Chapitre 3

Relations binaire sur un ensemble

Définition 3.1 *On appelle relation binaire, tout proposition entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non. On note $x\Re y$ et on lit "x est en relation avec y".*

Exemple 3.1 • *L'inégalité $\leq$ est une relation binaire sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$,*
• *Le parallélisme " $\parallel$ " et l'orthogonalité " $\perp$ " sont des relations binaires sur l'ensemble des droites du plan ou de l'espace,*
• *L'inclusion $\subset$ est une relation binaire sur $P(E)$ où sur E,*
• *La relation " plus grand que" sur l'ensemble des étudiants, est une relation binaire.*

Définition 3.2 *Etant donnée une relation binaire $\Re$ entre les éléments d'un ensemble non vide E, on dit que :*
1. $\Re$ est Reflexive $\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ x\Re x$,
2. $\Re$ est Transitive $\Longleftrightarrow \forall x, y, z \in E,\ (x\Re y) \wedge (y\Re z) \Longrightarrow (x\Re z)$
3. $\Re$ est Symétrique $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E,\ (x\Re y) \Longrightarrow (y\Re x)$
4. $\Re$ est Anti-Symétrique $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E,\ (x\Re y) \wedge (y\Re x) \Longrightarrow x = y$.

3.1 Relation d'équivalence

Définition 3.3 *On dit qu'une relation binaire $\Re$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence, si elle est Réflexive, Symétrique et Transitive.*

Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

Définition 3.4 *1. On dit que deux éléments x et $y \in E$ sont équivalents si $x\Re y$.*
2. On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$, l'ensemble : $\dot{x} = \{y \in E;\ x\Re y\}$.
3. x est dit un représentant de la calsse d'équivalence $\dot{x}$.
4. On appelle ensemble quotient de E par la relation d'équivalence $\Re$, l'ensemble des classes d'équivalence

de tous les éléments de E. Cet ensemble est noté $E_{/\Re}$.

5. $\dot{x} = \dot{y} \Longleftrightarrow x\Re y$

Exemple 3.2 *: Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\Re$ par :*

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1.$

Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence et donner l'ensemble quotient $\mathbb{R}_{/\Re}$.

1. $\Re$ est une relation d'équivalence.

i) $\Re$ est une relation Reflexive, car : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = x^2 - 1 \Longrightarrow x\Re x$

ii) $\Re$ est une relation Symétrique, car : $\forall x, y \in R,\ x\Re y \Longrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$

$\Longrightarrow y^2 - 1 = x^2 - 1$ *car l'égalité est symétrique*

$\Longrightarrow y\Re x$

iii) $\Re$ est une relation Transitive, car : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x\Re y) \wedge (y\Re z) \Longrightarrow (x^2-1 = y^2-1) \wedge (y^2-1 = z^2-1)$

$\Longrightarrow (x^2 - 1 = z^2 - 1)$ *car l'égalité est Transitive.*

$\Longrightarrow x\Re z$

De i) , ii) et iii) , on déduit que $\Re$ est une relation déquivalence.

2. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}_{/\Re}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $\forall y \in \mathbb{R},\ x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$

$\Longleftrightarrow x^2 - y^2 = 0$

$\Longleftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$

$\Longleftrightarrow (y = x) \vee (y = -x)$

donc : $\dot{x} = \{x,\ -x\}$, *par suite* $\mathbb{R}_{/\Re} = \{\{x, -x\},\ x \in \mathbb{R}\}$

Exemple 3.3 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$; et $p,\ q \in \mathbb{Z}$. On dit que p est congru à q modulo n, et on note $p \equiv q[n]$, si n divise $p - q$, c'est-à-dire si : $\exists k \in \mathbb{Z}; p - q = kn$.*

Par exemple, 22 est congru à 1 modulo 7, ce que l'on note $22 \equiv 1[7]$, car $22 - 1 = 21$ est divisible par 7.

L'entier -6 est aussi congru à 1 modulo 7ce que l'on note $-6 \equiv 1[7]$ car $-6 - 1 = -7$ est divisible par 7.

On vérifie facilement que "la relation de congruence modulo n" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

On note $\dot{p}$ la classe d'équivalence de $p \in \mathbb{Z}$,

Par exemple, on considère "la relation de congruence modulo 7" alors,

$\dot{1} = \{p \in \mathbb{Z}, p \equiv 1\,[7]\}\,,$

$= \{p \in \mathbb{Z}, p - 1 \text{ est divisible par } 7\}\,,$

$= \{1 + k7,\ \ k \in \mathbb{Z}\}\,,$

$= \{..., -20, -13, -6, 1, 8, 15, 22...\}$

En générale la classe d'équivalence de p modulo n est l'ensemble:

$\dot{p} = \{p + k7,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$

D'où l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n, noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,est donné par

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{ \dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2}, ...,\ \dot{n-1} \right\}$$

C'est un sous-ensemble fini, il contient n éléments.

Proposition 3.1 *Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.*
Alors, les classes d'équivalences forment une partition de E, c'est-à-dire que
- *toute classe d'équivalence est non vide ,*
- *la réunion des classes d'équivalence est égale à E ,*
- *deux classes d'équivalence sont soient disjointes soient confondues,*

$$\forall x, y \in E,\ \dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset \text{ ou } \dot{x} = \dot{y}$$

3.2 Relation d'ordre

Définition 3.5 *On appelle relation d'ordre sur un ensemble E toute relation binaire réflexive, anti-symétrique et transitive.*

On dit alors que $(E,\ \Re)$ est un ensemble ordonné (par $\Re$), Une relation d'ordre est souvent notée $\leq$.

Exemple 3.4 *La relations "$\subset$" est une relation d'ordre sur $P(E)$.*
1. "$\subset$" est Réflexive, car $\forall A \in P(E)$, on a $A \subset A$.
2. "$\subset$" est Transitive, car $\forall A, B, C \in P(E)$, $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$
3. "$\subset$" est Anti-symétrique, car $\forall A, B \in P(E)$, $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Longrightarrow A = B$
De 1), 2) et 3) on déduit que "$\subset$" est une relation d'ordre sur E.

Exemple 3.5 *1. Les relations "$\leq$", "$\geq$" sont des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$.*
2. La relation "$/$" (divise) est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

3.2.1 Ordre total ou partiel

Définition 3.6 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\Re$.*
- *On dit que $\Re$ est une relation d'ordre total si*

$$\forall x,\ y \in E;\ x\Re y \text{ ou } y\Re x.$$

- *Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est partiel, c'est à dire $\exists x,\ y \in E$; x n'est pas en relation avec y, et y n'est pas en relation avec x.*

Exemple 3.6 *1. Les relations "$\leq$", "$\geq$" sont des relations d'ordre total sur* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

2. La relation "$/$" (divise) est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$.

3. La relations "$\subset$" est une relation d'ordre partiel sur $P(E)$.

► *par exemple soit $E = \{1, 2, 3\}$, alors $P(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E, \emptyset\}$*

alors $\exists A = \{2\} \in P(E)$, et $B = \{1, 3\} \in P(E)$; mais $A \nsubseteq B$ et $B \nsubseteq A$.

Plus petit élément, plus grand élément

Définition 3.7 *Soit $(E, \ \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E,*

1. On dit que $m \in A$ est le plus petit élément de A (ou un minimum)si

$$\forall x \in A, \ m \leq x$$

2. On dit que $M \in A$ est le plus grand élément de A (ou un maximum) si

$$\forall x \in A, x \leq M$$

Proposition 3.2 ***Unicité du minimum et du maximum***

Soit $(E, \ \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E

1. Si A admet un minimum, il est unique : on le note $\min A$.

2. Si A admet un maximum, il est unique : on le note $\max A$.

Exemple 3.7 *On définie sur $\mathbb{Z}^*$, la relation d'ordre $\Re$ suivante:*

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}^*, n\Re m \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \ m = kn$$

- *le plus petit élement de $\mathbb{Z}^*$ par $\Re$ est* 1
- *$\mathbb{Z}^*$ n'admet pas un plus grand élément.*

Soit A, B des parties de $\mathbb{Z}^*$ tels que, $A = \{2, -6, -10, -14, -18, -20\}$, $B = \{7, 6, 2, 3, -42\}$

Déterminer le plus petit élément (min)*, le plus grand élément* (max) *de A, B par la relation $\Re$ s'ils existent.*

- $\min A = 2$
- $\max A = \nexists$
- $\min B = \nexists$
- $\max B = -42$

Majorant, minorant

Définition 3.8 *Soit $(E, \ \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E*

1. On dit que $m \in E$ est un minorant de A si

$$\forall x \in A, \ m \leq x.$$

On dit alors que A est minorée.
2. On dit que $M \in E$ est un majorant de A si

$$\forall x \in A,\ x \leq M.$$

On dit alors que A est majorée.
3 On dit que A est bornée si elle est minorée et majorée.

Borne inférieure et borne supérieure

Définition 3.9 *Soit $(E,\ \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E*
1 Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, on l'appelle borne inférieure de A et on le note $\inf A$.
2 Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, on l'appelle borne supérieure de A et on le note $\sup A$.

Proposition 3.3

Soit $(E,\ \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E
1 Si A admet un minimum, alors il admet une borne inférieure et $\min A = \inf A$.
2 Si A admet un maximum, alors il admet une borne supérieure et $\max A = \sup A$.

Remarque 3.1 • *Le plus petit élément de A ($\min A$), s'il existe est un minorant de A, par contre un minorant de A peut ne pas être le plus petit élément de A car il n'est pas nécéssairement dans A.*
• *Même pour le plus grand élément ($\max A$) et le majorant.*

Cette remarque exprime que l'implication réciproque dans la **Proposition** (3.2.2) n'est pas toujours vraie.

Exemple 3.8 *Soient $E = \{1, a, 2, 5, \gamma\}$, considérons $(P(E), \subset)$ est ordonné, et soit A une partie de $P(E)$,*

$$A = \{\{a, 2\},\ \ \{2, 5, \gamma\},\ \ \{1, 2, \gamma\},\ \ \{a, 2, 5\}\}$$

alors,
• *Les minorants de A sont : $\emptyset$ et $\{2\}$.*
• $\inf A = \{2\}$
3. A n'a pas de plus petit élément, car $\inf A \notin A$.
4. Le seul majorant de A est : $E = \{1, a, 2, 5, \gamma\}$
5. $\sup A = E$.
6. A n'a pas de plus grand élément, car $\sup A \notin A$.