**2.6- Norme vectorielle et matricielle :**

**2.6.1- Norme vectorielle :** On appelle norme (ou longueur) de $v \in \mathbb{R}^n$ le nombre réel positif ou nul défini par : $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$

Une norme sur un espace vectoriel V est une application

$\|.\|: V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|, \forall \alpha \in K, \forall v \in V$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \forall (u, v) \in V^2$

***Proposition :*** Soit $v \in K^n$. Pour tout nombre réel p ≥ 1,

l'application $\|.\|_p$ définie par $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}$

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}$$

D'après cette proposition on déduit que

- ✓ $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$
- ✓ $\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2}$
- ✓ $\|v\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |v_i|$

## 2.6.2- Norme matricielle :

On appelle norme de $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ le nombre réel positif ou nul défini,

par exemple, par la norme de Frobenius : $\|A\|_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^2}$

C'est la norme euclidienne de matrice A considérée comme un long vecteur.

Une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(K)$ est une application

$\|.\| : \mathcal{M}_n(K) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

- $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|, \forall \alpha \in K, \forall A \in \mathcal{M}_n(K)$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$
- $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|, \ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ et notons

$a_{i,j}$ ses coefficients. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on a alors

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \end{pmatrix}$$

D'après la norme vectorielle $\|.\|_1$, on peut écrire

$$\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| |x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \left( \max_{j \in [\![1;n]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right\} \right)$$

$$\leq \left( \max_{j \in [\![1;n]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right\} \right) \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|AX\|_1 \leq \left( \max_{j \in [\![1;n]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right\} \right) \|X\|_1$$

Finalement

$$\|A\|_1 \leq \left( \max_{j \in [\![1;n]\!]} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right\} \right)$$

On appelle norme matricielle une norme définie pour des matrices carrées.

La norme de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une définie par :

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

**Exemple 01:**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Evaluer le produit $Ax$. Qu'observe-t-on ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x$ est un vecteur propre de $A$ de valeur propre $\lambda = 2$.

**Exemple 02 :**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$,

et les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Evaluer les produits $Au$ et $Av$. Qu'observe-t-on ?

$$Au = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Au = 1u \\ Av = 2v \end{cases}$$

$$Av = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc $u$ et $v$ sont des vecteurs propres de $A$

**2.7.2- Définition :**

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que λ est une valeur propre de *A* si et seulement si il existe un vecteur non nul *x* tel que : $Ax = \lambda x$. On dit alors que *x* est le vecteur propre de *A* associé à la valeur propre $\lambda$ et l'ensemble des valeurs propres de *A* est appelé spectre de *A*.

**2.7.3- Méthodes classique de calcul :**

On suppose que A est une matrice carrée d'ordre *p*. On note $\alpha_{i,\,j}$ ses coefficients et Xi ceux de vecteur *x*.

L'égalité $Ax = \lambda x$ est présentée par le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1} X_1 & + & \alpha_{1,2} X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,p} X_p & = & \lambda X_1 \\ \alpha_{2,1} X_1 & + & \alpha_{2,2} X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,p} X_p & = & \lambda X_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{p,1} X_1 & + & \alpha_{p,2} X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{p,p} X_p & = & \lambda X_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha_{1,1} - \lambda) X_1 & + & \alpha_{1,2} X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,p} X_p & = 0 \\ \alpha_{2,1} X_1 & + & (\alpha_{2,2} - \lambda) X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,p} X_p & = 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{p,1} X_1 & + & \alpha_{p,2} X_2 & + & \cdots & + & (\alpha_{p,p} - \lambda) X_p & = 0 \end{cases}$$

# Matrices / Valeurs et vecteurs propres

Pour que ce système ait une solution non nulle, il suffit que le déterminant de $(A - \lambda I)$, soit nul.

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)\, x = 0 \Rightarrow det(A - \lambda I) = 0.$

Le scalaire $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Autrement dit si et seulement si $det(A - \lambda I) = 0$.

On sait qu'il existe n valeurs propres, donc on peut démontrer la propriété suivante :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i , \quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

**Exemple 01 :**

Soit $M$ la matrice réelle 3*3 suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de $M$.

**Solution :**

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -2-2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda + 4)(\lambda - 2)$$

La matrice $M$ admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : 1; 2; et $-4$.

**Exemple 02 :** Soit $A$ la matrice réelle 3*3 suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A$.
2. Déterminer une base de vecteurs propres

**Solution :**

1- $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 2) + 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

La matrice $A$ admet donc deux valeurs propres distinctes qui sont : 1, 2.

2- on va déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Pour $\lambda$=1

$$(A-\lambda I)\,x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda$=2 $\quad (A-\lambda I)\,x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Matrices diagonales par blocs :**

Une matrice diagonale par blocs est une matrice de bloc qui est une matrice carrée, et comportant des principales diagonale des blocs matrices carrées, de telle sorte que les blocs hors diagonale sont nuls matrices. Une matrice diagonale par blocs A présente la forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{A}_k$ est une matrice carrée.

La matrice **A** peut être indiquée comme diag ($\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, , $\mathbf{A}_n$).

# Matrices / Matrices particulières

Le déterminant d’une matrice diagonale par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

La trace d’une matrice diagonale par blocs est égal a la somme des traces des blocs diagonaux.

**Matrice trapézoïdale et triangulaire :**

Une matrice A (m*n) est dite trapézoïdale supérieur si $a_{ij}=0$ pour i > j, et trapézoïdale inférieure si $a_{ij}=0$ pour i < j. ce nom vient du fait que, quand m < n, les termes non nuls des matrices trapézoïdales supérieures ont la forme d'un trapèze.

Une matrice triangulaire est une matrice trapézoïdale carrée d'ordre n de la forme

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \text{ ou } \mathrm{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

# Matrices / Matrices particulières

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \text{ ou } \mathrm{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

La matrice **L** est dite triangulaire inférieure tandis que **U** est dite triangulaire supérieure

**Matrice bande :**

On dit qu'une matrice A (m*n) est une matrice bande si elle n'admet des éléments non nuls que sur un "certain nombre" de diagonales autour de la diagonale principale. Plus précisément, on dit que A est une matrice bande-p inférieure si $a_{ij}=0$ pour $i > j+p$ et bande-q supérieure si $a_{ij}=0$ pour $j > i+q$. on appelle simplement matrice bande-p une matrice qui est bande-p inférieure et supérieure.

# Matrices / Matrices particulières

Les matrices introduites dans la section précédente sont des cas particuliers de matrices bandes. Les matrices diagonales sont des matrices bandes pour lesquelles $p=q=0$. Les matrices triangulaires correspondent à $p=m-1$, $q=0$ (triangulaire inférieures), ou $p=0$, $q=n-1$ (triangulaire supérieures).

Il existe d'autres catégories intéressantes de matrices bandes : les matrices tri-diagonales ($p=q=1$), les bi-diagonales supérieures ($p=0$, $q=1$) et les bi-diagonales inférieures ($p=1$, $q=0$).

# Matrices / Matrices particulières

Mentionnons également les matrices de hessenberg inférieures (p=m-1, q=1) et les matrices de hessenberg supérieures (p=1, q=n-1) qui ont respectivement les structure suivante

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & & 0 \\ h_{21} & h_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & h_{m-1n} \\ h_{m1} & \cdots & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & & h_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{mn-1} & h_{mn} \end{bmatrix}$$