

Logique propositionnelle

Le problème SAT

Définition du problème

Definition (Probleme SAT) Soit Ψ une formule (le plus souvent mise sous forme normale conjonctive). Le probleme SAT est un probleme de decision qui consiste a determiner si Ψ admet ou non un modele.

Définition du problème

La plupart des algorithmes de résolution de SAT ne se contentent pas de répondre par oui ou par non, ils peuvent aussi fournir un modèle, ou même l'ensemble des modèles.

Définition du problème

Exemple *Donnée : Une formule booléenne mise sous forme CNF : $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_1)$*

Question : Est-ce que la formule φ admet au moins un modèle ?

Réponse : Pour cet exemple, la réponse est oui : l'affectation $x_1 = \text{vrai}$, $x_2 = \text{vrai}$, $x_3 = \text{vrai}$ satisfait la formule φ .

Un problème NP-complet

Théorème: Le problème SAT est décidable.

Démonstration. Algorithme : Étant donné une formule Ψ ayant n variables propositionnelles. Calculer les 2^n valuations possibles. Pour chacune d'entre-elles, calculer la valeur de vérité de Ψ .

Si au moins une est vraie, alors Ψ est satisfaisable.

On est devant la situation suivante. Étant donnée une formule Ψ , on se demande si Ψ admet un modèle ou non, i.e., s'il existe des valeurs de vérité attribuables aux variables propositionnelles qui satisferait Ψ :

- une recherche exhaustive comme dans l'algorithme précédent peut demander jusqu'à 2^n vérifications si Ψ possède n variables propositionnelles. Cette démarche est dite déterministe, mais son temps de calcul est exponentiel.

- d'un autre côté, si Ψ est satisfiable, il suffit d'une vérification à faire, à savoir tester précisément la configuration qui satisfait Ψ . Cette vérification demande un simple calcul booléen, qui se fait en temps polynomial (essentiellement linéaire en fait). Le temps de calcul cesse donc d'être exponentiel, à condition de savoir quelle configuration tester. Celle-ci pourrait par exemple être donnée par un être omniscient auquel on ne ferait pas totalement confiance. Une telle démarche est dite **non déterministe**.

La question de la satisfiabilité de Ψ , ainsi que tous les problèmes qui se résolvent suivant la méthode que nous venons d'esquisser, sont dits NP (pour polynomial non déterministe). Par exemple, tester si la formule Ψ est une tautologie équivaut, par des calculs très simples en temps polynomial, à tester que sa négation n'est pas satisfaisable

Le problème SAT joue un rôle fondamental en théorie de la complexité, puisqu'on peut montrer que la découverte d'un algorithme déterministe en temps polynomial pour ce problème permettrait d'en déduire des algorithmes déterministes en temps polynomial pour tous les problèmes de type NP (théorème de Cook). On dit que SAT (et donc également le problème de la non-démontrabilité d'une proposition) est un problème NP-complet.