

Probabilités et statistique

Espaces probabilisés

Avant propos

La **probabilité** (du latin **probabilitas**) est une *évaluation* du caractère probable d'un *évènement*. En mathématiques, l'étude des probabilités est un sujet de grande importance donnant lieu à de nombreuses applications.

Avant propos

La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1. **Plus** ce nombre est **grand, plus** le **risque** (ou la **chance**, selon le point de vue) que l'événement se produise est grand. Si on considère que la probabilité qu'un lancer de pièce donne pile est égale à $1/2$, cela signifie que, si on lance un très grand nombre de fois cette pièce, la fréquence des piles va tendre vers $1/2$, sans préjuger de la régularité de leur répartition.

Avant propos

L'étude des probabilités a connu de nombreux développements au cours des trois derniers siècles en partie grâce à l'étude de l'aspect aléatoire et en partie imprévisible de certains phénomènes, en particulier les jeux de hasard. Ceux-ci ont conduit les mathématiciens à développer une théorie qui a ensuite eu des implications dans des domaines aussi variés que la **météorologie**, la **finance** ou la **chimie**.

Introduction

Les probabilités fournissent une description mathématique (modèle) de l'incertain c'est-à-dire de ce qui n'est pas connu avec certitude. On parle dans ce cas d'événements « aléatoires ». Un événement est dit « aléatoire » quand l'issue (le résultat) d'une expérience (exemple : jeter un dé, lancer une pièce de monnaie, tirer une carte, jouer à la roulette, observer un défaut dans un produit,...) n'est pas connue par avance c'est-à-dire qu'elle est soumise au hasard. Néanmoins, les phénomènes aléatoires respectent a priori certaines propriétés sur le long terme et ce sont ces propriétés que la théorie des probabilités va décrire au travers d'outils mathématiques.

Introduction

Dans le cadre des probabilités, une expérience aléatoire (ou épreuve) est une procédure définie précisément et qui conduit à un résultat (résultat qui est donc par définition imprévisible). L'ensemble fondamental (noté Ω) des résultats (c'est-à-dire toutes les issues possibles – éventuellement en nombre infini) de l'expérience est connu avant l'expérience mais le résultat de l'expérience n'est connu qu'après la réalisation de l'expérience.

Introduction

Chaque élément (noté ω) d'un ensemble fondamental est qualifié d'événement élémentaire (ou de réalisation). Ainsi, l'ensemble fondamental d'une expérience consistant à jeter un dé à six faces est : $\Omega = [\text{Un}, \text{Deux}, \text{Trois}, \text{Quatre}, \text{Cinq}, \text{Six}]$ tandis que celui associé au lancer d'une pièce est $\Omega = [\text{Pile}, \text{Face}]$. Dans le cas du dé, obtenir la valeur « Trois » est un exemple d'évènement élémentaire ou de réalisation de l'expérience aléatoire.

Introduction

Une probabilité P est une fonction qui à un évènement associe une valeur comprise entre 0 et 1. Cette probabilité mesure les chances que cet évènement a de se produire. Par exemple, pour un dé parfaitement équilibré à six faces, $\Omega = [\text{Un}, \text{Deux}, \text{Trois}, \text{Quatre}, \text{Cinq}, \text{Six}]$. Le dé étant supposé équilibré, chaque face a autant de « chances » d'apparaître. En adoptant la définition d'une probabilité comme étant le rapport entre le nombre de « cas favorables » sur le nombre de « cas possibles », on en déduit que : $P(\text{Un}) = P(\text{Deux}) = \dots = P(\text{Six}) = 1/6$. Selon la même logique, si on considère le cas d'une pièce de monnaie, on obtient : $\Omega = [\text{Pile}, \text{Face}]$ et $P(\text{Pile}) = P(\text{Face}) = 1/2$.

Modélisation des phénomènes aléatoires

Le but de la théorie des probabilités est de fournir un modèle mathématique pour décrire les phénomènes aléatoires. Sous sa forme moderne, la formulation de cette théorie contient trois ingrédients : l'univers, les événements, et la mesure de probabilité.

Univers

Définition 01 : Il s'agit d'un ensemble, noté habituellement Ω , dont les éléments correspondent à tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire que l'on cherche à modéliser. On l'appelle également **l'espace des observables**, ou encore **l'espace échantillon**.

Univers

Définition 02 : L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est représenté par un ensemble noté Ω , appelé **univers (des possibles)** ou **ensemble fondamental**. Les sous-ensembles de Ω contenant un seul élément de Ω sont appelés les **événements élémentaires**.

Univers

Exemple

1. Un tirage à pile ou face : $\Omega = \{P;F\}$.
2. Deux tirages à pile ou face : $\Omega = \{PP,PF,FP,FF\}$.
3. Taille d'une personne : $\Omega = \mathbb{R}_+$.
4. Durée de vie d'une ampoule : $\Omega = \mathbb{R}_+$.

Évènement

Un événement est une propriété dont on peut dire si elle est vérifiée ou non une fois le résultat de l'expérience connu. Mathématiquement, un événement est caractérisé par l'ensemble des résultats dans lesquels il est réalisé (un tel résultat est alors appelé une réalisation de l'événement).

Évènement

Définition

Un événement A est une partie de Ω , c'est-à-dire.

Si l'événement est réduit à un seul élément, on parle d'événement élémentaire.

Évènement

Exemple

Prenons le cas du jet d'un seul dé. L'espace des éventualités est défini par

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Considérons les événements suivants :

$A = \{6\}$, $B = \text{“numéro pair”} = \{2, 4, 6\}$ et

$C = \text{“numéro} > 4\text{”} = \{4, 5, 6\}$

Terminologie des événements aléatoires

Les événements A résultant d'une expérience aléatoire étant par définition des parties de Ω , l'ensemble des événements est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. Il est possible d'appliquer aux événements les opérations de la théorie des ensembles en employant une terminologie adaptée.

- Un événement A est **certain** si

$$A = \Omega$$

- Un événement A est **impossible** si

$$A = \emptyset$$

- $\overline{A}$ est l'événement **contraire** d'un événement A si

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$

$\overline{A}$ est réalisé si A ne l'est pas, et réciproquement :

$$\omega \in \overline{A} \quad \text{si et seulement si} \quad \omega \notin A$$

- Deux événements A_1 et A_2 sont **incompatibles** (ou mutuellement exclusifs) si

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Langage probabiliste	Notation	Langage ensembliste
Issue ou résultat	ω ($\omega \in \Omega$)	élément de Ω
Événement A	$A \subset \Omega$	partie de Ω
A est réalisé	$\omega \in A$	appartenance
Événement contraire (non-A)	$\overline{A} = \Omega \setminus A$	complémentaire
A et B	$A \cap B$	intersection
A ou B	$A \cup B$	union
Événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	disjoints
A implique l'événement B	$A \subset B$	inclusion
Événement impossible	$\emptyset$	ensemble vide
Événement certain	Ω	partie pleine
Système complet d'événements A_n	$\Omega = \bigcup_n A_n$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$	partition

Exemple

- Considérons le cas du fonctionnement de deux machines automatiques, chacune d'elles pouvant tomber en panne au cours d'un laps de temps donné. Sans expliciter Ω , considérons les événements suivants:
- A_1 : “la première machine fonctionne”,
- A_2 : “la seconde machine fonctionne”,
- B_k : “exactement k machines fonctionnent”,
- C : “au moins une machine fonctionne”.

Notion de tribu

Définition. Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une classe de parties de Ω . On dit que $\mathcal{F}$ est une *tribu* sur Ω si

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire : si A appartient à $\mathcal{F}$ alors A^c appartient à $\mathcal{F}$;
- (iii) $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ alors $\cup_{\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω , $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé espace mesurable et les éléments de $\mathcal{F}$ des événements.

Espace probabilisable

On appelle espace probabilisable le couple $(\Omega, \mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ constitue une tribu de parties de Ω .

Espace probabilisé

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$

L'axiomatique de Kolmogorov

Définition d'une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{E})$ un espace probabilisable. Une **probabilité** est une application **P** réelle définie sur $\mathcal{E}$ vérifiant les trois axiomes suivants appelés axiomes de KOLMOGOROV

1. $\mathbf{P} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
3. Pour toute suite finie ou dénombrable d'événements *deux à deux incompatibles*

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{n \in I} A_n \right) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n)$$

Définition d'un espace probabilisé

Un espace probabilisé est la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ avec

- $(\Omega, \mathcal{E})$ un espace probabilisable,
- $\mathbf{P}$ une probabilité sur $\mathcal{E}$.

• Propriétés élémentaires

On a les propriétés suivantes pour tout $(A, B) \in \mathcal{E}^2$

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1, \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$

2. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A),$

3. $\mathbf{P}(A) \in [0, 1],$

4. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B),$

5. $A \subset B$ implique $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B).$

Théorème des probabilités totales.

Soit $\{B_i : i \in I\}$ un système complet d'événements, alors

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}(A \cap B_i)$$

Équiprobabilité

Un cas particulier important est le cas d'équiprobabilité quand Ω est de cardinal fini. On dit qu'il y a équiprobabilité dans le cas où les événements élémentaires ont tous la même probabilité. On a alors les résultats suivants, si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$$

et plus généralement,

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$