Logique propositionnelle

Sémantique

Sémantique du calcul propositionnel

Il faut maintenant un moyen de déterminer si une formule est vraie ou fausse. La première étape est de donner une valeur de vérité aux propositions. L'évaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels. Ces valeurs sont données par une **valuation**.

Définition **(Valuation)** *Une valuation est une application de* PROP *dans* $\{0, 1\}$. *La valeur 0 désigne le "faux" et la valeur 1 désigne le "vrai".*

Une valuation sera souvent donnée sous forme d'un tableau. Par exemple, si PROP $= \{p, q\}$ alors la valuation $v : p \mapsto 1$, $q \mapsto 0$ s'écrit plus simplement v :

p	q
1	0

Une fois la valuation v choisie, la valeur de la formule se détermine de façon naturelle, par extension de la valuation v aux formules de la façon suivante :

Sémantique du calcul propositionnel

Définition **(Valeur d'une formule)** – $v(\neg\varphi) = 1 \ ssi \ v(\varphi) = 0$

- $v(\varphi \vee \psi) = 1 \ ssi \ v(\varphi) = 1 \ ou \ v(\psi) = 1$
- $v(\varphi \wedge \psi) = 1 \ ssi \ v(\varphi) = 1 \ et \ v(\psi) = 1$
- $v(\varphi \Rightarrow \psi) = 0 \ ssi \ v(\varphi) = 1 \ et \ v(\psi) = 0$

Une définition équivalente est la suivante :

Définition **(Valeur d'une formule (bis))**

- $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$
- $v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \Rightarrow \psi) = v(\neg\varphi \vee \psi)$

Sémantique du calcul propositionnel

Modèle d'une formule

Définition *L'ensemble des* **valuations** *d'un ensemble de variables propositionnelles* $\textsc{Prop}$ *est noté* $\mathsf{Val}(\textsc{Prop})$ *(ou juste* Val *lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur* $\textsc{Prop}$*).* $\mathsf{Val}(\textsc{Prop})$ *est donc l'ensemble des fonctions de* $\textsc{Prop}$ *dans* $\{0,1\}$.

Définition **(Modèle d'une formule)** *Un* **modèle** *de* φ *est une valuation* v *telle que* $v(\varphi) = 1$*. On note* $\mathsf{mod}(\varphi)$ *l'ensemble des modèles de* φ.

Définition **(Satisfaisabilité)** *Une formule* φ *est* **satisfaisable** *si elle admet un modèle (i.e., si il existe une valuation* v *telle que* $v \models \varphi$*, i.e. si* $\mathsf{mod}(\varphi) \neq \varnothing$*)*

Définition **(Insatisfaisabilité)** *Une formule* φ *est insatisfaisable si elle n'admet aucun modèle (i.e., si pour toute une valuation* v*,* $v(\varphi) = 0$*, i.e., si* $\mathsf{mod}(\varphi) = \varnothing$*)*

Définition **(Tautologie)** *Une* **tautologie** *(ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation (i.e.,* $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{Val}$*). On note* $\models \varphi$ *pour dire que* φ *est une tautologie.*

Définition **(Equivalence)** *On dit que* φ *est équivalente à* ψ *si les deux formules ont les mêmes modèles (i.e. si* $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{mod}(\psi)$*). On note alors* $\varphi \equiv \psi$.

Définition **(Conséquence logique)** *Une formule* ψ *est* **conséquence logique** *d'une formule* φ *si tout modèle de* φ *est un modèle de* ψ *(i.e., si* $\mathsf{mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi)$*). On note alors* $\varphi \models \psi$.

Sémantique du calcul propositionnel

p	$\bar{p}$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemple *Si* $\text{PROP} = \{p, q, r\}$ *et* $\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$ *alors l'ensemble des modèles de* φ *est*

$mod(\varphi) =$

p	q	r
0	*1*	*0*
1	*0*	*0*
1	*1*	*1*
1	*1*	*0*
1	*1*	*1*

Sémantique du calcul propositionnel

Équivalence entre formules

Il est courant de souhaiter modifer une formule, de façon a rendre son expression plus simple, ou plus facile a manipuler, et ceci en gardant bien sûr la sémantique de la formule, c'est-a-dire sans modifer l'ensemble de ses modèles.

Sémantique du calcul propositionnel

- La substitution

La substitution d'une formule ψ par une formule ψ' dans une troisième formule φ (notée $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']}$) consiste à remplacer chaque occurrence de ψ dans φ par ψ'.

Prenons par exemple $\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$, $\psi = \neg p$ et $\psi' = q \Rightarrow p$. Alors $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = ((q \Rightarrow p) \vee q) \wedge ((q \Rightarrow p) \vee \neg r)$.

Définition **(Substitution)** *Soient φ, ψ, et ψ' trois formules du calcul propositionnel,*

- *si ψ n'est pas une sous-formule de φ, alors $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = \varphi$*
- *sinon si $\varphi = \psi$ alors $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = \psi'$*
- *sinon*
  - *si $\varphi = \neg \varphi'$ alors $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = \neg(\varphi'_{[\psi \leftarrow \psi']})$*
  - *si $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ (où $\circ$ est un connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$) alors $\varphi_{[\psi \leftarrow \psi']} = \varphi_{1[\psi \leftarrow \psi']} \circ \varphi_{2[\psi \leftarrow \psi']}$*

Sémantique du calcul propositionnel

- Équivalences classiques

Nous avons vu que remplacer une sous-formule ψ d'une formule φ par une formule équivalente ψ' donne une formule notée $\varphi[\psi \leftarrow \psi']$ équivalente à φ. C'est-à-dire que cette substitution préserve les modèles, *i.e.*, $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{mod}(\varphi[\psi \leftarrow \psi'])$.

Voici quelques règles d'équivalences courantes, qui permettent de telles substitutions.

- $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
- commutativité : $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi \qquad \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
- associativité : $\varphi \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\varphi \wedge \psi_1) \wedge \psi_2 \qquad \varphi \vee (\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\varphi \vee \psi_1) \vee \psi_2$
- distributivité : $\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2) \qquad \varphi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\varphi \vee \psi_1) \wedge (\varphi \vee \psi_2)$
- élements neutres : $\top \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \top \equiv \varphi \qquad \bot \vee \varphi \equiv \varphi \vee \bot \equiv \varphi$
- complément : $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \neg\varphi \wedge \varphi \equiv \bot \qquad \varphi \vee \neg\varphi \equiv \neg\varphi \vee \varphi \equiv \top$
- Elément absorbant : $\varphi \wedge \bot \equiv \bot \wedge \varphi \equiv \bot \qquad \varphi \vee \top \equiv \top \vee \varphi \equiv \top$
- contraposition $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$
- Absorption : $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \qquad \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$
- curryfication $\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi_3$
- Idempotence $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi \qquad \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
- Involution : $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
- Lois de De Morgan : $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad (\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- transitivité $[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3)] \Rightarrow [\varphi_1 \Rightarrow \varphi_3]$

Sémantique du calcul propositionnel

- Formes normales

Notations : Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des formules, on utilise les notations :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \qquad \text{et} \qquad \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$$

Si $n = 0$:

$$\bigwedge_{i=1}^{0} \varphi_i = \top \qquad \text{et} \qquad \bigvee_{i=1}^{0} \varphi_i = \perp$$

Définition **(Littéral)** *Un* **littéral** *est une formule atomique ou la négation d'une formule atomique. Autrement dit, c'est une formule ℓ de la forme p ou $\neg p$, où p est une variable propositionnelle.*

Définition **(Clause)** *Une* **clause disjonctive** *est une disjonction de littéraux : $\bigvee_{i=1}^{n} \ell_i$ où les ℓ_i sont des littéraux. Une* **clause conjonctive** *est une conjonction de littéraux : $\bigwedge_{i=1}^{n} \ell_i$ où les ℓ_i sont des littéraux.*

Sémantique du calcul propositionnel

- Formes normales

Définition **(Forme normale conjonctive)** *Une* **formule conjonctive** *(ou formule sous forme normale conjonctive (FNC), ou sous forme clausale) est une conjonction de clauses disjonctives :* $\bigwedge_{j=1}^{m} C_j$ *où les* C_j *sont des clauses disjonctives, ou encore* $\bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} \ell_i^j$ *les* ℓ_i^j *sont des littéraux.*

Exemple *La formule suivante est sous forme clausale :*

$$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge s$$

Définition **(Forme normale disjonctive)** *Une* **formule disjonctive** *(ou formule sous forme normale disjonctive (FND)) est une disjonction de clauses conjonctives :* $\bigvee_{j=1}^{m} C_j$ *où les* C_j *sont des clauses, ou encore* $\bigvee_{j=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n} \ell_i^j$ *les* ℓ_i^j *sont des littéraux.*

Exemple *La formule suivante est sous forme normale disjonctive :*

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg q \wedge p) \vee s$$

Sémantique du calcul propositionnel

Mise sous forme normale conjonctive (ou forme clausale) L'algorithme est le suivant :

Etape 1 Appliquer tant que possible la substitution suivante :

$\varphi \Rightarrow \psi \leftarrow \neg\varphi \vee \psi$

Etape 2 Appliquer tant que possible les substitutions suivantes (en remplaçant le membre gauche par le membre droit)

$\neg\neg\varphi \leftarrow \varphi$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \leftarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$

$\neg(\varphi \vee \psi) \leftarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$

$\varphi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) \leftarrow (\varphi \vee \psi_1) \wedge (\varphi \vee \psi_2)$

Exemple $\varphi = (\neg(p \wedge (\neg q \vee (r \vee s)))) \wedge (p \vee q)$.

- *Etape 1 : rien à faire*
- *Etape 2 :*

$\varphi = (\neg p \vee \neg(\neg q \vee (r \vee s))) \wedge (p \vee q)$

$\varphi = (\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg(r \vee s))) \wedge (p \vee q)$

$\varphi = (\neg p \vee (q \wedge \neg r \wedge \neg s)) \wedge (p \vee q)$

$\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (p \vee q)$

Sémantique du calcul propositionnel

Remarque

1. *Il faut noter qu'il n'y a pas unicité de la forme clausale.*
2. *On peut améliorer l'algorithme de mise sous forme clausale en appliquant les conseils suivants*
   - *Les clauses comportant deux littéraux opposés sont valides (tiers- exclu) et peuvent donc être supprimées (par ex.* $p \vee q \vee \neg r \vee \neg q$*).*
   - *On peut aussi supprimer les répétitions d'un littéral au sein d'une même clause (par ex.* $\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg p$ *équivaut à* $\neg p \vee q \vee \neg r$*).*
   - *Si dans une formule clausale une clause* C_i *est incluse dans une clause* C_j *alors la clause* C_j *peut être supprimée (la valeur de la conjonction des deux clauses ne dépend que de la valeur de* C_i*). Par exemple* $C_i = p \vee q \vee r$ *et* $C_j = p \vee \neg s \vee t \vee q \vee r$.