

Logique propositionnelle

Méthodes de résolution

Méthodes de résolution

La *résolution* est une méthode de preuve dédiée aux formules propositionnelles sous forme normale conjonctive construites sur un ensemble de variables propositionnelles.

Définition Une preuve de réfutation par résolution d'une formule en FNC, $\varphi = \{C_1, \dots, C_n\}$ est une suite $r_1, r_2, \dots, r_m$ telle que, chaque r_i , $i \leq m$ est :

- soit une clause C_j , $j \leq n$
 - soit une clause obtenue par résolution à partir de deux clauses r_{i_0}, r_{i_1} avec $i_0 < i$ et $i_1 < i$.
- et telle que r_m est la clause vide, que l'on note $\square$. On dira que φ est réfutable par résolution dans ce cas.

De façon alternative on dira que la clause vide peut être dérivée par résolution à partir de $C_1, \dots, C_n$. Si on obtient la clause vide $\square$ après résolution de deux clauses C_1, C_2 cela signifie qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tels que $C_1 = p$ et $C_2 = \neg p$. Comme un ensemble de clause contenant à la fois la clause p et la clause $\neg p$ ne peut être satisfaisable, et qu'ajouter une clause obtenue par résolution préserve la satisfaisabilité, il est donc cohérent de poser que $v(\square) = 0$, pour toute valuation v .

Méthodes de résolution

Soit $\varphi = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ (vu sous forme ensembliste). φ n'est clairement pas satisfaisable. On va en donner une preuve par résolution ci-dessous. Une façon assez claire de présenter les preuves de ce type est de les disposer en colonne avec à droite, pour rappel, les numéros des clauses utilisées pour la résolution.

- | | | |
|----|------------------|---------------|
| 1. | p, q | |
| 2. | $p, \neg q$ | |
| 3. | $\neg p, q$ | |
| 4. | $\neg p, \neg q$ | |
| 5. | p | résol. 1 et 2 |
| 6. | q | résol 1 et 3 |
| 7. | $\neg p$ | résol 4 et 6 |
| 8. | $\square$ | résol 5 et 7 |

Méthodes de résolution

Définition . *Un système de réfutation est cohérent (ou consistant) si toute formule qui peut-être réfutée n'est pas satisfaisable. Il est complet si toute formule non satisfaisable peut être réfutée.*

Théorème *La méthode de résolution est cohérente et complète pour les formules propositionnelles en FNC. Plus précisément, soit φ une formule propositionnelle en FNC. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est réfutable par résolution*
2. *φ n'est pas satisfaisable*

La preuve de complétude ci-dessus donne un algorithme (cf algorithme 1.1) pour tester la satisfaisabilité d'un ensemble de clauses : on élimine petit à petit les variables mais au prix de la génération par résolution d'un nombre de clauses qui peut croître de façon quadratique à chaque étape. Au final, on peut être amené à produire un nombre exponentiel (en la longueur de la formule) de résolvantes. On remarque au passage que le processus est donc bien fini même dans le cas où la formule n'est pas réfutable : au delà d'un certain nombre d'étapes, on ne peut plus créer de nouveau résolvant donc en particulier la clause $\square$ si cela n'a pas déjà été fait. On peut alors arrêter le processus et conclure à la satisfaisabilité.

Méthodes de résolution

```
1: function SAT-RESOLUTION( $\varphi = \{C_1, \dots, C_n\}$ )
2:    $S \leftarrow \varphi$ 
3:   while  $\text{var}(S) \neq \emptyset$  et  $\square \notin S$  do
4:     choose  $p \in \text{var}(S)$ 
5:      $S = S \setminus \{C \in S : p \in C \text{ et } \neg p \in C\}$ 
6:      $\text{Res} \leftarrow \{C \cup D : C \cup \{p\} \in S \text{ et } D \cup \{\neg p\} \in S\}$ 
7:      $S \leftarrow \text{Res} \cup \{C \in S : p \notin C \text{ et } \neg p \notin C\}$ 
8:   if  $\square \in S$  then return 0   #  $\varphi$  n'est pas satisfaisable
9:   else return 1   #  $\varphi$  est satisfaisable
```

FIGURE 1.1 – Algorithme de satisfaisabilité par résolution

Méthodes de résolution

Si la preuve peut être tournée en un algorithme de test de satisfaisabilité elle n'est néanmoins pas très constructive :

- Dans le cas où φ est satisfaisable, elle ne permet pas de trouver immédiatement une valuation satisfaisante
 - Dans le cas où φ n'est pas satisfaisable, elle ne donne pas vraiment de preuve par réfutation.
- Des preuves plus constructives existent, que l'on verra en exercice.

Test de validité d'une formule par résolution Pour décider de la validité d'une formule φ , on peut donc appliquer l'algorithme suivant :

1. Transformer φ en $(\neg\varphi)$
2. Mettre $(\neg\varphi)$ sous forme FNC (par une méthode, peu coûteuse, préservant seulement l'équisatisfaisabilité)
3. Montrer que $(\neg\varphi)$ est non satisfaisable en produisant une preuve de réfutation par la méthode de résolution.

Méthodes de résolution

Exemple

Utiliser la méthode de résolution pour répondre aux questions suivantes.

a) Prouver que S est insatisfaisable :

$$S = \{P, \neg P \vee Q, \neg Q \vee R, \neg Q \vee \neg R\}$$

Méthodes de résolution

1. P
2. $\neg P \vee Q$
3. $\neg Q \vee R$
4. $\neg Q \vee \neg R$
5. Q
6. R
7. $\neg R$
8. $\square$

Méthodes de résolution

b) Prouver que S est insatisfaisable :

$$\mathcal{S} = \{R, Q \vee \neg R, S \vee \neg R, P \vee \neg Q \vee \neg S, \neg P \vee \neg Q \vee \neg S\}$$

Méthodes de résolution

1. R
2. $Q \vee \neg R$
3. $S \vee \neg R$
4. $P \vee \neg Q \vee \neg S$
5. $\neg P \vee \neg Q \vee \neg S$
6. Q (1, 1) – (2, 2)
7. S (1, 1) – (3, 2)
8. $P \vee \neg S$ (6, 1) – (4, 2)
9. P (7, 1) – (8, 2)
10. $\neg P \vee \neg S$ (6, 1) – (5, 2)
11. $\neg P$ (7, 1) – (10, 2)
12. $\square$ (9, 1) – (11, 1)

Méthodes de résolution

c) S est-elle satisfaisable ou insatisfaisable ?

$$\mathcal{S} = \{P \vee Q, P \vee \neg Q, R \vee Q, R \vee \neg Q\}$$

Méthodes de résolution

1. $P \vee Q$

2. $P \vee \neg Q$

3. $R \vee Q$

4. $R \vee \neg Q$

5. P

$$(1, 2) - (2, 2)$$

6. $P \vee R$

$$(1, 2) - (4, 2)$$

7. R

$$(3, 2) - (4, 2)$$

Il n'y a pas de possibilité d'obtenir des clauses différentes,
donc S satisfaisable.

Méthodes de résolution

d) Prouver que S est insatisfaisable :

$$S = \{\neg P, \neg R \Rightarrow W, Q \vee (\neg T \Rightarrow \neg P \wedge \neg Q), \neg P \Rightarrow (S \wedge \neg R), \neg Q, \neg S, \neg T, \neg R \Rightarrow Y\}$$

Méthodes de résolution

Pour chaque formule nous en donnons sa traduction en forme clausale :

1. $\neg P$

2. $\neg R \Rightarrow W \qquad R \vee W$

3. $Q \vee (\neg T \Rightarrow \neg P \wedge \neg S) \Leftrightarrow$

$$Q \vee (T \vee (\neg P \wedge \neg S)) \Leftrightarrow Q \vee ((T \vee \neg P) \wedge (T \vee \neg S)) \Leftrightarrow \\ (Q \vee T \vee \neg P) \wedge (Q \vee T \vee \neg S)$$

4. $\neg P \Rightarrow (S \wedge \neg R)$

$$P \vee (S \wedge \neg R) \Leftrightarrow (P \vee S) \wedge (P \vee \neg R)$$

5. $\neg Q$

6. $\neg S$

7. $\neg T$

8. $\neg R \Rightarrow Y \qquad R \vee Y$

On prouve que l'ensemble de clauses est insatisfaisable :

1. $\neg P$
2. $R \vee W$
3. $Q \vee T \vee \neg P$
4. $Q \vee T \vee \neg S$
5. $P \vee S$
6. $P \vee \neg R$
7. $\neg Q$
8. $\neg S$
9. $\neg T$
10. $R \vee Y$
11. P $(5, 2) - (8, 1)$
12. $\square$ $(11, 1) - (1, 1)$