

## Poutres continues sur appuis simples

### Introduction :

#### Moments hyperstatiques de précontrainte

Nous avons raisonné jusqu'à ici en examinant l'action de la précontrainte  $P$  sur une section appartenant à une pièce isostatique et nous avons écrit que le moment de précontrainte valait  $Pe$ , par suite de l'excentricité  $e$  de l'armature. Lorsque la pièce n'est pas isostatique l'excentricité  $e$  de l'armature dans une section correspond par sa ligne d'action à de véritables efforts internes qui s'ajoute aux actions extérieures et qui par conséquent modifient les réactions et rotations aux appuis, ainsi que la déformation de la pièce.

A l'état de service le moment de précontrainte  $Pe$  dans la section du système isostatique devient dans le système hyperstatique :

$$Pe + m$$

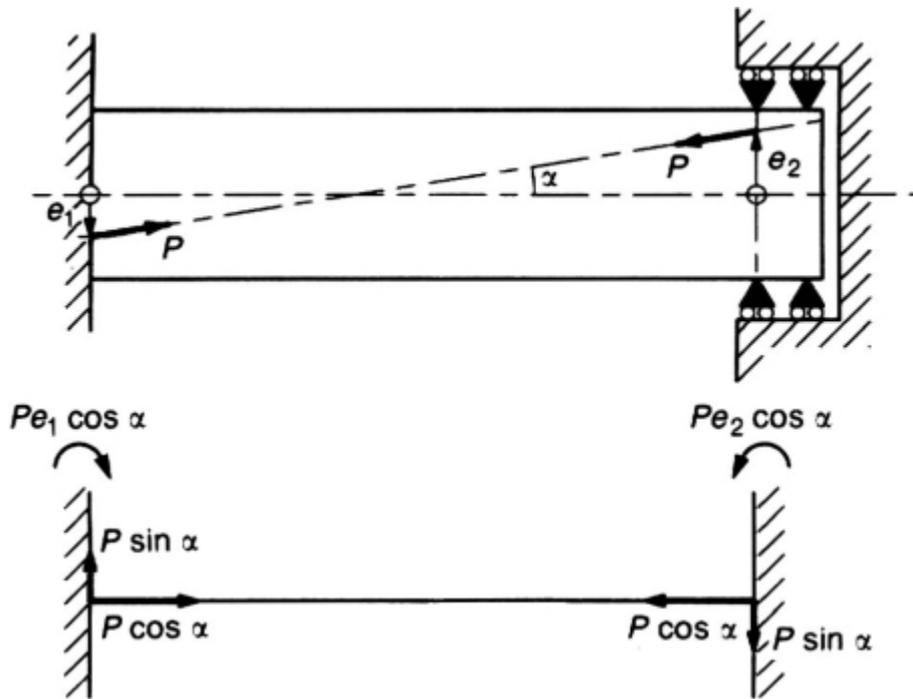
$m$  : est le moment hyperstatique de précontrainte.

Ainsi dans le système hyperstatique on devra faire la vérification de la section (ou on note  $e_0$  l'excentricité de l'armature) avec l'excentricité effective est :

$$e_s = e_0 + m/P$$

pour obtenir  $m$ , on peut utiliser la méthode directe qui consiste à remplacer l'armature de précontrainte par les forces qu'elle exerce sur le béton ce qui conduit à traiter le problème par élasticité linéaire comme un simple cas de chargement extérieur, puisque dans les classes I et II, nous n'admettons pas de fissuration.

- **Cas 01)** on prend le cas d'une poutre d'inertie  $I$ , encastées de ses deux extrémités, mais libre de se raccourcir sous l'effet de l'effort normal  $P$ , l'excentricité sur l'appuis fixe est  $e_1$ , et  $e_2$ , sur l'appuis permettant le raccourcissement (**Fig** suivante).



La force horizontale est  $P \cos \alpha$ , est la force verticale est :  $P \sin \alpha = Pt \tan \alpha = P(e_2 - e_1)/l$ . les couples ont pour valeurs  $Pe_2 \cos \alpha$  a droite et  $-Pe_1 \cos \alpha$  a gauche, les ractions d'appuis au droit des encastrement valent :

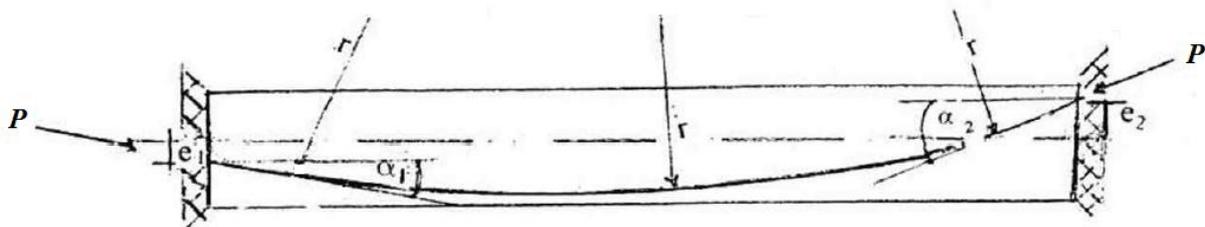
$$R_1 = -r_2 = (-Pe_1 \cos \alpha + Pe_2 \cos \alpha)/l = -P \cos \alpha (e_1 - e_2)/l$$

Et n'introduisent aucune sollicitation dans la poutre, de même les couples  $Pe_2 \cos \alpha$  et  $-Pe_1 \cos \alpha$ , sont automatiquement bloqués par les liaisons d'extrémité.

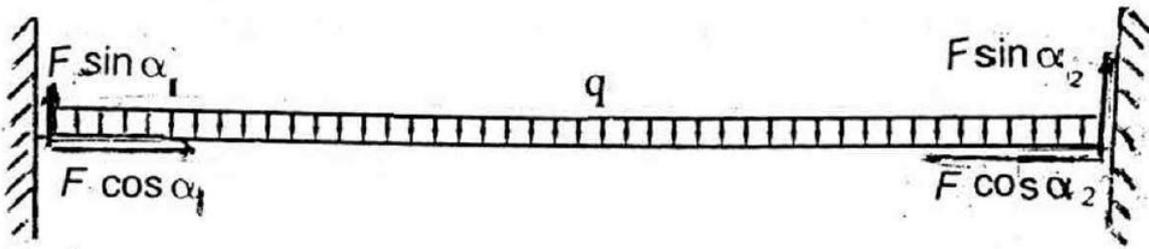
Les sollicitations totales de précontrainte sont nulles car l'armature est en outre rectiligne au long de la travée.

La poutre finalement n'est soumise qu'à l'effort normal  $P \cos \alpha$ , car elle peut se déplacer sur l'appui de droite. La précontrainte serait sans effet dans le cas d'une poutre où les deux appuis sont parfaitement encastrés, soumise à une précontrainte rectiligne.

En fait si cette poutre dont les deux appuis seraient encastrés donc bloqués à ses deux extrémités vis-à-vis des rotations et déplacements tant verticaux qu'horizontaux et si elle est sollicitée par un câble de tracé courbe, parabolique par exemple de rayon de courbure  $r$ , ce câble provoque des charges ascendantes uniformément réparties  $q = P/r$  car il est soumis à une force de précontrainte  $P$ .



Le schéma des sollicitations est représenté sur la figure suivant :



Les forces dues au câble comprennent

- les forces concentrées sous ancrage.
- les forces réparties  $P/r$  (en admettant  $r$  constant le long du câble) les composants de forces sous ancrage sont directement bloquées par les encastremets parfaits d'extrémités, elles n'ont aucun effet sur la poutre, seul la charge  $q=P/r$  uniformément réparties est à considérer sur cette poutre parfaitement encastree a ses deux extrémités d'où les moments de précontrainte aux appuis :  $-P/r \cdot l^2/12$ .

Et en travée :

$$\left[ -\frac{F}{r} \frac{l^2}{12} + \frac{F}{r} \frac{x(l-x)}{2} \right] \text{ soit } \frac{F}{r} \frac{l^2}{24} \text{ à } \frac{l}{2}$$

### 1.3. Moments hyperstatiques de précontrainte dans une poutre continue :

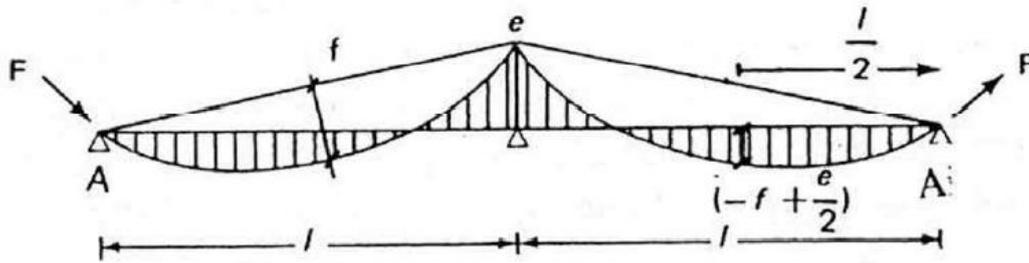
La méthode la plus simple consiste à supposer que le système étudié est composé de travées indépendantes soumise a la seule action des moments isostatiques et de calculer les moments hyperstatiques de précontrainte aux appuis en examinant que la somme des rotations sur chaque appuis est nulle. C'est ainsi que les rotations aux appuis d'une poutre isostatique d'inertie constante I, précontrainte par une force  $P$  dont le tracé parabolique a une flèche  $f$ ,  
 Ont pour valeur, par application du théoreme de MOHR par exemple :

$$\theta_1 = -\frac{Ff}{EI} \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{Ffl}{3EI}$$

$$\theta_2 = \frac{Fel}{2EI} \cdot \frac{2}{3} = \frac{Fel}{3EI}$$

Ce sont des rotations isostatiques.

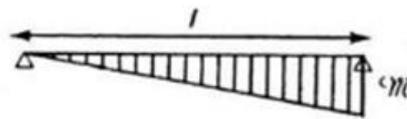
Si nous mettons cette poutre en continuité avec une poutre identique, donc de même caractéristique (section, portée, inertie) avec une même précontrainte de tracé parabolique F.



Poutre libre sur ses deux travées

L'intervention du moment hyperstatique de précontrainte m permet d'écrire :

$$\theta_m = \frac{m\ell}{3EI}$$



Et de déterminer ainsi la valeur du moment hyperstatique de précontrainte en notant que la somme des rotations est nulle :

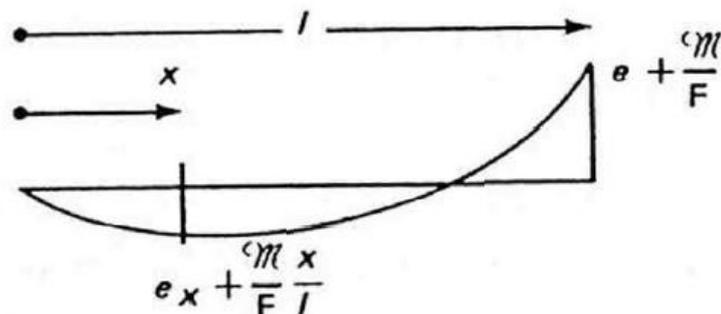
$$-\frac{Ff\ell}{3EI} + \frac{Fe\ell}{3EI} + \frac{m\ell}{3EI} = 0 \text{ d'où } m = F(f - e)$$

Sur l'appui on a l'effet hyperstatique + l'effet isostatique, égaux a :

$$P(f-e) + Pe = Pf$$

Et à mi-travée, nous obtenons ainsi :

$$\text{Effet hyper} + \text{Effet iso} = -Ff + \frac{Fe}{2} + \frac{F(f-e)}{2} = \frac{-Ff}{2}$$



Le moment totale de précontrainte se déduit ainsi de la fig précédente, en toute section  $x$  de la poutre on :

$$e_x + \frac{m}{F} \frac{x}{\ell}$$

dans un tel système ou l'excentricité du câble est nulle a chaque extrémité libre, le moment totale de précontrainte est indépendant de  $e$  qui est l'excentricité sur l'appui central ou la valeur du moment total de précontrainte est ;  $Pf$ , alors que sa valeur à mi-travée est :

$$-Pf/2$$

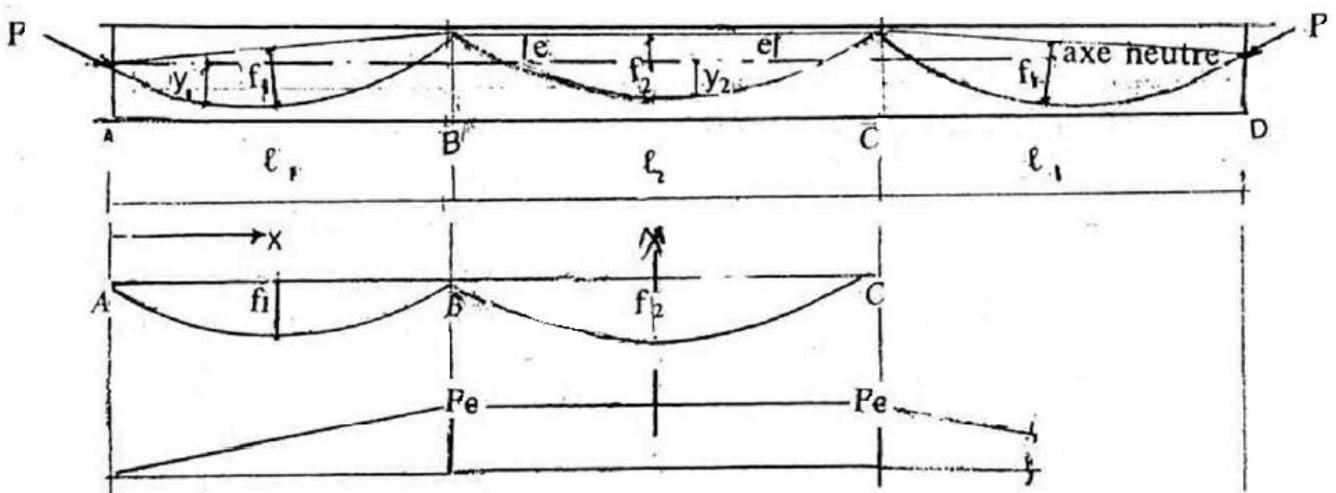
- on dira que le câble est concordant si le moment hyperstatique de précontrainte est nul (ici pour  $f=e$ ).

Nous remarquons dans les méthodes utilisées, que toute armatures située au-dessus de l'axe neutre crée un moment isostatique positif, et toute armature située au dessous de l'axe neutre crée un moment isostatique negatif.les rotations ont les mêmes signes que les moments.

On va appliquer cette méthode sur une poutre d'inertie constante à trois travées dont les deux travées de rives ont une même longueur  $l_1=l_3$ , et la travée centrale  $l_2$  est plus importante.

Notons que l'excentricité  $e$  sur les appuis de continuité **B** et **C**, est une excentricité théorique obtenu en prolongeant jusqu' a la verticale des appuis **B** et **C**, les deux paraboles de flèches  $f_1$  et  $f_2$  car l'armature filante du câble présente un tracé parabolique dans chacune des trois travées (en **A** et **D** le câble est au niveau de l'axe neutre ).

La poutre est libre sur les deux appuis de rive **A** et **D**.



Les rotations isostatiques des travées sont dues sur l'appui de continuité B :

-Au câble de travée  $l_1$  et de flèche  $f_1$  :  $-\frac{P l_1 f_1}{3EI}$

- A l'excentricité  $e$  sur l'appui B de AB :  $\frac{P e l_1}{3EI}$

-Au câble de travée  $l_2$  et de flèche  $f_2$  :  $-\frac{P l_2 f_2}{3EI}$

A l'excentricité  $e$  sur l'appui B de la travée BC, qui a même valeur que celle notée sur l'appui C.

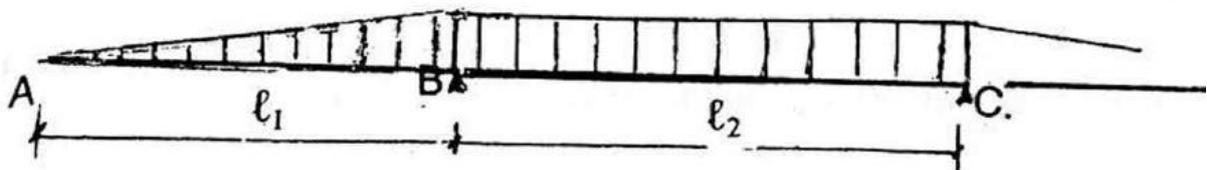
$$\frac{P e l_2}{3EI} + \frac{P e l_2}{6EI} = \frac{P e l_2}{2EI}$$

Tandis que l'inconnu hyperstatique  $m$  sur l'appui B ou C, donne respectivement pour la travée AB, de porté  $l_1$ ,

$$\frac{m l_1}{3EI}$$

Et pour la travée BC de porté  $l_2$  :

$$\frac{m l_2}{3EI} + \frac{m l_2}{6EI} = \frac{m l_2}{2EI}$$



Nous avons la valeur hyperstatique  $m$ , sur l'appui B ou C, en écrivant que la somme des rotations est nulle sur l'appui B ;

$$-\frac{P l_1 f_1}{3EI} + \frac{P e l_1}{3EI} - \frac{P l_2 f_2}{3EI} + \frac{P e l_2}{2EI} + \frac{m l_1}{3EI} + \frac{m l_2}{2EI} = 0$$

Soit :

$$m = P \frac{l_1 (f_1 - e) + l_2 (f_2 - 3/2 e)}{l_1 + 3/2 l_2}$$

En faisant l'addition de l'effet isostatique du câble et de son effet hyperstatique, on peut obtenir le moment total de précontrainte nécessaire à la vérification des sections, puis son effet hyperstatique.

Moment isostatique :  $M_1 = -P y_1$  et  $M_2 = -P y_2$ .

Moment hyperstatique :

$$P y'_1 = \frac{m}{F} \cdot \frac{x}{\ell_1} \quad \text{sur } \ell_1$$

$$P y'_2 = \frac{m}{F} \quad \text{sur } \ell_2$$

Le moment de précontrainte sur les appuis B ou C est :

$$P e + m = P \frac{\ell_1 f_1 + \ell_2 f_2}{\ell_1 + 3/2 \ell_2}$$

Et pour valeur en travée :

- $P y_1 + m x/l_1$  le long de  $l_1$ .
- $P y_2 + m$  le long de  $l_2$ .

disons qu' il n'est pas nécessaire de rechercher systématiquement une relation de concordance ou  $m=0$  ( dans ce deuxième exemple ce serait pour  $f_1=e$  et  $f_2=3/2e$ ) car il ne faut perdre de vue que ce type de calcul est effectué pour vérifier les sections en service mais qu'à l'état limite ultime la sécurité a rupture sera d'autant meilleure sous des charges verticales, que l'armatures sera disposée le plus bas possible en travée et le plus haut possible sur appuis intermédiaires. C'est la bonne solution si elle satisfait également aux vérifications des sections à vide et en service.

On peut obtenir directement le moment total de précontrainte en considérant la précontrainte comme une action extérieure. Il suffit de remplacer les tronçons d'armature paraboliques par des charges uniformément réparties et les chargements correspondant aux tracés polygonaux par des charges concentrées.

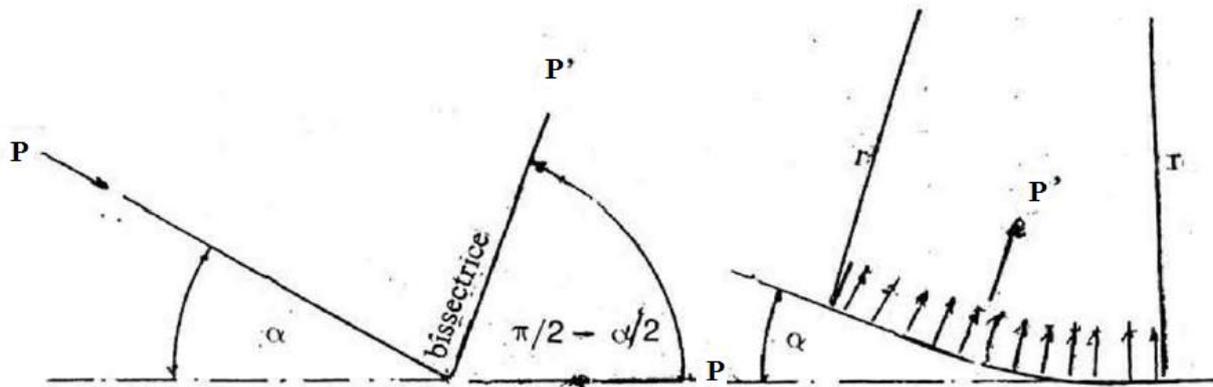
Ainsi pour une parabole de longueur  $l$  et de flèche  $f$  soumise a une précontrainte  $P$ , on a l'équivalence :

$$P f = \frac{p \ell^2}{8} \quad \text{d'où} \quad p = \frac{8 P \cdot f}{\ell^2}$$

Et pour un tracé de rayon circulaire  $r$ , soumise a la précontrainte  $P$  on a ;  $p=P/r$

Pour un tracé polygonal on remarque que l'armature soumise a une force  $P$  exerce sur le béton une force  $P'$ , concentrée dirigée suivant la bissectrice des deux segments adjacents, sa valeur est ;  $P' = 2P \sin \alpha/2$ .

Compte tenue de ce que l'angle  $\alpha$  est toujours faible, l'effort concentré  $P'$  peut être assimilé a une force dirigée verticalement, dans la mesure où l'on néglige la composante horizontale.



Appliquons le calcul direct du moment total de précontrainte à une poutre d'inertie constante à trois travées égales, dont l'armature a un tracé parabolique et une flèche  $f$  dans chacune des travées. Sous l'effort de précontraint  $P$  le câble développe une force ascendant uniformément réparties  $p=8Pf/l^2$ , et par suite un moment fléchissant sur l'appui B ou C correspondant à :

$$\left| \frac{p\ell^2}{10} \right| \quad \text{soit} \quad \frac{8Pf}{10} = \frac{4 P.f}{5} = M_p$$

Comparons ce résultat à celui obtenu précédemment pour la poutre à trois travée mais en faisant  $l_1=l_2=l$  et  $f_1=f_2=f$

Et en conservant l'excentricité sur les appuis B et C, **figure** suivante.

Le moment total de précontrainte ( $Pe+m$ ) trouvé étant :

$$Pe + m = P \frac{l_1 f_1 + l_2 f_2}{l_1 + 3/2 l_2}$$

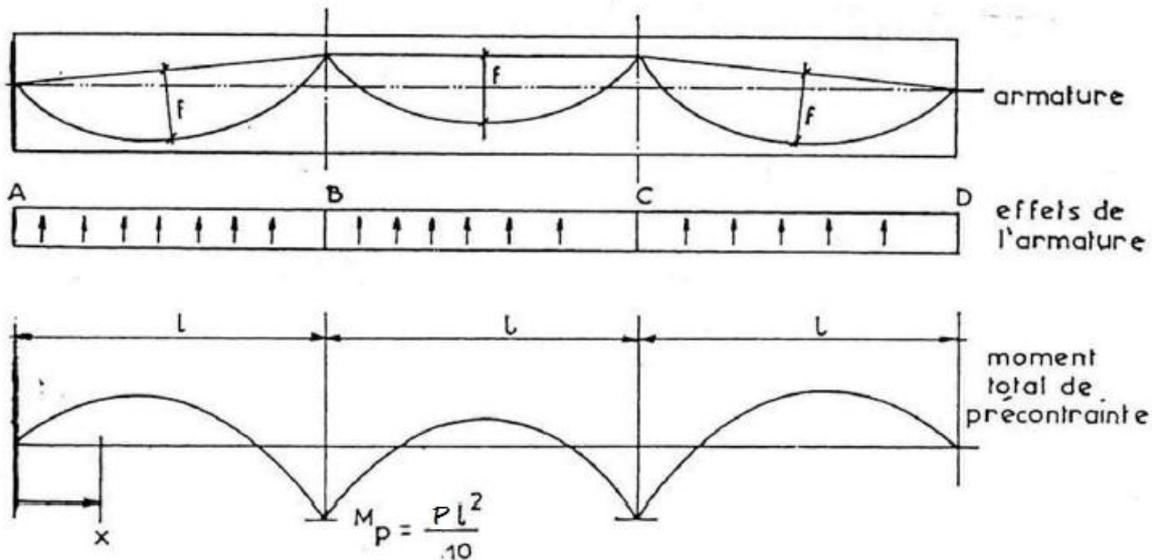
$$Pe + m = P \frac{2\ell f}{5/2\ell} = \frac{4}{5} Pf$$

Le moment hyperstatique de précontrainte  $m$  vaut sur l'appui B :

$$m = \frac{4}{5} Pf - Pe$$

Et le moment total à l'abscisse  $x$ , s'écrit :

$$P \frac{x(\ell - x)}{2} - \left( \frac{p\ell^2}{10} \right) \frac{x}{\ell}$$

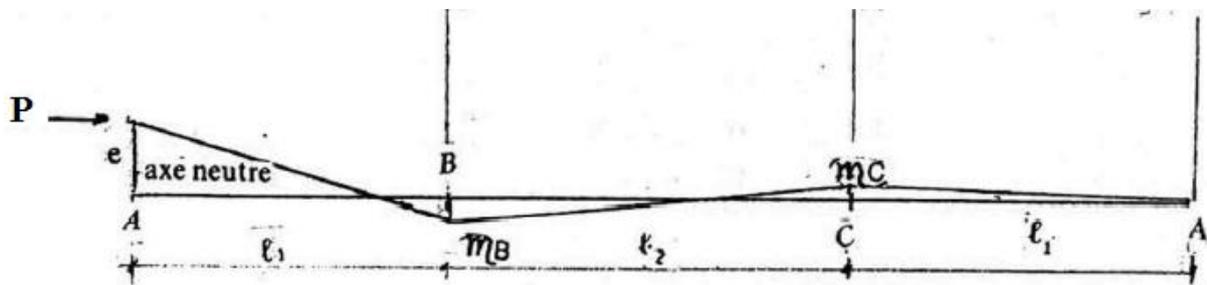


Dans les exemples précédant nous avons considéré que l'armature de précontrainte été sur les appuis B et C de la poutre de la Figure suivante, on obtient : ancrée au niveau de l'axe neutre sur l'appui de rive .nous allons voir que l'excentrement  $e$  d'un ancrage de rive entraîne la modification des moments hyperstatiques de précontrainte et par conséquent du moment total de précontrainte le long de la poutre.

En écrivant que la somme des rotations est nulle, on obtient :

$$\frac{Pe\ell_1}{6EI} + \frac{m_B\ell_1}{3EI} + \frac{m_B\ell_2}{3EI} + \frac{m_C\ell_2}{6EI} = 0 \quad \text{sur l'appui B}$$

$$\frac{m_C\ell_2}{3EI} + \frac{m_C\ell_1}{3EI} + \frac{m_B\ell_2}{6EI} = 0 \quad \text{sur l'appui C}$$



La deuxième équation nous donne :

$$m_B = -m_C \lambda \quad \text{avec } \lambda = 2 \left( 1 + \frac{\ell_1}{\ell_2} \right)$$

Et l'on tire de la première équation:

$$m_c = \frac{P e \ell_1}{\ell_2 (\lambda^2 - 1)} \quad \text{soit} \quad m_B = \frac{P e \lambda \ell_1}{\ell_2 (\lambda^2 - 1)}$$

Ici la courbe représentative des moments hyperstatique de précontrainte est une ligne brisée passant par les foyers de droite des travées AB et BC. Toute excentricité d'un ancrage de rive entraîne la modification du moment total de précontrainte. Dans le cas d'une excentricité sur l'appui de rive situé a droite de la poutre la ligne brisée représentant les moments hyperstatiques de précontraintes passe par le foyer a gauche de la poutre.

### Poutre continues précontraint par armature rectiligne

Ce problème est celui que nous trouvons le plus souvent dans l'exécution des planchers de bâtiments.

Prenons le cas d'une poutrelle dont la retombée préfabriquée est rectangulaire ou trapézoïdale alors que sa section finie sera une section en T, le poids propre  $p$  de la retombée s'exprime par unité de longueur, son moment d'inertie est  $i$ , sa section est  $s$  et la force de précontrainte qui introduite est  $P$ , si nous tenons compte à chaque extrémité de la zone d'établissement de la précontrainte, la longueur réelle  $l$  passe a  $l_I$  qui est de l'ordre de  $0.8$  à  $0.9 l$ .

La rotation libre de cette poutrelle sur le banc de précontrainte vaut :

$$\frac{p \ell^3}{24Ei} - \frac{P e \ell_1}{2Ei} = \theta$$

Cette rotation, ou l'on note le facteur de rigidité  $Ei$ , ne fera que s'accroître au cours de son stockage car le module d'élasticité  $E$  passe de  $Ei$  a  $E_v$ .

La pose devra donc se faire très rapidement (1 semaine environ) après la préfabrication afin de compléter la section d'inertie  $i$  par un hourdis portant sur les poutrelles, et coulé en place, c'est dans l'épaisseur de ce hourdis donc avant son bétonnage que sont placées les armatures passives de continuité entre deux poutrelles successives. ce hourdis complémentaire situer entre les poutrelles est parfaitement coffré et étayé jusqu' sol, la poutrelle elle-même peut quelques fois être soulagée par un étai (sans la forcer en sous face); même si cette poutrelle n'est pas soulagée par un étai, elle reçoit des le bétonnage du hourdis sur son parement, un poids complémentaire  $p_I$  par unité de longueur correspondant a cette sur épaisseur sur la retombée. La rotation  $\theta_I$  avant même durcissement de ce béton complémentaire, et on peut écrire pour cette poutrelle qui est encore libres sur ses deux appuis, et qui n'est pas soulagée en sous face par un étai :

$$\theta_i = \frac{(p + p_I) \ell^3}{24Ei} - \frac{P e \ell_1}{2Ei}$$

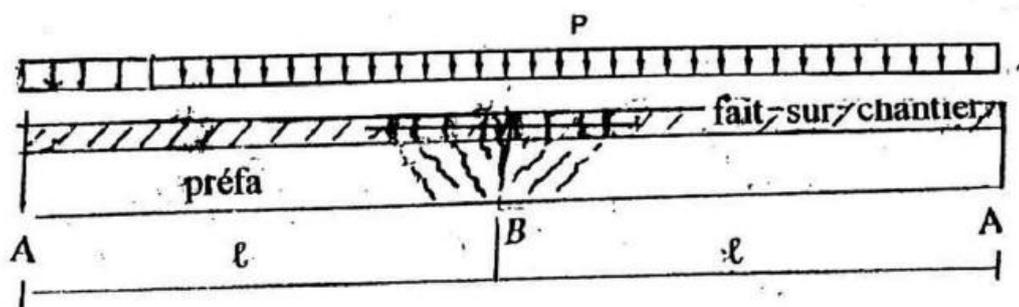
Après durcissement du hourdis tous les étais et coffrages qui le soutiennent sont retirés et on constate la parfaite liaison de ce hourdis avec la poutrelle :

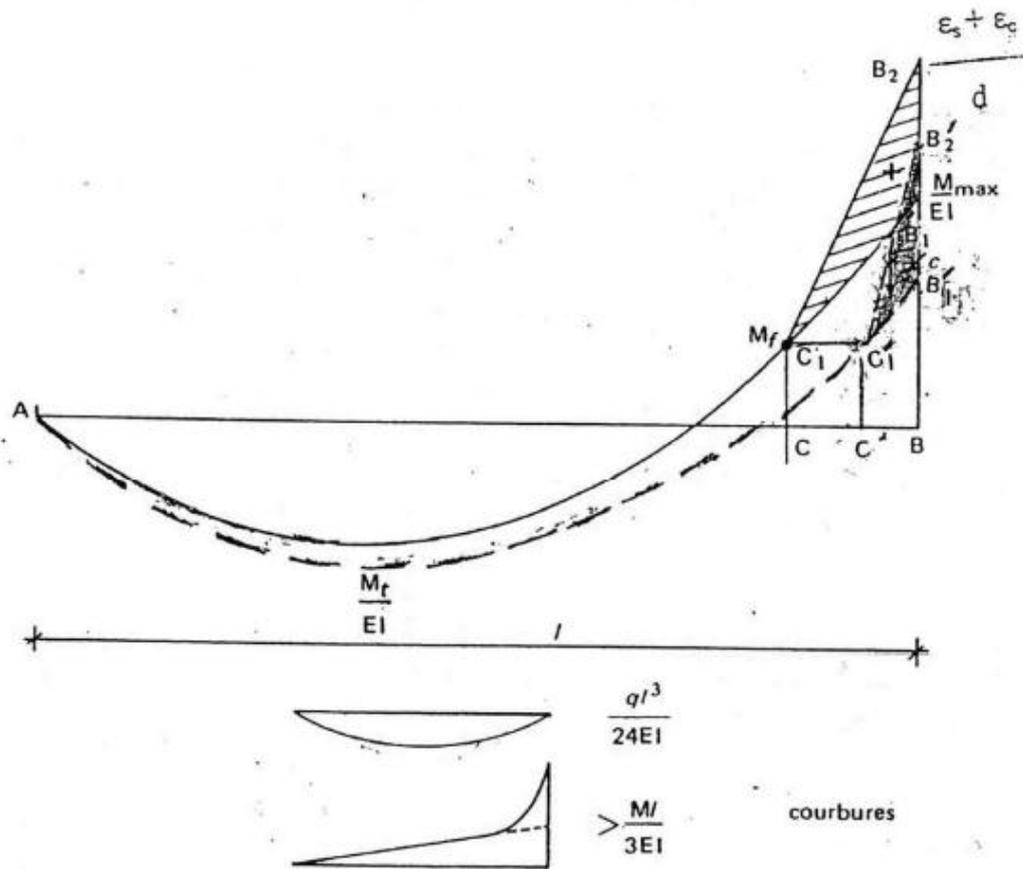
Grace aux armatures de coutures prévues sur le parement supérieur de la poutrelle (on note de ce fait que le moment d'inertie  $i$  augmente car la section comprend le hourdis complémentaire) le nouveau moment d'inertie devient  $I$  avec des caractéristiques nouvelles (section S ...etc).

Les aciers passifs posés en chapeaux entre poutrelle permettent de prendre en compte un moment de continuité pouvant limiter la déformation de la poutrelle qui dans le cas d'un plancher d'habitation ou de bureaux reçoit respectivement outre son poids propre et éventuellement le poids  $p_I$  mentionné ci-dessus (qui ne produit aucune sollicitation sur les chapeaux de continuité) mais en plus le poids propre de hourdis entre poutrelles, le poids de revêtement du sol, des cloisons et l'action de la surcharge libre contribuent à créer un moment de continuité, donc à solliciter les armatures en chapeaux la charge permanente totale (déduction faite du poids propre de la poutrelle préfabriquée et éventuellement du poids  $p_I$  du hourdis qui la surplombe) est  $G$  au  $m^2$ , la surcharge libre est  $Q$  au  $m^2$ , celle-ci peut être disposée sur les travées d'une façon défavorable et on est alors conduit à traiter un problème classique de RDM car en service nous utilisons la théorie de l'élasticité sur la quelle cependant nous ferons quelques remarques à propos des résultats obtenus ; il s'agit surtout de la redistribution des sollicitations.

Pour fixer les idées on prend l'exemple d'une poutre continue à deux travées égales  $l$  et également chargées leur appui d'extrémité A est libre, leur moment d'inertie  $I$  est constant.

Si il s'agit d'une poutre dont la retombée est préfabriquée et précontrainte il est rappelés que le hourdis coulé en place (contenant les armatures de continuité ou chapeaux, n'est pas précontraint). Au droit et au voisinage de l'appui B des fissures apparaitront sous l'effet du moment négatif des que le chargement sur les travées atteindra un certain niveau et que la contrainte de traction du béton dans cette zone d'appui, dépassera  $1.5$  à  $1.5 f_{tj}$ . En B la précontrainte agit à partir de la longueur  $l_e$





La rotation élastique en B qui permet de déterminer le moment fléchissant  $M_{max}$  de continuité s'écrit ; sous l'action de la charge permanente  $q$  par exemple :

$$\frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{M_{max}\ell}{3EI} = 0 \quad (1)$$

Des que l'action de la charge  $q$  contribue à fissurer la zone d'appui B, la courbure élastique  $M/EI$  augmente car au droit des fissures, le moment d'inertie des sections est plus faible, et on observe ainsi que le diagramme générale des courbures  $M/EI$  tracé à partir de celui des moments fléchissant se trouve augmenté (des le point C qui marque le début de la zone fissurée Figure précédente) d'une aire  $C_1, B_1, B_2$ , sensiblement triangulaire car la valeur croissante du moment  $M$ , dans la zone d'appui B augment simultanément le nombre et la profondeur des fissures.

L'équation (1) ci-dessus devrait alors s'écrire :

$$\frac{q\ell^3}{24EI} + \left[ \frac{M\ell}{3EI} + \text{aire } C_1 B_1 B_2 \frac{(\ell - c)}{\ell} \right] = 0 \quad (2)$$

« c » est l'abscisse du centre de gravité du triangle  $C_1 B_1 B_2$ . en fait dans la zone fissurée au droit de chaque section il est plus exact d'écrire que la courbure est fonction de l'allongement  $Ea$  de l'acier en l'exprimant par  $(E_s + E)/d$ , dans toute section de hauteur utile  $d$  ; notons aussi qu'en A, par l'existence même de cette augmentation de courbure de la zone fissurée délimitée par  $C_1 B_1 B_2$  on devra écrire, en toute rigueur et s'il en est besoin que la rotation est :

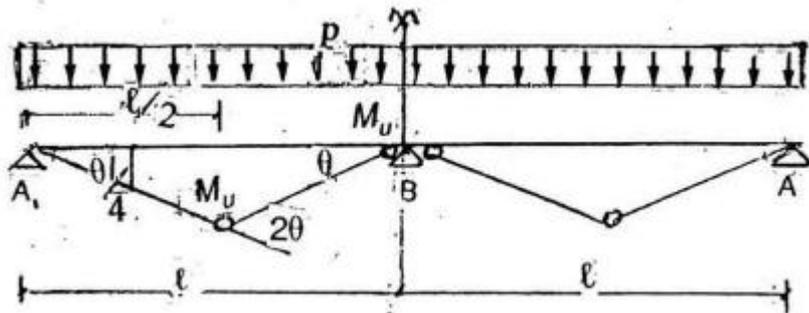
$$\theta_A = \frac{q\ell^3}{24EI} - \text{aire } C_1 B_1 B_2 \cdot \frac{c}{\ell} - \frac{M_{\max}\ell}{6EI}$$

L'égalité (2) ne peut être satisfaite qu'en diminuant simultanément le moment sur appui  $M$  et en augmentant le moment en travée comme montré au Fig137 par ligne en tirets, cette transformation par rapport à la ligne élastique permet d'une part d'augmenter la rotation due au moment en travée et de réduire l'aire supplémentaire de courbure  $C_1 B_1 B_2$  à  $C'_1 B'_1 B'_2$ , ce report du moment sur appui vers le moment en travée se poursuit et peut même s'inverser jusqu'à trouver un équilibre des moments (donc des courbures) qui puisse satisfaire l'équation (2), alors que en béton armé le report du moment sur appui vers le moment en travée entraîne assez rapidement la fissuration en travée également, en béton précontraint ou les retombées sont soumises à la pré-tension préalable la fissuration n'intervient qu'après la mise en place de la charge permanente de service et en outre de la surcharge car la charge permanente et la surcharge ne provoquent en service et en classe II que une traction de 1.5ftj, sur le parement précontraint de la poutrelle préfabriquée.

Ce processus de renvoi du moment de appui vers le moment en travée, phénomène favorisé par l'existence de fissuration, s'observe jusqu'à la formation d'une rotule plastique pouvant céder prématurément si le moment fléchissant donné par le calcul élastique est insuffisant par suite de ce rééquilibrage des moments fléchissant dus essentiellement à la fissuration (c'est le cas d'une redistribution imparfaite). si la rupture n'intervient pas, il y a formation d'un mécanisme de rupture (cas de redistribution parfaite) avec la possibilité d'envisager plusieurs de ces mécanismes de rupture et de choisir le plus défavorable pour l'équilibre et la stabilité du système étudié. ici les rotations plastiques peuvent naître soit sur l'appui de continuité soit en travée et le plus prudent pour l'ingénieur sera d'adopter les formules forfaitaires de Caquot ou par rapport aux résultats de l'élasticité linéaire on diminue la valeur des moments sur appuis et on augmente la valeur des moments en travée en respectant toujours  $M_a + M_t = 1.05M_0$  ( $M_0$  étant le moment isostatique de la travée étudiée) dans le cas que nous examinons, plusieurs mécanismes de rupture qui permettront de faire la vérification d'état

ultime du système car compte tenu de la fissuration qui se développe sous l'augmentation de chargement , l'utilisation de la théorie élastique n'est pas recommandée)

▪ **Cas 02)-a** nous envisageons donc le mécanisme de rupture le plus probable pour ces deux travée uniformément chargées, comprennent une rotule a mi-travée de chaque poutrelle et de part et d'autre de l'appui intermédiaire une rotule également.



Le travail externe s'écrit dans la travée AB :

$$2 \left[ p \frac{l \theta}{2} + \frac{l}{4} \theta \right]$$

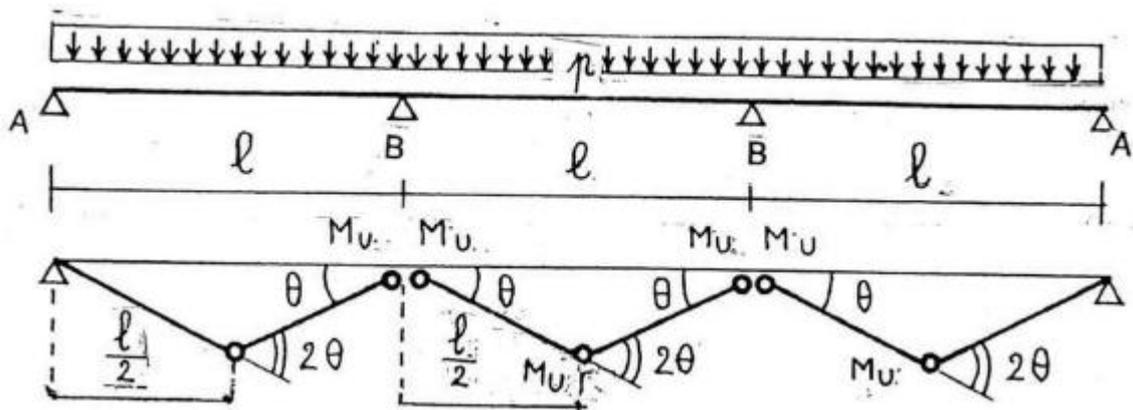
Alors que le travail interne vaut :

$$M_u \cdot 2\theta + 0 + M_u \theta$$

Car en A appui libre le moment fléchissant est 0, en égalant le travail externe et interne, on obtient :

$$\frac{2p\ell^2}{8} = 3M_u \quad \text{ou} \quad M_u = \frac{p\ell^2}{12}$$

▪ **Cas 02)-b** dans le cas de la poutre intermédiaire d'une poutre continue a trois travées égales dont les appuis de rives sont soumise à une charge uniforme



Le travail externe dans la travée BB s'écrit:

$$2 \cdot \left( p \frac{l}{2} \theta + \frac{l}{4} \theta \right)$$

Et le travail interne vaut :

$$M_u \cdot \theta + M_u \cdot 2\theta + M_u \cdot \theta$$

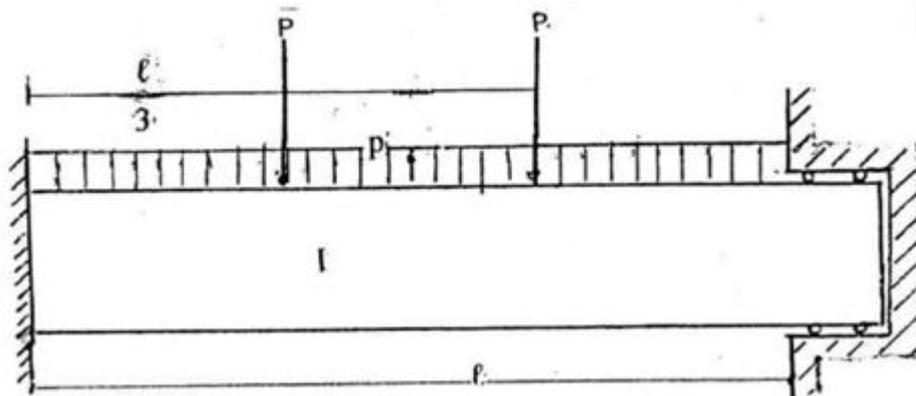
L'égalité des travaux externe et interne, donne :

$$\frac{2p\ell^2}{8} = 4 M_u \quad \text{soit} \quad M_u = \frac{p\ell^2}{16}$$

L'étude de la travée AB nous ramène au cas précédant et on conservera sur l'appui B le moment  $M_u$  le plus défavorable soit :

$$M_u = P\ell^2/12$$

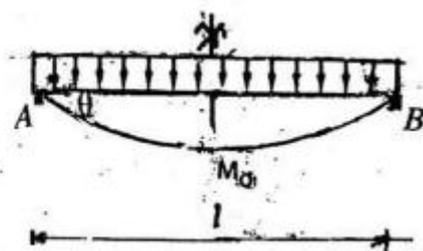
▪ **Cas 02)-c** : cas de la poutre parfaitement encastrée a la flexion a ses deux extrémités (grâce a deux rouleaux supérieurs et inférieurs) mais libre de se raccourcir, donc sans blocage vis-à-vis de l'effort normal.



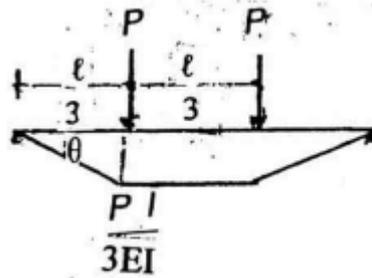
Cette poutre est soumise à une charge uniforme et, deux charges égales concentrées disposées chacune à  $l/3$  des appuis. Cette poutre est précontrainte en classe II, et n'aura donc aucune fissure de flexion a l'état de service ou nous utilisons la théorie élastique pour déterminer les moments fléchissants :

Pour la charge uniformément répartie, on détermine les rotations de la poutre librement appuyée. On se sert pour cela de l'aire du diagramme du moment fléchissant de valeur  $p\ell^2/8$  à mi-portée et on écrit :

$$\theta_A = \theta_B = \frac{1}{2EI} \left( \frac{p\ell^2}{8} \cdot \frac{2\ell}{3} \right) = \frac{p\ell^3}{24EI}$$

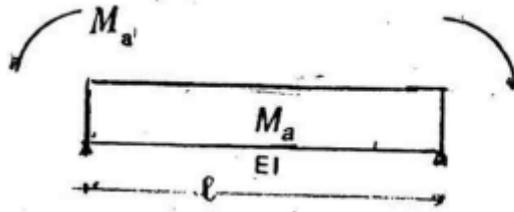


Pour les deux charges concentrées, correspondant sur la poutre isostatique à un moment  $p\ell/3$ , au droit de  $p$ , on peut écrire :



$$\theta_A = \theta_B = \frac{1}{EI} \left( \frac{P\ell}{3} \cdot \frac{\ell}{6} + \frac{P\ell}{3} \cdot \frac{\ell}{6} \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{2P\ell^2}{18} \right) = \frac{P\ell^2}{9EI}$$

Pour le moment d'encastrement  $M_a$  sur chaque appui :



$$\theta_A = \theta_B = \frac{M_a \ell}{2EI}$$

D'où la valeur du moment  $M_a$ , qui se déduit de :

$$\frac{p\ell^3}{24EI} + \frac{P\ell^2}{9EI} + \frac{M_a \ell}{2EI} = 0 \quad M_a = - \frac{p\ell^2}{12} - \frac{2 P\ell}{9}$$

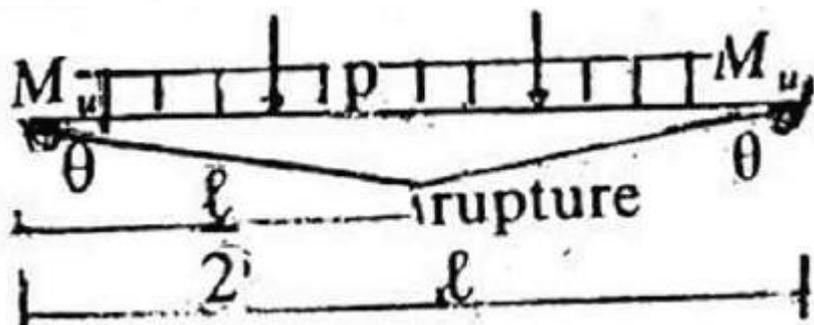
Et par suite la valeur du moment en travée :

$$M_t = \frac{p\ell^2}{8} + \frac{P\ell}{3} - \frac{p\ell^2}{12} - \frac{2 P\ell}{9} = \frac{p\ell^2}{24} + \frac{P\ell}{9}$$

A l'état ultime nous allons envisager trois mécanismes de rupture ;

Le premier mécanisme correspond a la formation d'une rotule plastique sur chaque appui,

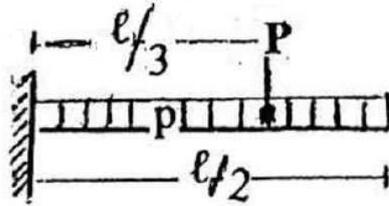
travail interne =  $M_u \theta + M_u \theta$



Le travail externe s'écrit :

$$2 \left[ \left( p \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\theta \ell}{4} \right) + P\theta \frac{\ell}{3} \right]$$

C'est le moment d'une console de portée  $l/2$ , en effet :



$$M = p \left( \frac{\ell}{2} \right) \cdot \frac{\ell}{4} + \frac{P\ell}{3} = \frac{p\ell^2}{8} + \frac{P\ell}{3}$$

Dans le deuxième mécanisme en envisage une rotule en travée, et une à chaque appui :

Le travail externe s'écrit :

$$2 \left( \frac{p\ell}{2} \cdot \theta \frac{\ell}{4} + P\theta \frac{\ell}{3} \right)$$



Le travail interne vaut :  $M_{u2} \cdot \theta + M_{u2} \cdot 2\theta + M_{u2}\theta = 4 M_{u2}\theta$

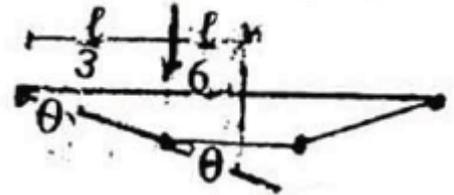
D'où :

$$M_{u2} = \frac{1}{2} \left( \frac{p\ell^2}{8} + \frac{P\ell}{3} \right) = \frac{p\ell^2}{16} + \frac{P\ell}{6}$$

Dans 3<sup>ème</sup> mécanisme, on envisage la formation de 2 rotules en travée et une par appui ;

Le travail externe s'écrit :

$$2 \left( p \frac{\ell}{3} \theta \frac{\ell}{6} + \frac{p\ell}{6} \frac{\theta\ell}{3} + P\theta \cdot \frac{\ell}{3} \right)$$



Et le travail externe vaut ici, aussi :

$$M_{u3} \cdot \theta + M_{u3} \cdot \theta + M_{u3}\theta + M_{u3}\theta = 4 M_{u3}\theta \text{ d'où :}$$

$$M_{u3} = \frac{1}{2} \left( \frac{2p\ell^2}{18} + \frac{P\ell}{3} \right) = \frac{p\ell^2}{18} + \frac{P\ell}{6}$$

Nous retiendrons a l'encastrement sur chaque appui :

$$M_{u1} = \frac{p\ell^2}{8} + \frac{P\ell}{3}$$

Et en travée :

$$M_{u2} = \frac{p\ell^2}{16} + \frac{P\ell}{6}$$

Le rapport du moment ultime au moment de service dans les sections où nous avons envisagé la formation des rotules vaut :

Sur appui :

$$\frac{\frac{p\ell^2}{8} + \frac{P\ell}{3}}{\frac{p\ell^2}{12} + \frac{2P\ell}{9}} = 1,5 \quad (\text{rapport des moments en valeur absolue})$$

En travée :

$$\frac{\frac{p\ell^2}{16} + \frac{P\ell}{6}}{\frac{p\ell^2}{24} + \frac{P\ell}{9}} = 1,5$$

On devra donc vérifier sur chaque appui d'une part, au droit de chaque charge  $P$  d'autre part, et dans l'axe de la poutre également, que la surtension dans l'armature active d'une part et la tension dans les armatures passives (d'une longueur voisine de  $l/2$  au minimum par rapport à l'axe de la travée) permettent d'atteindre grâce au complément de contrainte disponible dans le béton comprimé et éventuellement aux armatures comprimées les moments  $M_{u1}$  d'appuis et  $M_{u2}$  en travée. Nous pourrons alors déterminer la capacité portante de cette poutre.