Simulation

Dr BOUADJEMI A

A quoi servent les simulations ?

1. Les simulations peuvent-elles valider le modèle probabiliste ?

Delahaye (2005), dans un article publié dans « Pour la Science » (n° 336, octobre 2005, p. 90 à 94) écrit en introduction de cet article :

« Les solutions paradoxales des plus simples problèmes de probabilité engendrent de passionnantes controverses que les simulations permettent de trancher. »

2. Qu'est-ce qu'une simulation ? Une première approche.

Nous nous interrogeons sur les critères qui peuvent permettre de considérer qu'une « simulation » est acceptable, et partant nous nous sommes interrogée sur la définition même d'une simulation d'une expérience aléatoire.

La définition proposée dans les programmes présente, comme nous l'avons souligné, plusieurs inconvénients :

- elle est circulaire,
- elle est contredite par la pratique :
  - que ce soit la pratique révélée par l'exemple du paragraphe 3 du chapitre précédent,
  - que ce soit la pratique imposée par les énoncés des épreuves pratiques expérimentales, où la simulation précède la détermination de la loi de probabilité.

La simulation d'une expérience aléatoire est nécessairement liée au modèle probabiliste de cette expérience : peut-être pourrait-on dire, en première approche, que la simulation d'une expérience aléatoire est une autre expérience aléatoire que l'on peut réaliser (et pour laquelle on pourra observer des résultats), et à qui on peut associer le même modèle probabiliste que pour l'expérience initiale.

L'expérience et sa simulation ont même modèle probabiliste, **que ce modèle ait été construit, ou qu'il ne l'ait pas été.**

Génération pseudo-aléatoire

Tout d'abord, il est important de savoir qu'il est difficile de générer des nombres aléatoires.

D'abord, si jamais on les génère automatiquement, ils ne sont par définition pas aléatoires !

Simulation - Les lois classiques

- Loi de Bernoulli
- Loi Binomiale
- Loi exponentielle
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Loi normale centrée réduite

Simulation - Méthodes générales

Méthode directe

Soit une variable X discrète pour laquelle on sait calculer $P(X = k)$, et encore mieux $P(X \geq k)$.

Une manière simple à décrire (mais pas forcément à utiliser) est la suivante :

- Si $U \leq P(X = 0)$ renvoyer 0
- Si $U \leq P(X \leq 1)$ renvoyer 1
- Si $U \leq P(X \leq 2)$ renvoyer 2

• Méthode du rejet

Supposons qu'on sache comment simuler une variable X et qu'on veuille simuler une variable Y .

Supposons de plus que $P(X = k) \geq P(Y = k)$ pour tout k . Une manière de simuler Y est la suivante :

- On simule X .
- Si $X = k$, on accepte avec probabilité $\frac{P(Y=k)}{P(X=k)}$. Sinon, on recommence.

L'idée est assez convaincante, sauf qu'il est impossible d'avoir $P(X = k) \geq P(Y = k)$ pour tout k , sans quoi $X = Y$!

On résout le problème en divisant $P(Y = k)$ par une constante C suffisamment grande pour que $P(X = k) \geq \frac{P(Y=k)}{C}$.