

Logique propositionnelle

Syntaxe et Sémantique

Syntaxe du calcul propositionnel

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

- symboles propositionnels (ou variables propositionnelles ou propositions ou atomes) $\text{PROP} = \{p_1, p_2, \dots\}$;
- connecteurs logiques $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$;
- symboles auxiliaires : parenthèses et espace.

L'ensemble \mathcal{F}_{cp} des formules du calcul propositionnel est le plus petit ensemble tel que :

- tout symbole propositionnel est une formule
- si φ est une formule alors $\neg\varphi$ est une formule
- si φ, ψ sont des formules alors $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ et $\varphi \Rightarrow \psi$ sont des formules.

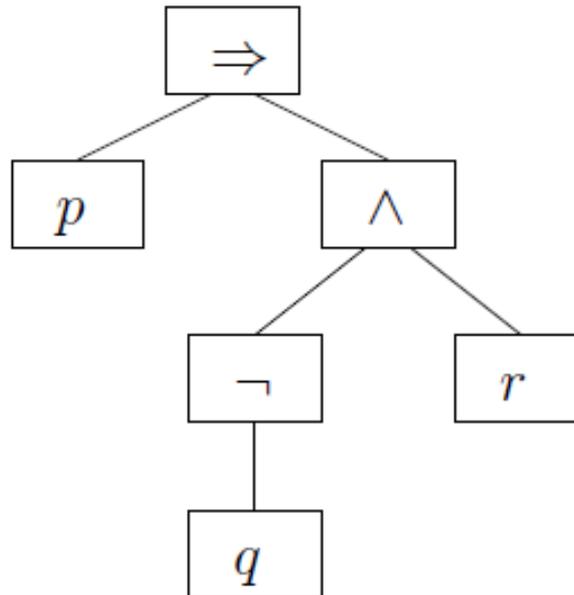
Les symboles auxiliaires sont utilisés pour lever les ambiguïtés possibles : on écrira $((p \vee q) \wedge r)$ au lieu de $p \vee q \wedge r$.

Syntaxe du calcul propositionnel

Les symboles auxiliaires sont utilisés pour lever les ambiguïtés possibles : on écrira $((p \vee q) \wedge r)$ au lieu de $p \vee q \wedge r$.

Exemple 1.1 p , $p \Rightarrow (q \vee r)$ et $p \vee q$ sont des formules propositionnelles ; $\neg(\vee q)$ et $f(x) \Rightarrow g(x)$ n'en sont pas.

A cause de la structure inductive de la définition, une formule peut-être vue comme un arbre dont les feuilles sont des propositions et les noeuds sont des connecteurs. Par exemple, la formule $p \Rightarrow (\neg q \wedge r)$ correspond à l'arbre

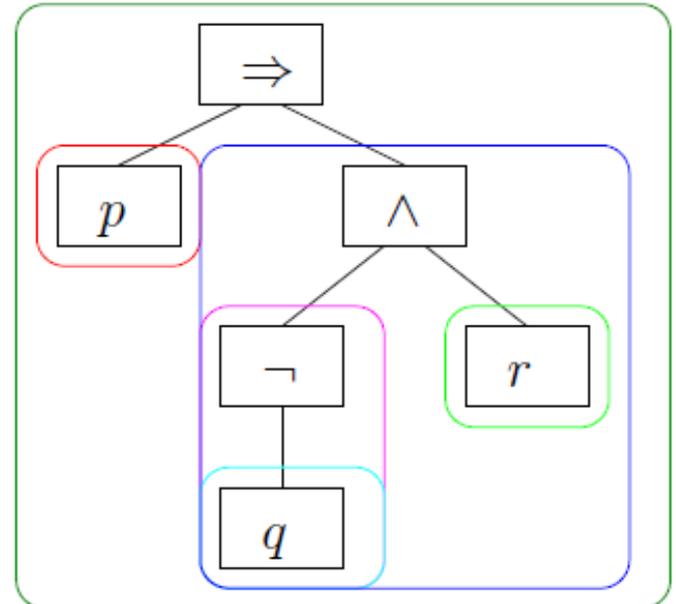


Syntaxe du calcul propositionnel

Définition (Sous-formule) L'ensemble $SF(\varphi)$ des sous-formules d'une formule φ est défini par induction de la façon suivante.

- $SF(p) = \{p\}$;
- $SF(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup SF(\varphi)$;
- $SF(\varphi \circ \psi) = \{\varphi \circ \psi\} \cup SF(\varphi) \cup SF(\psi)$ (où \circ désigne un des symboles $\wedge, \vee, \Rightarrow$).

Par exemple, $SF(p \Rightarrow (q \wedge r)) = \{p, q, r, q \wedge r, p \Rightarrow (q \wedge r)\}$. Quand on voit une formule comme un arbre, une sous-formule est simplement un sous-arbre



Syntaxe du calcul propositionnel

Définition (Sous-formule stricte) ψ est une sous-formule stricte de φ si ψ est une sous-formule de φ qui n'est pas φ .