

## Résistance aux Sollicitations Tangentes

### Introduction

La section de la pièce en B.P doit résister aux effets combinés dus aux contraintes normales d'une part et aux contraintes tangentielles d'autre part. Ces dernières appelées aussi contraintes de cisaillement, sont dues à l'effort tranchant et au moment de torsion. Dans ce chapitre, on traitera ces deux types de sollicitations et on les combinera aux sollicitations normales.

### 1. Resistance a l'effort tranchant

#### 1.1 Effets de l'effort tranchant

- **Cas 1- Poutre en B.A** : l'effort tranchant peut induire les deux risques suivants (figure 1) :
  - Fissuration du béton par traction  $\sigma_t$  perpendiculairement aux bielles,
  - Ecrasement du béton par compression  $\sigma_c$  suivant les bielles inclinées d'un angle  $\beta = 45^\circ$ .

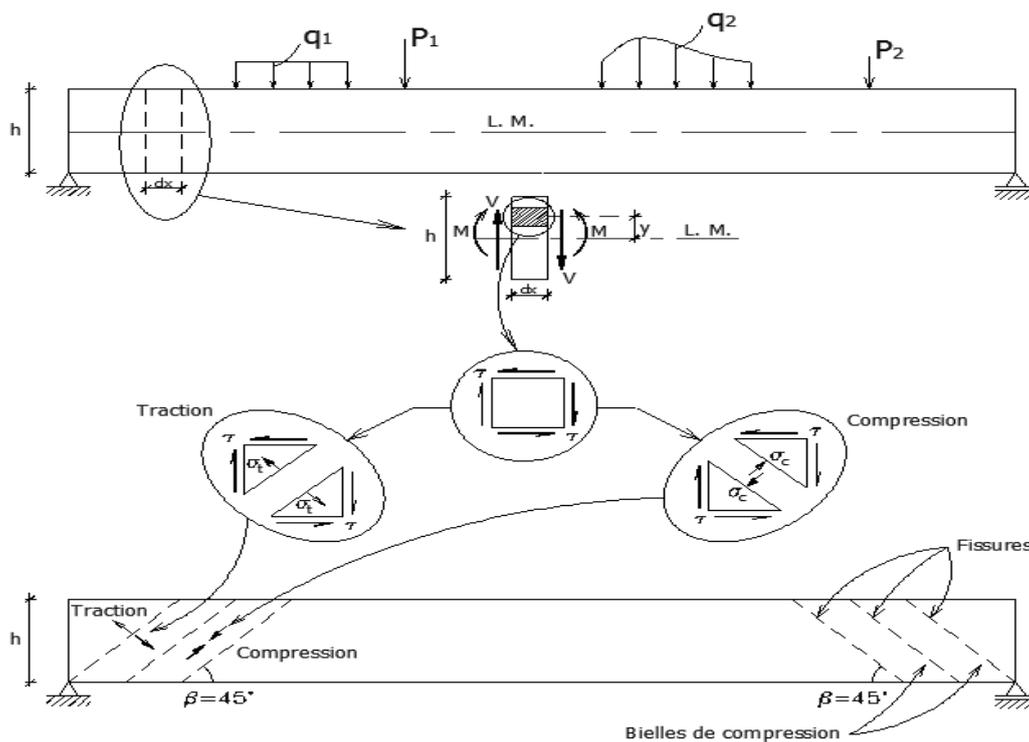


Fig. 1 Effets de l'effort tranchant dans une poutre en B.A

Pour remédier à ces deux risques, il faut :

- Coudre les fissures obliques par des armatures transversales,
- Limiter le cisaillement  $\tau$  pour limiter la compression  $\sigma_c$  du béton.

- **Cas 2- Poutre en B.P** : Elle est soumise à l'effet combiné de l'effort  $V$  tranchant plus la compression  $P$  due à la précontrainte (figure 2). L'inclinaison  $\beta$  est inférieure à  $45^\circ$ , elle dépend du rapport  $V/P$ .

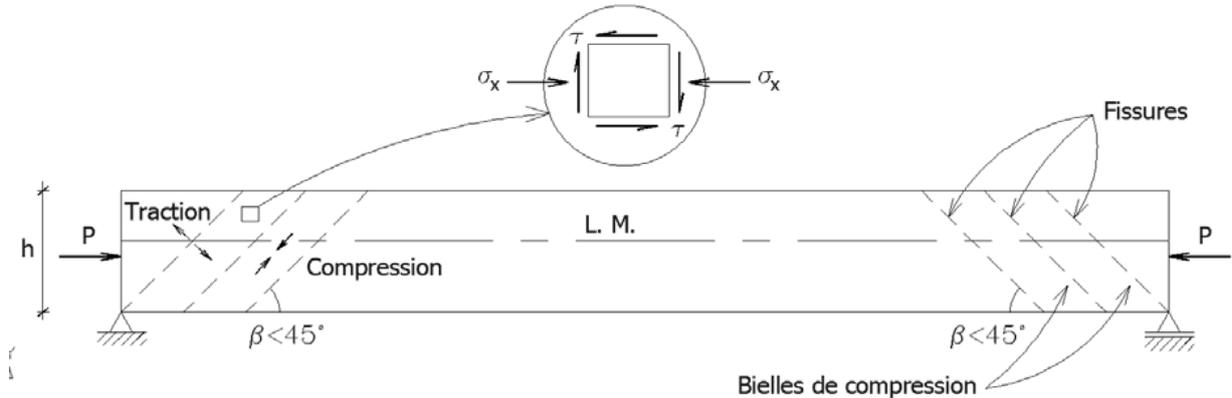


Fig. 2 Effets de l'effort tranchant dans une poutre en B.P

### 1-2 Réduction de l'effort tranchant

#### 1-2.1 Réduction de l'effort tranchant par effet Résal

Au voisinage de l'appui, les charges sont transmises par mise en compression des bielles, donc on ne peut pas charger la poutre sur une distance ( $d$ ) à partir du nu d'appui (figure 3). L'article 7.1,31 du BPEL 91 annule la charge sur une distance  $h/2$  avoisinante à l'appui, où  $h$  est la hauteur de la poutre. S'ensuit une charge trapézoïdale variant du tiers jusqu'à la totalité sur une distance  $h$  (figure 4-a).

En utilisant le chargement équivalent de la figure (4-b), on peut écrire :

$$\frac{q + q/3}{2} h = qf$$

Soit :

$$f = \frac{2}{3} h$$

On a aussi :

$$d + f = \frac{3}{2} h$$

Soit :

$$d = \frac{5}{6} h$$

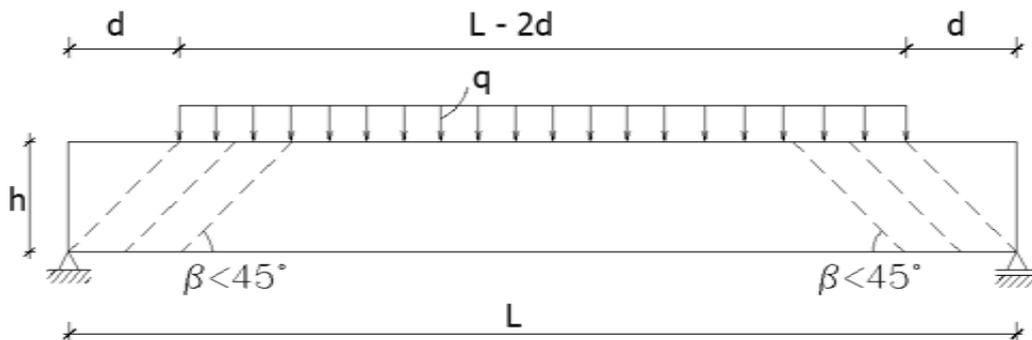


Fig. 2 Réduction de chargement d'une poutre vis-à-vis de l'effort tranchant

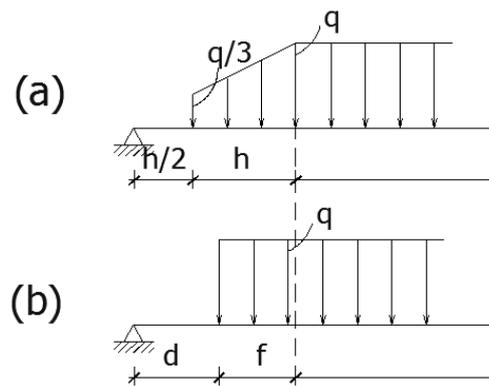


Fig. 4 Effet Résal selon BPEL 91

Dans une poutre uniformément chargée (figure 3), l'effort tranchant réduit par l'effet Résal se calcule par :

$$V = q \frac{L-2d}{2}$$

En utilisant les équations précédentes, il vient :

$$V = q \frac{L}{2} \left(1 - \frac{5h}{3l}\right)$$

### 1.2.2 Réduction de l'effort tranchant par inclinaison de la précontrainte

Dans le cas où la précontrainte est inclinée vers le bas d'un angle  $\alpha$  (figure 5), l'effort tranchant réduit au point A s'écrit

$$V_{red} = V - P \sin \alpha \quad (5)$$

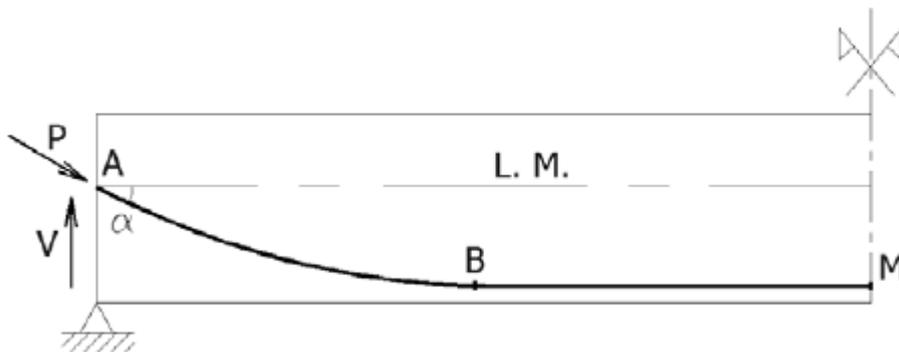


Fig. 5 Réduction de l'effort tranchant par inclinaison de la précontrainte

#### Remarque :

- L'angle  $\alpha$  dépend de l'abscisse  $x$  de la section étudiée.
- La réduction de l'effort tranchant par effet de Résal n'est pas toujours favorable. En fait l'effort tranchant final est la somme algébrique de l'effort tranchant réduit par l'effet Résal et celui dû à la composante verticale de la force de précontrainte.

### 1.3 Calcul de la contrainte de cisaillement :

#### 1.3.1 Contrainte de cisaillement dans l'âme :

Pour une section transversale (figure 6), le cisaillement est calculé par la formule

$$\tau(y) = \frac{V_{red} S(y)}{I b_n(y)}$$

$V_{red}$  : L'effort tranchant réduit.

$I$  : Moment d'inertie de la section par rapport à l'axe Gz.

$S(y)$  : Moment statique de la partie de section hachurée située au dessus de l'ordonnée y (fig 6),

$b_n(y)$  : La largeur nette de la section à l'ordonnée y.

D'après la figure 7, la largeur nette  $b_n$  se calcule par :

$$b_n = b_0 - mk\phi$$

$b_0$  : Largeur brute de la poutre à l'ordonnée y,

$m$  : Nombre de gaines par lit,

$\phi$  : Diamètre extérieur de la gaine,

$k$  : Coefficient qui tient compte de l'adhérence entre l'armature de précontrainte et le béton :

- $k=0$  Pré tension.
- $k=0.5$  Post-tension avec injection du coulis de ciment.
- $K=1$  Autres cas.

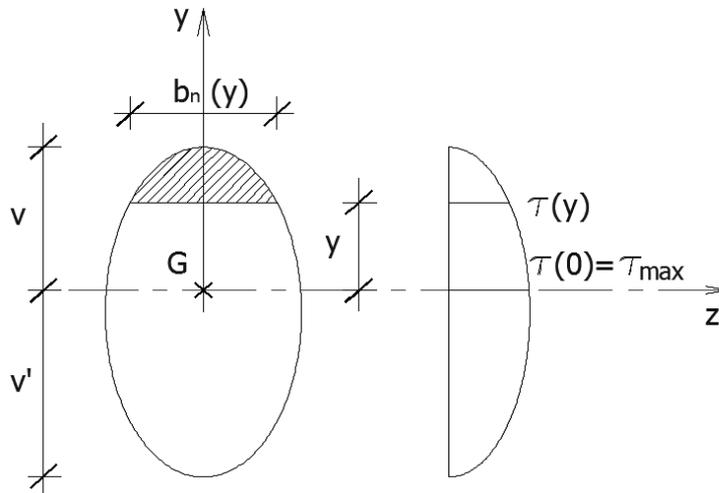


Fig. 6 Distribution de la contrainte de cisaillement dans la section transversale

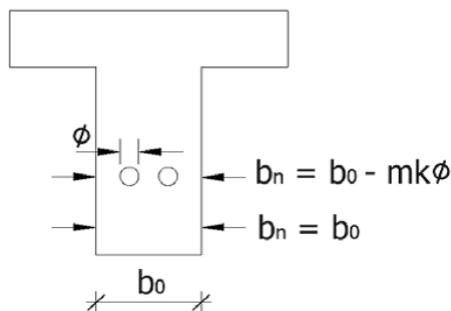


Fig. 7 Largeur nette d'une poutre

**1.3.2 Contrainte de cisaillement dans la jonction âme-membrure :**

La figure 9 montre la formation de bielles de compression dans la table de compression d'une poutre en T. Ces bielles sont dues à la présence des contraintes de cisaillement  $\tau_{xy}$  dans l'âme

calculé par l'équation ci-dessus, et  $\tau_{zx} = T_{xz}$  calculées par la relation :

$$\tau_{xy} = \frac{V_{red}}{I} b_1 \left( h_1 + \frac{h_0}{2} \right)$$

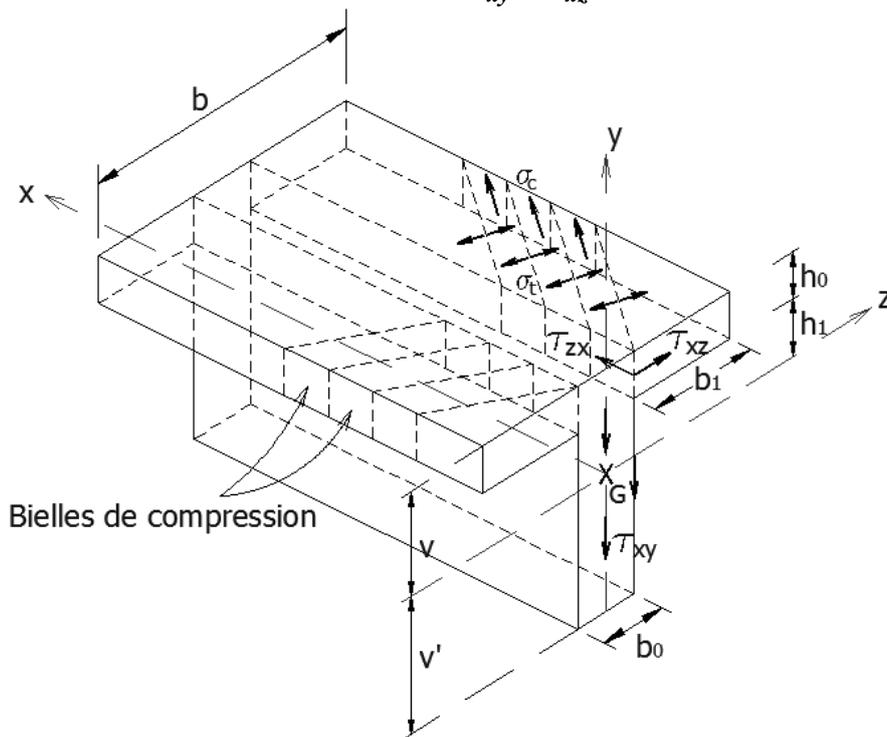
$$\begin{cases} h_1 = v - h_0 \\ b_1 = \frac{b - b_0}{2} \end{cases}$$

En utilisant des équations, il vient :

$$\tau_{xy} = \frac{V_{red}}{I} \cdot \frac{b - b_0}{2} \cdot \left( h_1 + \frac{h_0}{2} \right)$$

Sachant que  $I$  est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $Gz$  ( $I = I_z$ ).

Les diagrammes des contraintes de cisaillement  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{xz}$  sont représentés dans la figure 10.



**Fig.9** Formation de bielles de compression dans une poutre en T

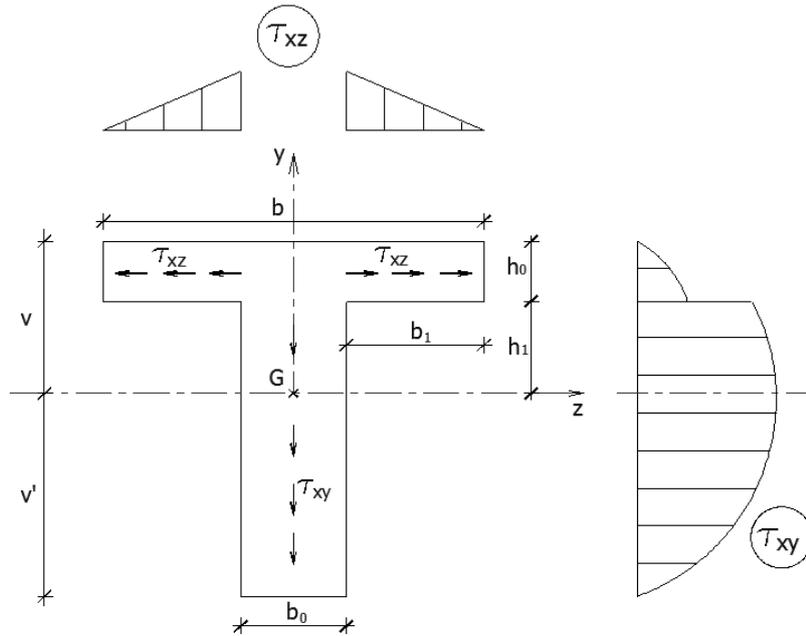


Fig.10 Diagrammes des contraintes de cisaillement dans une poutre en T

### 1.4 Vérification de l'effort tranchant à l'ELS :

L'article 7.2, 2 du BPEL 91 propose la condition suivante :

$$|\tau| \leq \min(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$$

$$\bar{\tau}_1 = \sqrt{0.4 f_{tj} \left( f_{tj} + \frac{2}{3} \sigma_x \right)}$$

$$\bar{\tau}_2 = \sqrt{\frac{2 f_{tj}}{f_{cj}} \cdot (0.6 f_{cj} - \sigma_x) \cdot \left( f_{tj} + \frac{2}{3} \sigma_x \right)}$$

$f_{cj}$  et  $f_{tj}$  : sont respectivement les résistances caractéristiques du béton à la compression et à la traction à l'âge j du béton.

$\sigma_x$  est la contrainte de compression ( $\sigma_x > 0$ ) du béton dans la section considérée.

$$\sigma_x = \frac{M}{I} v + P \left( \frac{1}{B} + \frac{e_p}{I} y \right)$$

$M$  : Moment fléchissant du aux charges extérieures,

$P$  : La force de précontrainte,

$e_p$  : L'excentricité de la précontrainte par rapport au centre de gravité  $G$ ,

$y$  : L'ordonnée du point considéré.

#### Remarque :

1) Si  $\sigma_x < 0.4 f_{cj}$  ,  $\bar{\tau}_1 < \bar{\tau}_2$  la vérification se fera seulement par  $\bar{\tau}_1$

2) Si  $\sigma_x < 0$  (contrainte de traction), on prend  $\sigma_x = 0$  dans l'expression de  $\bar{\tau}_1$  , on devra vérifier tout simplement :

$$|\tau_1| \leq \bar{\tau}_1 = \sqrt{0.4 f_{tj}}$$

3) La condition  $|\tau| \leq \min(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$  est représentée graphiquement dans la figure 11.

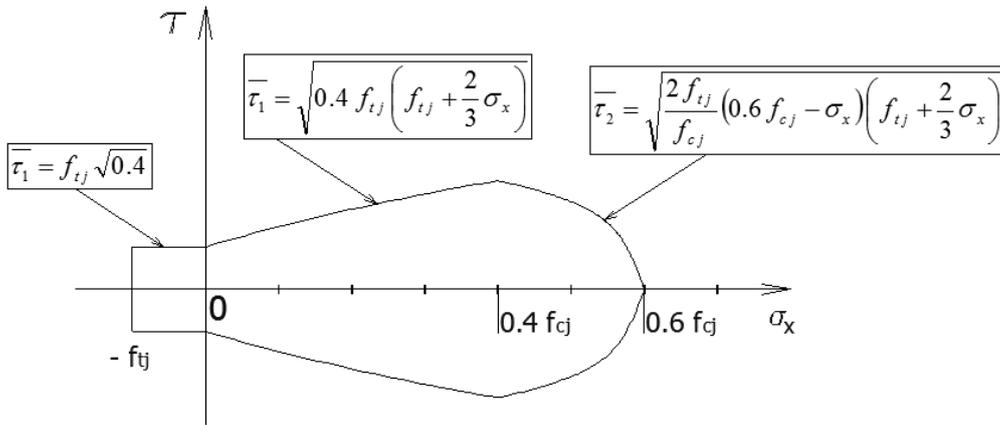


Fig.11 Domaine de résistance du béton au cisaillement à l'ELS

**1.5 Vérification de l'effort tranchant à l'ELU**

Pour des armatures transversales verticales (figure 12), on doit vérifier la condition

$$\frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_e}{\gamma_s} \geq \left( \tau_u - \frac{f_{tj}}{3} \right) \text{tg } \beta_u$$

Avec :

$A_t$  : La somme des aires droites des aciers d'un cours d'armatures passives transversales,

$s_t$  : Espacement des ces armatures mesuré suivant la fibre moyenne,

$f_e$  : Limite élastique des aciers passifs,

$\beta_u$  : Angle d'inclinaison des bielles découpées par les fissures,

$$\text{tg } 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu}}$$

$$\beta_u^{min} = 30^\circ$$

**Remarque :** Dans le cas d'une liaison membrure-âme, on utilisera la relation précédente, en prenant  $\beta_u = 45^\circ$  (article 7.3,23 du BPEL).

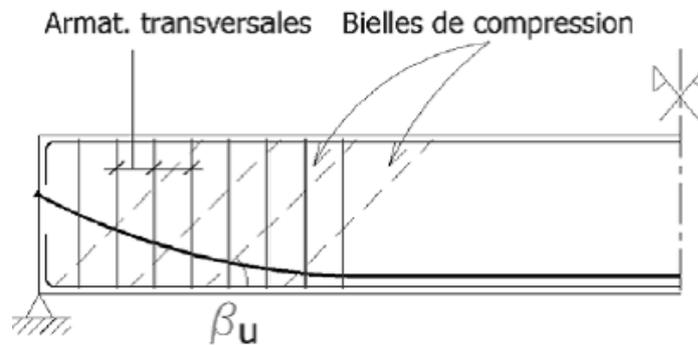


Fig.12 Diagrammes Bielles de compression à l'ELU

Le pourcentage minimal des armatures transversales est donné par :

$$\frac{A_t}{S_t} \geq 0.6 \frac{b_n \gamma_s}{f_e}$$

L'écartement maximal des armatures transversales se calcule par :

$$S_t \leq \min (0.8h ; 3b_0 ; 1m)$$

Afin de limiter les contraintes de compression du béton dans les bielles inclinée, on vérifie :

$$\tau_u \leq \frac{0.85 f_{cj}}{3\gamma_b} \sin 2\beta_u$$

Pour une valeur minimale (sécurisante)  $\beta_u = 45^\circ$ , la relation devient :

$$\tau_u \leq \frac{f_{cj}}{6}$$

## 2. Resistance a la torsion

### 2.1 Notions importantes

#### 2.1.1 Causes de la torsion

Le phénomène de la torsion se manifeste dans une poutre quand la résultante des charges est excentrée par rapport à la ligne moyenne de cette poutre. Cela se produit dans l'un des cas suivants :

- Poutre de rive (figure 13-a),
- Poutre avec un chargement non symétrique latéralement (figure 13-b),
- Poutre en L (figure 13-c),
- Poutre courbe en plan (figure 13-d).

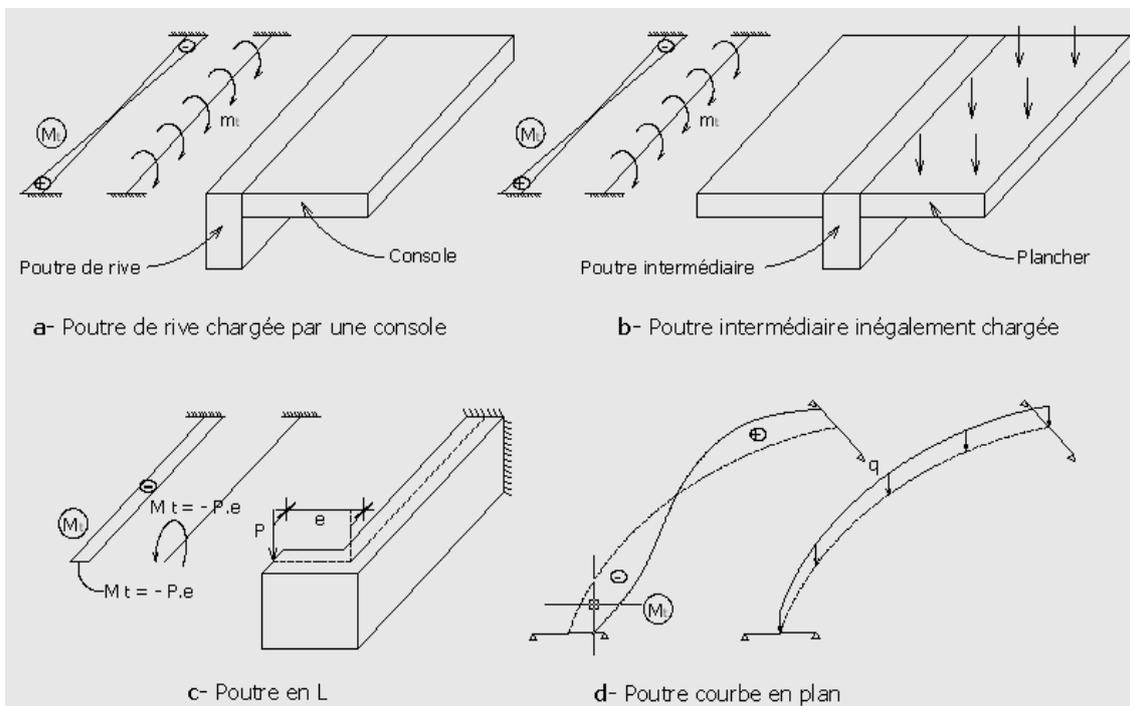


Fig.13 Poutres soumises à la torsion

#### 2.1.2 Rappel sur les lois de la torsion en RDM

La poutre cylindrique représentée dans la figure 14, de longueur  $L$  et de rayon  $R$ , est soumise à un moment de torsion constant  $M_t$ . La contrainte de cisaillement à une abscisse radiale  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ ) s'écrit :

$$\tau = \frac{M_t}{I_t} r$$

$I_t$  : Moment d'inertie torsionnel de la poutre.

La déformation angulaire (figure 13) s'écrit :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{G I_t}$$

Soit :

$$\phi = \int_0^L \frac{M_t}{G I_t} dx$$

$G$  : Module de cisaillement du matériau constituant la poutre

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$E$  : Module de Young du matériau et  $\nu$  son coefficient de poisson.

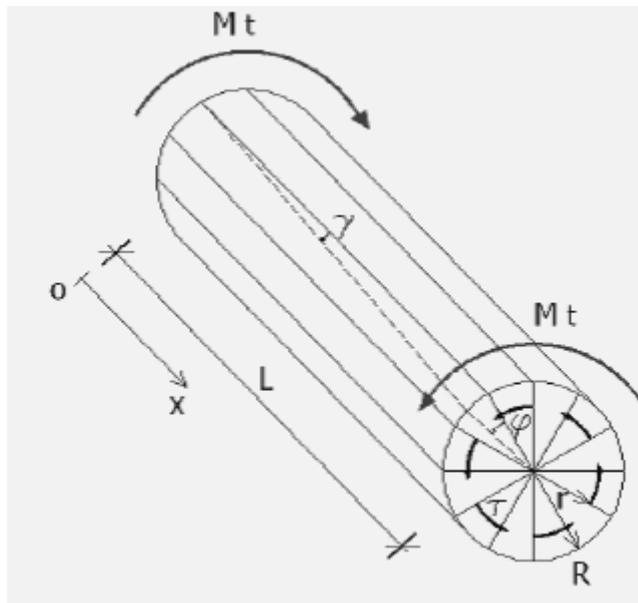


Fig.14 Poutre cylindrique pleine

**2.1.2.1 Poutre cylindrique pleine** (figure 14) :

$$I_t = \pi \frac{d^4}{32} = \frac{R^4}{2}$$

$$\tau = 2 \frac{M_t}{\pi R^4} r$$

**2.1.2.2 Poutre tubulaire** (figure 15):

$$I_t = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{2} (R_e^2 - R_i^2) \cdot (R_e^2 + R_i^2)$$

$$I_t = \frac{\pi}{2} (R_e - R_i)(R_e + R_i) \cdot (R_e^2 + R_i^2) = \frac{\pi}{2} e 2R \left[ \left( R + \frac{e}{2} \right)^2 + \left( R - \frac{e}{2} \right)^2 \right]$$

Soit:

$$I_t = 2\pi e R^3$$

Donc :

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi e R^3} r$$

Pour  $r = R$ , on a :

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi e R^2} = \frac{M_t}{2Ae}$$

$A$  : l'aire intérieure au contour moyen du tube (figure 14).

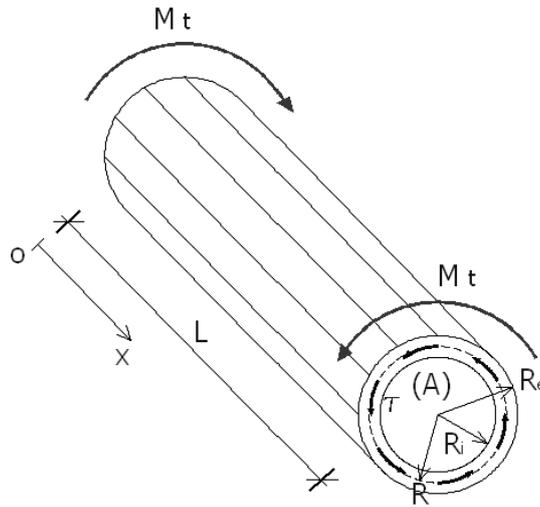


Fig.15 Poutre tubulaire

**2.1.2.3 Poutre rectangulaire** (figure 16)

La contrainte de cisaillement  $\tau_{max}$  est calculée par la formule approximative de Bach,

$$\tau_{max} = \frac{3h+b}{h+0.45b} \cdot \frac{M_t}{b^2h}$$

En prenant  $r = b/2$  dans l'équation ;  $\tau = \frac{M_t}{I_t} r$ , on peut déduire l'expression du moment d'inertie torsionnel :

$$I_t = \frac{h+0.45b}{2(3h+b)} \cdot b^3h$$

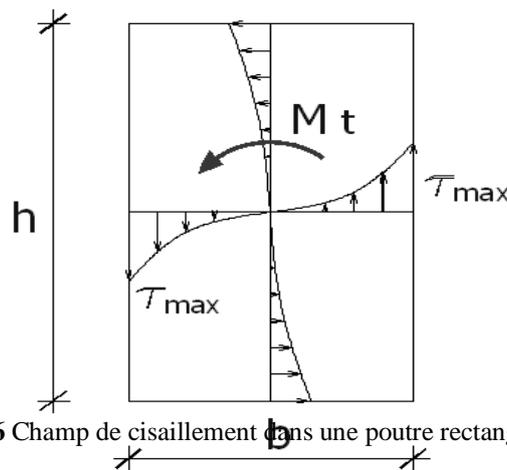


Fig.16 Champ de cisaillement dans une poutre rectangulaire

**2.1.2.4 Poutre à section creuse :**

Les contraintes de cisaillement sont pratiquement uniformes sur l'épaisseur de chaque paroi (figure 17). Par analogie avec le tube, on peut écrire :

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi e R^2} = \frac{M_t}{2Ae_i}$$

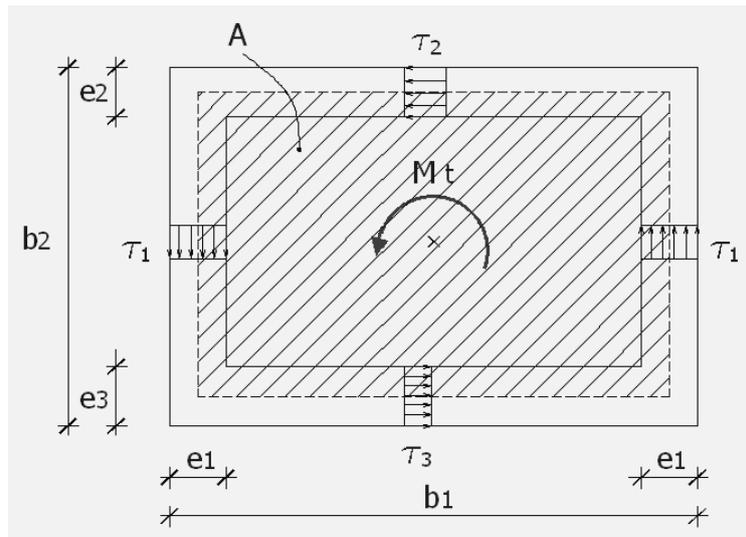


Fig.17 Champ de cisaillement dans une poutre en caisson

D'après l'exemple de la figure 16, on a :

$$A = (b_1 - e_1) \left( b_2 - \frac{e_2}{2} - \frac{e_3}{2} \right)$$

Le moment d'inertie torsionnel s'écrit :

$$I_t = \sum \frac{b_i e_i^3}{\Psi_i} + \frac{4A^2}{\sum e_i}$$

$\Psi_i$  : Coefficient qui se calcule selon l'équation :

$$\Psi_i = 3 + 1.8 \frac{e_i}{b_i}$$

D'après l'exemple de la figure 17, on a :

$$I_t = \frac{b_1 e_2^3}{\Psi_1} + \frac{b_1 e_3^3}{\Psi_2} + 2 \frac{(b_2 - e_2 - e_3) e_1^3}{\Psi_3} + \frac{4A^2}{\frac{b_1}{e_2} + \frac{b_1}{e_3} + 2 \frac{(b_2 - e_2 - e_3)}{e_1}}$$

$$\Psi_1 = 3 + 1.8 \frac{e_2}{b_1}$$

$$\Psi_2 = 3 + 1.8 \frac{e_3}{b_1}$$

$$\Psi_3 = 3 + 1.8 \frac{e_1}{b_2 - e_2 - e_3}$$

## 2.2 Comportement d'une poutre en B.A ou B.P vis-à-vis de la torsion :

### 2.2.1 Mise en évidence des bielles de compression :

La torsion engendre des bielles de compression selon des lignes hélicoïdales comme montré dans la figure 18. Les efforts dans les différents éléments du treillis spatial sont :

- Compression  $F_c$  dans les bielles inclinées situées dans la section efficace ;
- Traction  $F_t$  dans les étriers ;
- Traction  $F_l$  dans les barres longitudinales.

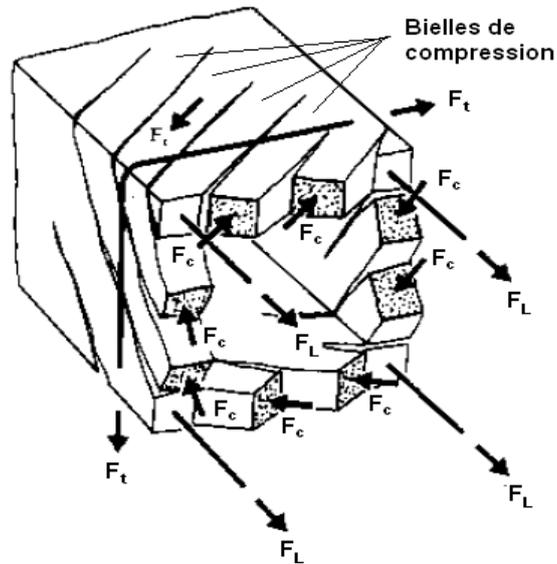


Fig.18 Fissuration d'une poutre en béton sous l'effet de la torsion

### 2.2.2 Notion de section efficace

Les essais montrent que le noyau d'une poutre en béton ne joue aucun rôle vis-à-vis de la torsion. On pourra donc ne considérer que la section efficace creuse d'épaisseur  $e$  prise selon l'article 7.6,3 du BPEL 91 comme suit :

- **Cas 1 : Caisson :**

Prendre l'épaisseur réelle de la poutre. D'après la figure 17, on prend :

$$e = e_i$$

- **Cas 2 : Section pleine épaisse  $h \leq 4b$  :**

La section efficace aura une épaisseur :

$$e_i = \frac{d_i}{6}$$

$d_i$  : le plus grand diamètre inscrit dans la section convexe (figure 19).

- **Cas 3 : Section pleine mince  $h > 4b$  :**

La section efficace aura une épaisseur :

$$e_i = \frac{b}{6} - c$$

$b$  : la plus petite dimension de la section de poutre,

$c$  : l'enrobage des armatures transversales (figure 20).

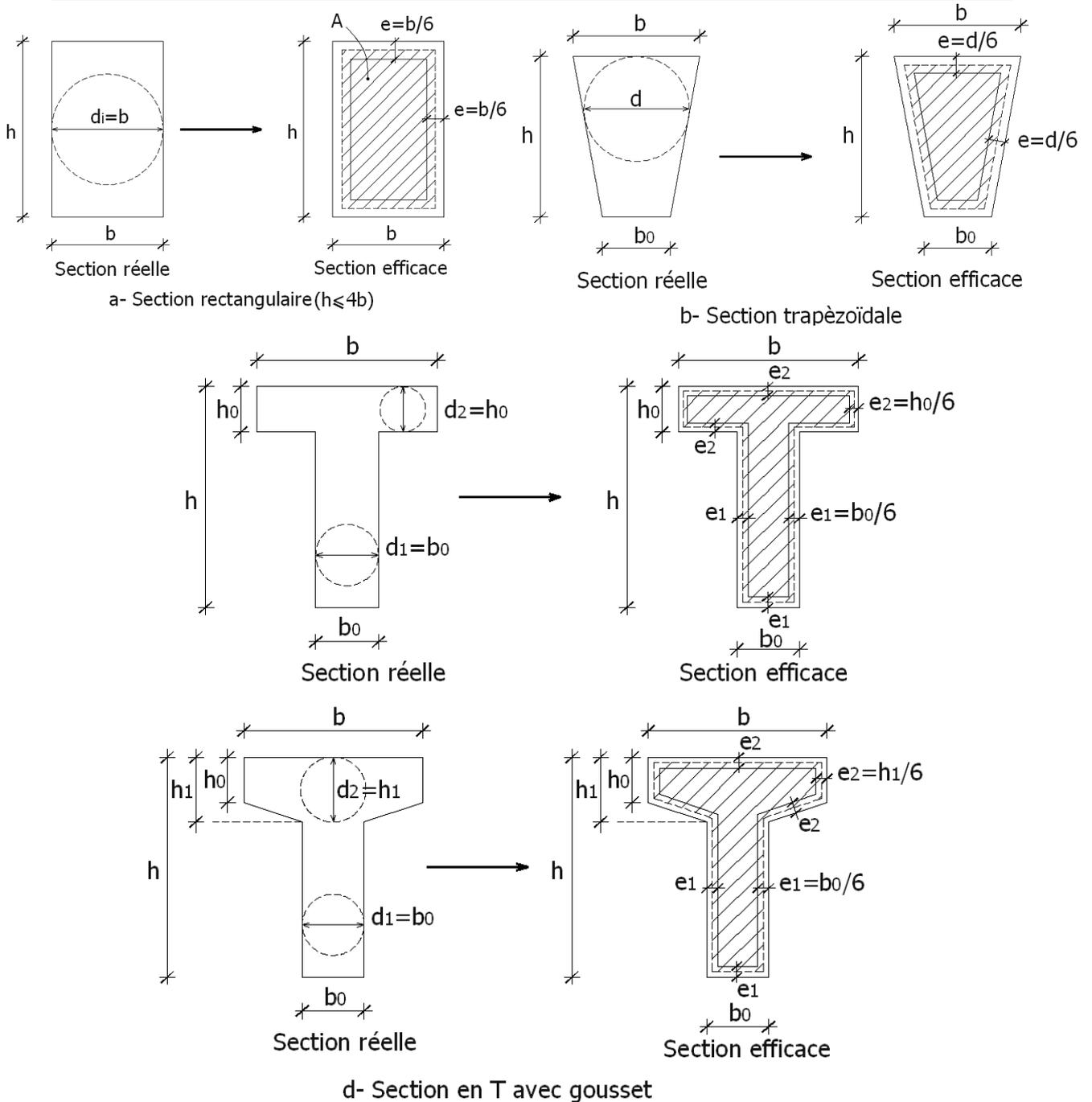


Fig.19 Détermination de l'épaisseur d'une section efficace d'une poutre épaisse

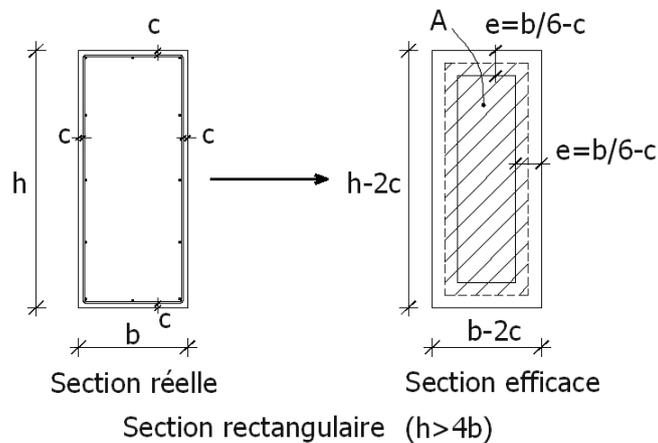


Fig.20 Détermination de l'épaisseur d'une section efficace d'une poutre mince

Le moment d'inertie torsionnel de la section efficace se calcule à partir de l'équation (ci-dessus), en maintenant le terme de la section fermée et en négligeant les autres termes, soit

$$I_t = \frac{4A^2}{\sum \frac{b_i}{e_i}}$$

Le cisaillement se calcule par l'équation (ci-dessus), soit :

$$\tau = \frac{M_t}{2Ae_i}$$

### 2.3 Vérification de la torsion à l'ELS :

Si  $\tau_v$  et  $\tau_T$  sont respectivement les contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant  $V$  et au moment de torsion  $T$ , on doit vérifier les conditions suivantes :

- Poutre en caisson :  $|\tau_v + \tau_T| \leq \tau_{lim}$
- Autres cas :  $\sqrt{\tau_v^2 + \tau_T^2} \leq \tau_{lim}$

$\tau_{lim}$  : Contrainte limite de cisaillement définie par l'équation :

$$\tau_{lim} = \min(\bar{\tau}_1; \bar{\tau}_2)$$

### 2.4 Vérification de la torsion à l'ELU :

- **Justification des bielles de compression du béton (Art 7.6.5.3 du BPEL 91):**

$$\tau_{vu}^2 + \tau_{Tu}^2 \leq \left(\frac{f_{cj}}{4\gamma_b}\right)^2$$

- **Justification des armatures transversales (Art 7.6.5.4 du BPEL 91):**

Il faut disposer à l'intérieur de la section creuse efficace, des armatures transversales de section  $A_T$  qui se calcule par la relation :

$$\frac{A_r}{S_T} \cdot \frac{f_e}{\gamma_s} \geq \tau_{Tu} e \operatorname{tg} \beta_u$$

$e$  : Epaisseur de la paroi fictive de la section creuse efficace.

$S_T$  : Eespacement des armatures transversales.

$\beta_u$  : Inclinaison ultime des bielles de compression calculée par la relation ci-dessus.

**Remarque :** Les armatures transversales  $A_T$  de torsion viennent s'ajouter aux armatures transversales  $A_v$  de l'effort tranchant (équations ci-dessus).

- **Justification des armatures longitudinales (Art 7.6.5.5 du BPEL 91):**

La torsion induit un effort longitudinal  $F_l$  de traction par mètre linéaire de la paroi. Cet effort se calcule par l'équation :

$$F_l = \frac{M_t}{2A} \operatorname{cotg} \beta_u$$

Cet effort est équilibré :

- Soit par les contraintes de compression dans la zone comprimée de la section de béton ;

$$\sigma_x \cdot e.1 \geq F_l = \frac{M_t}{2A} \cot g \beta_u$$

- Soit par les armatures passives de section  $A_l$  dans la zone tractée de la section de béton ;

$$A_l \frac{f_e}{\gamma_s} \geq F_l = \frac{M_t}{2A} \cot g \beta_u$$

### Conclusion :

Alors que la résistance à la flexion conditionne les membrures d'une poutre, c'est la résistance à l'effort tranchant et au moment de torsion qui permet de dimensionner les âmes et de déterminer leur ferrailage transversal et parfois longitudinal (dans le cas de la torsion). Tout comme vis-à-vis de la flexion, une double vérification est de règle :

- Aux ELS, pour limiter la fissuration du béton par cisaillement;
- Aux ELU, le schéma classique du treillis conduit au dimensionnement des armatures transversales et au contrôle de la contrainte de compression dans les bielles