Université de Relizane
Faculté des Sciences et Technologie
Département d'Informatique

TD Probabilité VAD

Exercice

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas.

Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20». Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15?

Exercice

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :

A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».

2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Université de Relizane
Faculté des Sciences et Technologie
Département d'Informatique

TD Probabilité VAD

Exercice

On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Corrigé

On choisit pour univers $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés. Remarquons que le cardinal de Ω vaut 36. X prend ses valeurs dans $\{1, \ldots, 6\}$. L'événement $X = 1$ est égal à $\{(1,1)\}$ et donc

$$P(X = 1) = \frac{1}{36}.$$

De même, on a

$$P(X = 2) = P\big(\{(1,2); (2,1); (2,2)\}\big) = \frac{1}{12}$$

$$P(X = 3) = P\big(\{(1,3); (2,3); (3,3); (3,1); (3,2)\}\big) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 4) = P\big(\{(1,4); (2,4); (3,4); (4,4); (4,3); (4,2); (4,1)\}\big) = \frac{7}{36}$$

$$P(X = 5) = P\big(\{(1,5); (2,5); (3,5); (4,5); (5,5); (5,4); (5,3); (5,2); (5,1)\}\big) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 6) = P\big(\{(1,6); (2,6); (3,6); (4,6); (5,6); (6,6); (6,5); (6,4); (6,3); (6,2); (6,1)\}\big) = \frac{11}{36}.$$

Exercice

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture.

On suppose que X(Ω)={0,1,2,3}X(Ω)={0,1,2,3}

Avec P(X=0)=0,1   P(X=1)=0,3   P(X=2)=0,4   P(X=3)=0,2.

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendants.
2. On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Université de Relizane
Faculté des Sciences et Technologie
Département d'Informatique

TD Probabilité VAD

Corrigé

1. Z est élément de $\{0,1,2\}$. On a :

$$P(Z=2)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$$

(les deux voitures sont disponibles). D'autre part,

$$P(Z=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$$

(les deux voitures sont simultanément indisponibles). Enfin, on obtient :

$$P(Z=1)=1-P(Z=0)-P(Z=2)=\frac{8}{25}.$$

On aurait aussi pu directement remarquer que Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2,4/5)$.

2. Remarquons que Y est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On calcule sa loi en utilisant la formule des probabilités totales. L'événement $Y=0$ se produit si $X=0$ ou bien si $X\geq 1$ et $Z=0$. Ces deux événements étant disjoints, on a :

$$P(Y=0)=P(X=0)+P(X\geq 1\cap Z=0)=P(X=0)+P(X\geq 1)P(Z=0)$$

(la disponibilité des voitures étant supposée indépendante de l'arrivée des clients). D'où :

$$P(Y=0)=0,1+0,9\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=0,136.$$

De même, l'événement $Y=1$ se produit si $X=1$ et $Z\geq 1$ ou bien si $X\geq 2$ et $Z=1$. On en déduit :

$$P(Y=1)=P(X=1)P(Z\geq 1)+P(X\geq 2)P(Z=1)=0,48.$$

Enfin, l'événement $Y=2$ est réalisé si $X\geq 2$ et $Z=2$. Ceci donne :

$$P(Y=2)=P(X\geq 2)P(Z=2)=0,6\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=0,384.$$

3. La marge brute vaut $300Y$. La marge brute moyenne par jour est en euros :

$$E(300Y)=300(0\times 0,136+1\times 0,48+2\times 0,384)=374,4.$$

Exercice

Un restaurateur accueille chaque soir 70 clients. Il sait qu'en moyenne, deux clients sur cinq prennent une crème brûlée. Il pense que s'il prépare 30 crèmes brûlées, dans plus de 70\% des cas, la demande sera satisfaite.

1. A-t-il raison?

2. Combien de crèmes brûlées doit-il fabriquer au minimum pour que la demande soit satisfaite dans au moins 90\% des cas.

Université de Relizane
Faculté des Sciences et Technologie
Département d'Informatique

TD Probabilité VAD

Corrigé

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de crèmes brûlées commandées chaque soir. X compte le nombre de succès (=crème brûlée commandée) dans la répétition indépendante de 70 épreuves de Bernoulli dont chacune a une probabilité de succès égale à 0.4. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètre 70 et 0.4.

1. La demande est satisfaite si $X \leq 30$. On doit donc déterminer si $P(X \leq 30) \geq 0.7$. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on trouve facilement que $P(X \leq 30) \simeq 0,73$: le restaurateur a raison.
2. On cherche le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,9$. Toujours à l'aide d'un tableur, on constate que $P(X \leq 32) \simeq 0,86$ et que $P(X \leq 33) \simeq 0,91$. Il suffit de préparer 33 crèmes brûlées pour satisfaire la clientèle dans 90\% des cas. Ca vaut peut-être le coup de fabriquer 3 crèmes supplémentaires!