

TD 3

Relations binaires sur un ensemble

Exercice 1:

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathfrak{R}$ par :

$$(x, y)\mathfrak{R}(x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'.$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Trouver la classe d'équivalence du couple $(0, 0)$.

Exercice 2:

On définit une relation binaire S sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$xSy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n.$$

- 1) Montrer que S est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
- 2) On considère dans la suite de l'exercice que l'ensemble est ordonné par la relation S . Soit $A = \{1, 2, 4, 16, 20\}$. Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de A .

Exercice 3:

Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire réflexive et transitive. On définit une relation S par :

$$xSy \Leftrightarrow x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}x.$$

- Montrer que S est une relation d'équivalence et que $\mathfrak{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de S .

Exercice 4:

Soit $\mathfrak{R}$ une relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$(a, b)\mathfrak{R}(a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b.$$

- 1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
- 2) Soit $(p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$, décrire la classe d'équivalence de (p, q) .

Exercice 5:

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation T par:

$$(x, y)T(x', y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y.$$

- (1) Vérifier que T est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
- (2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, représenter l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y)T(a, b)\}$.

Exercice 6:

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\prec$ par

$$(x, y) \prec (x', y') \iff ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')).$$

Démontrer que ceci définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.