Chaînes de Markov

Processus stochastiques

Lorsque que nous étudions un **phénomène** qui dépend du **hasard**, il y a lieu de prendre en compte **l'évolution de ce phénomène au cours du temps**.

Nous avons vu que chaque **observation d'un phénomène** réel est modélisée par une **variable aléatoire réelle** ; l'étude de **phénomènes évoluant dans le temps** va donc être modélisée par une famille de variables aléatoires, appelée **processus stochastique**.

Processus stochastiques

Définition Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(E, \mathcal{E})$ un espace muni d'une tribu, appelé *espace des états*. Un *processus stochastique* est une famille de variables aléatoires réelles, $(X_t)_{t\in T}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

L'ensemble T représente le temps. Par suite la variable aléatoire X_t correspond à l'état du phénomène à l'instant t. Si l'ensemble T est :

- dénombrable, le processus stochastique est dit *discret* ; par exemple $T = \mathbb{N}$ ou tout ensemble possédant un nombre fini d'éléments. Nous employons le terme de *chaîne* et indexons la variable aléatoire par la lettre n.
- continu, le processus stochastique est dit *continu* ; par exemple $T = \mathbb{R}^+, [0, t_0]$ ou tout sous-ensemble de réels positifs. Nous indexons la variable aléatoire par la lettre t.

Processus stochastiques

Définition Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et soit $\omega \in \Omega$ un événement élémentaire. La *trajectoire* du processus associée à ω est l'application,

$$\begin{aligned} T &\to E \\ t &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Propriété de Markov

Définition Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans un espace E discret est appelée *chaîne de Markov* si, pour tout $n \geq 0$ et pour toute suite $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ d'éléments de E, telle que la probabilité $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] > 0$, nous avons :

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n]. \tag{5.1}$$

L'indice de la variable aléatoire étant assimilé au temps, X_n représente l'observation du processus à l'instant n. L'indice 0 représente l'instant de départ, il est appelé *l'instant initial* et l'état X_0 du processus en cet instant correspond à *l'état initial*.

L'égalité (5.1) est interprétée de la façon suivante : l'état x_{n+1} du processus à l'instant $n+1$ ne dépend pas du déroulement passé, $x_0, \ldots, x_{n-1}$, mais seulement de l'état présent x_n. Ceci se traduit encore par : le déroulement futur est le même quel que soit le déroulement passé, s'il se retrouve dans le même état présent. Cette propriété est connue sous le nom de *propriété de Markov* .

Probabilités et matrices de transition

Définition Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace E. On appelle *probabilités de transition* la donnée, pour tout $n \geq 0$, pour tout $(x, y) \in E^2$, des

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_n = x] := p_n(x, y).$$

Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est dite *homogène* si $p_n(x, y)$ ne dépend pas de l'instant n :

$$\forall n \geq 0,\ \forall (x, y) \in E^2, \quad p_n(x, y) \equiv p(x, y). \tag{5.2}$$

En mots cela signifie que la probabilité de transiter d'un état x à un état y ne dépend pas de l'instant auquel la transition se fait.

Probabilités et matrices de transition

Définition Étant donné une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un espace dénombrable $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$, nous lui associons une matrice appelée *matrice de transition*, notée $P = (p(x_i, x_j))$, dont les coefficients,

$$p(x_i, x_j) = \mathbb{P}[X_1 = x_j | X_0 = x_i],$$

sont les probabilités de transiter de l'état x_i vers l'état x_j :

$$P = \begin{pmatrix} p(x_1,x_1) & p(x_1,x_2) & p(x_1,x_3) & \ldots \\ p(x_2,x_1) & p(x_2,x_2) & p(x_2,x_3) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Matrices stochastiques

Définition Une matrice carrée $P = (p(x,y))$, dont les lignes et colonnes sont indexées par un ensemble d'états E dénombrable (fini ou infini), telle que toutes les lignes sont des probabilités, s'appelle une *matrice stochastique*. Une matrice stochastique est donc caractérisée par les propriétés suivantes,

- tous les coefficients sont positifs ou nuls : $\forall\,(x,y) \in E^2, \quad p(x,y) \geq 0$,
- les coefficients de chacune des lignes somment à 1 : $\forall\, x \in E, \quad \sum_{y \in E} p(x,y) = 1$.

Graphe associé à une chaîne de Markov homogène

A partir de la matrice de transition d’une chaîne de Markov, nous construisons un graphe. Il donne les mêmes informations que la matrice mais, comme toute représentation graphique, a l’avantage d’être plus parlant.

Graphe associé à une chaîne de Markov homogène

Définition Étant donnée une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ définie sur un espace d'états E, le *graphe de la chaîne* est le graphe construit à partir de la matrice de transition ainsi : les sommets sont les états et les arêtes (orientées) représentent les transitions possibles d'un état vers un autre. Au dessus de chaque arête on écrit la probabilité de transition correspondante.