$

$x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ , $x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

On remplace $x_1$ et $x_2$ dans (1), on trouve : (ou bien on les remplace dans l'équation du mvt) :

$$(K_1 + K_2 - m\omega_1^2) A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - K_2 A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = 0$$

et on a : $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}} \to \omega_1^2 = \frac{K_1}{m}$

$$K_2 A_{11} = K_2 A_{21}$$

$$A_{11} = A_{21} \Longrightarrow \mu_1 = \frac{A_{11}}{A_{21}} = 1$$

$$\boxed{\mu_1 = 1}$$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ ont le même sens de déplacement dans le mode fondamental

**Mode Harmonique** : $A_{11} = 0$, $A_{21} = 0$

$x_1(t) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ , $x_2(t) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

On remplace $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans (1), On trouve :

$$(K_1 + K_2 - m\omega_2^2) A_{21} - K_2 A_{22} = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_1 + 2K_2}{m}} \longrightarrow \omega_2^2 = \frac{K_1 + 2K_2}{m}$$

$$(K_1 + K_2 - K_1 - 2K_2) A_{21} = K_2 A_{22}$$

$$-K_2 A_{21} = K A_{22}$$

$$\mu_2 = \frac{A_{21}}{A_{22}} = -1 \qquad \boxed{\mu_2 = -1}$$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ ont sens opposé dans le mode harmonique.

Donc les formules générales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont données par :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= A_{21}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{22}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}}$$

Soit $x_{10}$, $x_{20}$, $\dot{x}_{10}$ et $\dot{x}_{20}$ sont les valeurs initiales de $x_1(t=0)$, $x_2(t=0)$, $\dot{x}_1(t=0)$, $\dot{x}_2(t=0)$ respectivement.

Donc à $t=0$, On obtient :

$$\begin{cases} x_1(t=0) = A_{11}\cos\varphi_1 + A_{12}\cos\varphi_2 = x_{10} \\ x_2(t=0) = A_{21}\cos\varphi_1 - A_{22}\cos\varphi_2 = x_{20} \\ \dot{x}_1(t=0) = -\omega_1 A_{11}\sin\varphi_1 - \omega_2 A_{12}\sin\varphi_2 = \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_2(t=0) = -\omega_1 A_{11}\sin\varphi_1 + \omega_2 A_{22}\sin\varphi_2 = \dot{x}_{20} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\boxed{A_{11} = \frac{x_{10} + x_{20}}{2\cos\varphi_1} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{x_{10} - x_{20}}{2\cos\varphi_2}}$$

ou encore :

$$\boxed{A_{11} = \frac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{2\omega_1 \sin\varphi_1} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{\dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{2\omega_2 \sin\varphi_2}}$$

avec $\boxed{A_{11} = A_{21} \quad \text{et} \quad A_{12} = A_{22}}$

Donc les solutions de ce système sont :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{x_{10}+x_{20}}{2\cos\varphi_1}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + \frac{x_{10}-x_{20}}{2\cos\varphi_2}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ x_2(t) &= \frac{x_{10}+x_{20}}{2\cos\varphi_1}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - \frac{x_{10}-x_{20}}{2\cos\varphi_2}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{aligned}}$$

## - Cas particuliers

### 1/ Premier cas

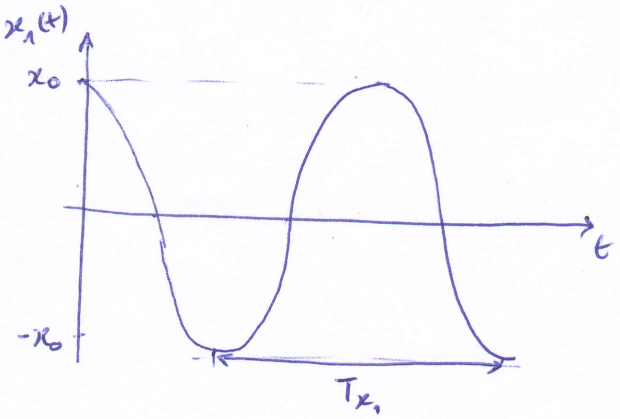
1) Considérons le cas particulier suivant : $x_{10} = x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

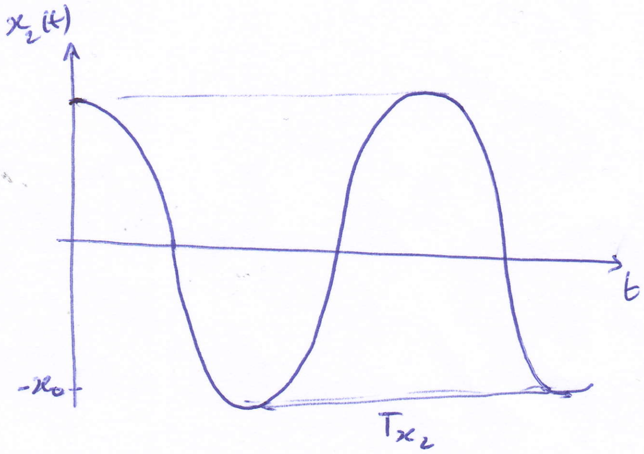
On obtient dans ce cas : $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ et $A_{11} = A_{21} = x_0$ et $A_{12} = -A_{22} = 0$

Donc $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont donnés par :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) &= x_0 \cos(\omega_1 t) \end{aligned}}$$

Pour ces conditions initiales particulières, les deux masses oscillent à la même pulsation $\omega_1$ et dans le même direction, On dit que les système oscille dans le mode fondamental




$$\boxed{T_{x_1} = T_{x_2}}$$

### 2/ Deuxième cas

Dans ce cas, On attire les deux masses dans des sens opposées tel que :

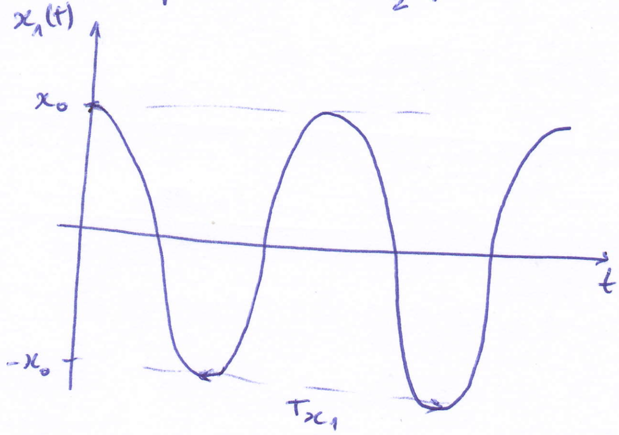
$x_{10} = -x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

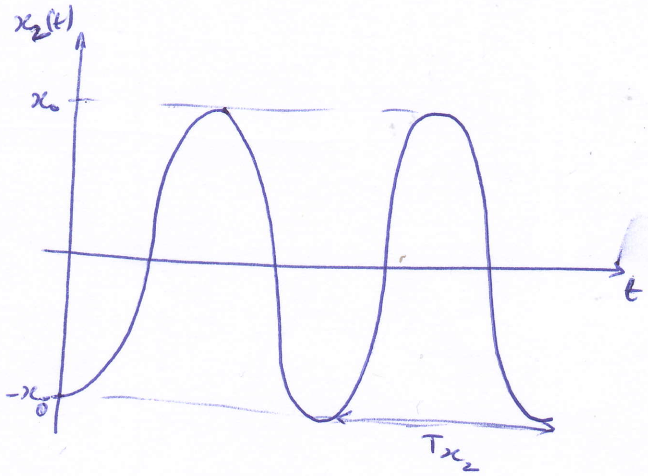
On obtient dans ce cas : $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ et $A_{11} = A_{21} = 0$ et $A_{12} = x_0$ , $A_{22} = -x_0$

Donc $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont donnés par :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) &= -x_0 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

On dit que le système oscille dans le deuxième mode (Mode harmonique) avec même pulsation $\omega_2$.




## 3/ Troisième cas.

Considérons le cas particulier $x_{10} = x_0$, $x_{20} = 0$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$, On obtient :

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $A_{11} = A_{21} = \frac{x_0}{2}$, $A_{12} = -A_{22} = \frac{x_0}{2}$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont donnés par :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{x_0}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{x_0}{2}\cos\omega_2 t \\ x_2(t) &= \frac{x_0}{2}\cos(\omega_1 t) - \frac{x_0}{2}\cos\omega_2 t \end{aligned}}$$

Rappel

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad , \quad \cos(a) = \cos(-a)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad , \quad \sin(a) = -\sin(-a)$$

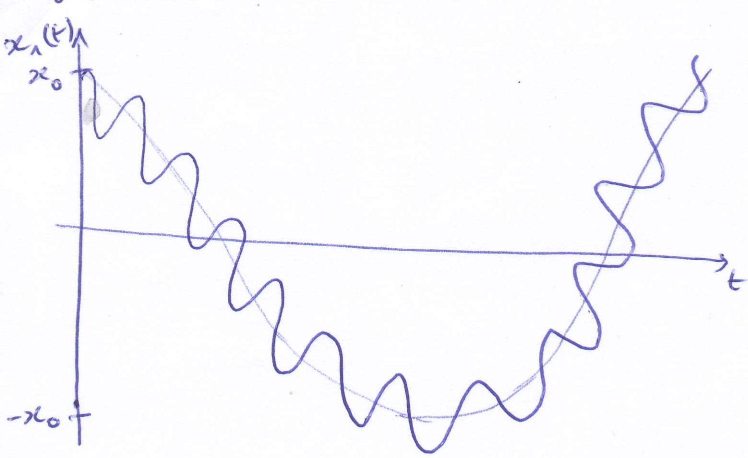
On peut écrire $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sous les forme :

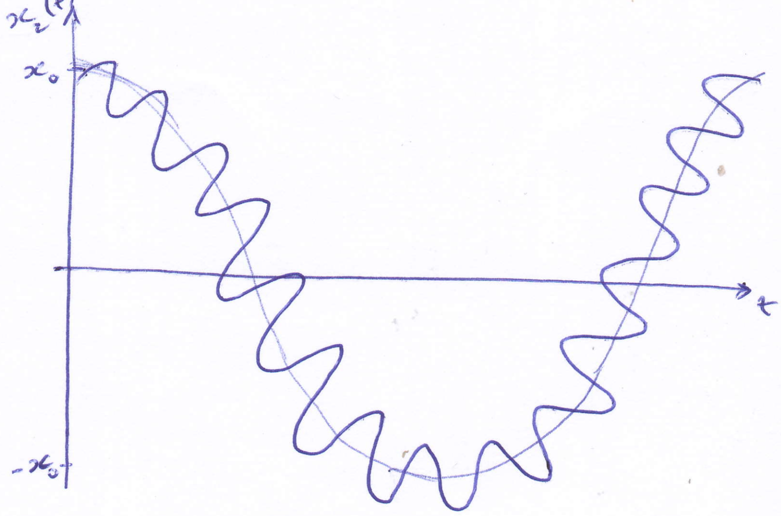
$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ x_2(t) &= x_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{aligned}}$$

les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ont des combinaisons de deux fonctions sinusoïdales des pulsations différentes $\omega_1$ et $\omega_2$

Dans le cas $K_2 >> K_1$ ou $\omega_2 >> \omega_1$ ($K_1$ est différent de $K_2$)

On trouve :




Dans le cas de $\omega_1 \approx \omega_2$ ($\omega_1$ est peu différent de $\omega_2$), On observe un phénomène de battement