Variables aléatoires continues

Notion de variable aléatoire continue

Définition 1
Une variable aléatoire continue est une variable qui prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 1
Exemple de variables aléatoires qui ne sont pas discrètes :

- Variable T correspondant à la taille d'un élève,
- Variable L correspondant à longueur d'un train,
- Variable A correspondant au temps d'attente à une caisse ...

Fonction de répartition

Définition 2

Soit X une variable aléatoire, on appelle **fonction de répartition** *de X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Propriété 1

La définition nous permet d'écrire :

- $F(x) = P\left(X \in \left] -\infty \,;\, x \right]\right)$.
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$.
- $P(X > b) = P(\overline{X \leq b}) = 1 - F(b)$.

Fonction de répartition

Remarque 1

On admet que pour une variable aléatoire continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $P(X = a) = 0$. On a donc :

- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$,
- $P(a < X) = P(a \leq X < b)$,
- $P(X > b) = P(X \geq b)$.

Propriété 2

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire continue X a les propriétés suivantes :

- F est une fonction croissante, définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Densité et loi de probabilité

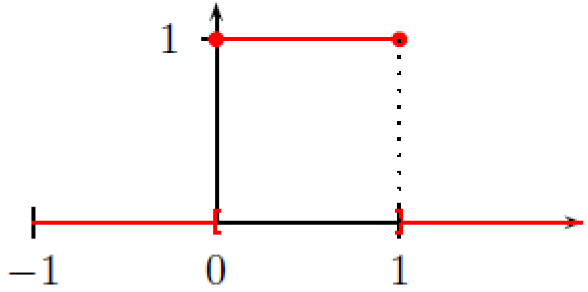
Définition 3

Dans le cas où F est dérivable, la fonction f dérivée de F est appelée **densité de probabilité** *de X et pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.*

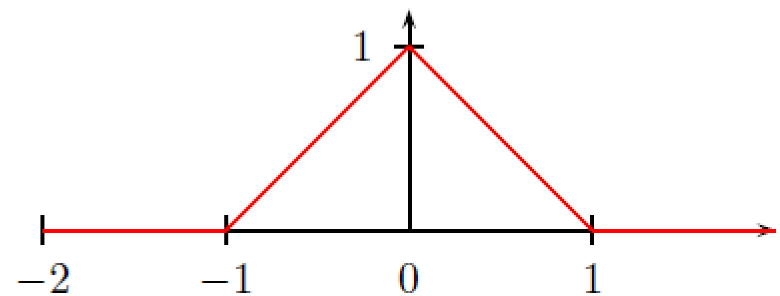
Exemple

Voici quelques exemples de densités de probabilités ainsi que leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal :

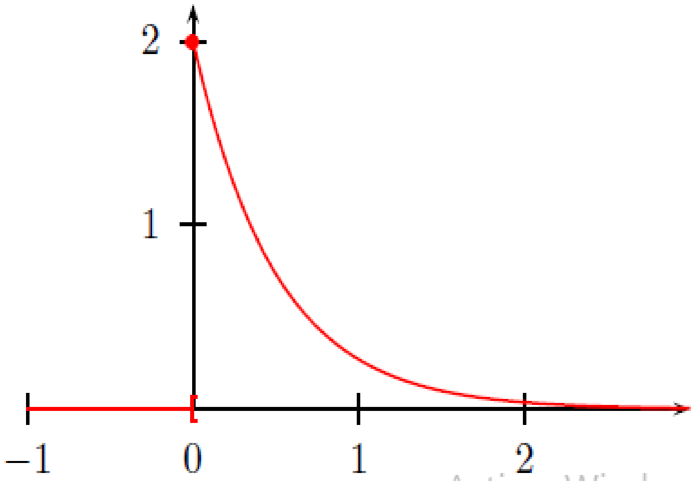
$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



Espérance et variance

Définition 4
Soit X une variable aléatoire continue et f sa densité.

- *On appelle* **espérance** *de X le réel, noté $E(X)$, défini par la relation*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

- *On appelle* **variance** *de X le réel, noté $V(X)$, qui, s'il existe, est défini par la relation*

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\, x - E(X)\,]^2 f(x)\, dx.$$

- *On appelle* **écart-type** *de X le réel, noté σ_X, défini par la relation*

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$