Probabilités et statistique

Lois de probabilités conditionnelles, indépendance

Dr. BOUADJEMI

abdelkrimbouadjemi@gmail.com

Lois de probabilités conditionnelles, indépendance

Introduction et définitions

Le but est de modéliser comment :

- deux événements sont indépendants.
- la réalisation d’un événement conditionne la réalisation d’un autre.

Probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle peut être nécessaire à chaque fois que pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, on dispose d'une information partielle. Si on sait que l'événement A est réalisé, pour que l'événement B se réalise, on est amené a regarder l'événement $A \cap B$

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A un événement **possible** $(\mathbf{P}(\mathrm{A}) \neq 0)$. L'application

$$\mathbf{P}_{\mathrm{A}} : \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow & [0,1] \\ \mathrm{B} & \mapsto & \mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbf{P}(\mathrm{A})} \end{cases}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{E})$ appelée **probabilité conditionnelle sachant** A.

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités totales

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\{\mathrm{A}_i\}$ un système complet d'événements tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout événement B on a :

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{A}_i)\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i) = \mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1) + \cdots + \mathbf{P}(\mathrm{A}_n)\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_n)$$

Indépendance

Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité de B, autrement dit si

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B})$$

alors

$$\frac{\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbf{P}(\mathrm{B})} = \mathbf{P}(\mathrm{A})$$

Indépendance

Définition (Indépendance deux à deux)

Soient A et B deux événements appartenant à la même algèbre $\mathcal{E}$, on dit que A et B sont deux événements (stochastiquement) **indépendants** pour la probabilité $\mathbf{P}$ si

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$$

Indépendance

Définition (indépendance mutuelle)

Soient des événements A_1, A_2, $\cdots$, A_n. Ils sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie non vide I de l'ensemble des indices allant de 1 à n on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathbf{P}(\mathrm{A}_i)$$

Exemple trois

$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{C})$$

Formules de BAYES

Ces formules ont pour but d'exprimer $\mathbf{P}(A|B)$ en fonction de $\mathbf{P}(B|A)$. Étant donnés deux événements A et B avec $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, on a :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B)$$

Proposition

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, alors

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

- Remarque

Il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

- Des événements incompatibles sont très rarement indépendants.

En effet, deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si on a : $A \cap B = \varnothing$.
Ils ne peuvent alors être indépendants que si : $P(A) = 0$, ou : $P(B) = 0$.

- Par exemple dans le lancer d'une pièce (équilibrée), obtenir Pile ou Face sont deux événements incompatibles mais pas indépendants.

En effet : $P(\{Face\}) = \frac{1}{2} = P(\{Pile\})$, alors que : $P(\{Face\} \cap \{Pile\}) = P(\varnothing) = 0 \neq \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Intuitivement, si on n'obtient pas Pile on a de fortes chances (!) d'obtenir Face.