Commande de robots de manipulation

Chapitre 3 : **Modélisation d’un robot manipulateur**

Plan du chapitre

- **1. Modèle géométrique**
  - Convention de Denavit-Hartenberg
  - Modèle géométrique direct
  - Modèle géométrique inverse
- **2. Modèle cinématique**
  - Analyse directe (utilisation du Jacobien direct)
  - Analyse inverse (utilisation du Jacobien inverse)
  - Notion de Singularité
- **3. Modèle dynamique**
  - Formalismes pour la modélisation dynamique
  - Méthode de Lagrange : équation de Lagrange, représentation matricielle (matrice d'inertie, matrice de Coriolis, Matrice de gravité).
  - Exemple (Robot plan à 1 ou 2DDL)

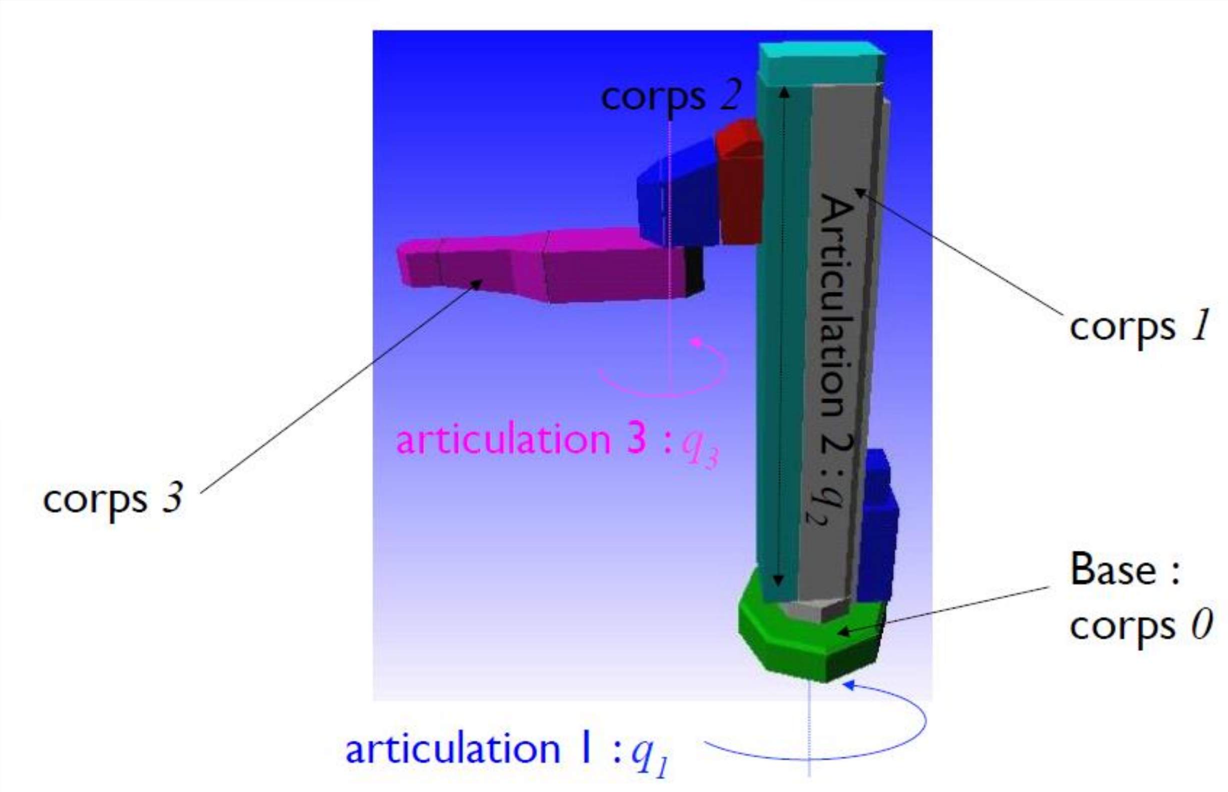
- **Modèle géométrique direct**
  - ✓ Donne l’attitude de l’organe terminal en fonction des coordonnées articulaires (longueur pour une articulation prismatique ou angle pour une rotoïde).

- **Modèle géométrique inverse**
  - ✓ Donne, si elles existent, le ou les ensembles de positions articulaires en fonction de l’attitude de l’organe terminal.

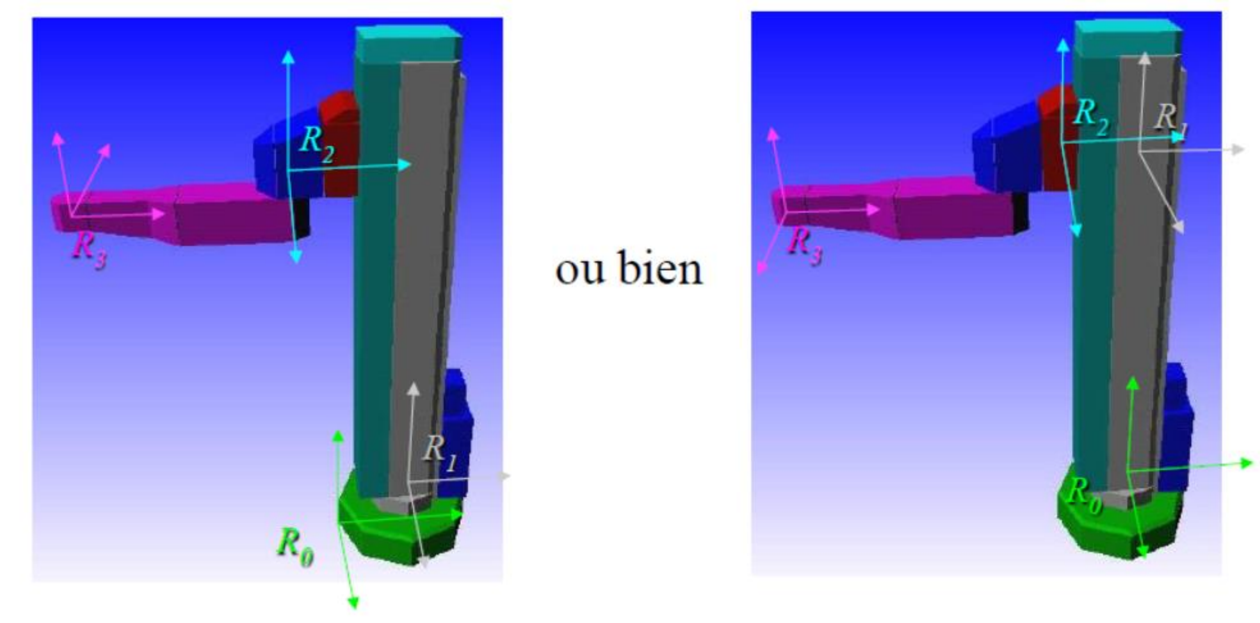
1.2. Principe : idée générale

- **Principe**
  - Fixer un repère à chaque corps du robot.
  - Calculer la matrice homogène entre chaque repère.
  - En déduire la matrice homogène entre la base et l'organe terminal.
- **Hypothèses**
  - Le robot est un chaînage de $n+1$ corps liés entre eux par n articulations.
  - A chaque corps on associe un repère R_i . Les repères sont numérotés de *0* à n.
  - La $i^{ème}$ articulation dont la position est notée q_i relie les corps $i-1$ et i.

1. Introduction
1.2. Principe : exemple



1. Introduction
1.2. Principe : exemple



On a : $M_{03}(\boldsymbol{q}) = M_{01}(q_1)M_{12}(q_2)M_{23}(q_3)$ avec $\boldsymbol{q} = [q_1\, q_2\, q_3]^T$

2. Convention de DH
2.1. Introduction

- **Convention de Denavit-Hartenberg**
  - ✓ Permet de normaliser, simplifier et rationaliser la modélisation géométrique d'un robot.
- **Hypothèses**
  - ✓ L'attitude d'un repère R_i par rapport au repère R_{i-1} est exprimée au moyen de 4 paramètres uniques : **les paramètres de DH**.
  - ✓ Deux contraintes limitent les degrés de liberté du repère R_i par rapport au repère R_{i-1}:
    - ❖ L'axe x_i de $R_i$est perpendiculaire à l'axe Z_{i-1} de R_{i-1}.
    - ❖ L'axe x_i coupe l'axe Z_{i-1}.

2. Convention de DH
2.2. Les paramètres de DH

- Décomposition de $\boldsymbol{M_{i-1\ i}}$ en 4

  transformations élémentaires :

  1. Rotation autour de *z* d'un angle θ_i
  2. Translation autour de *z* d'une longueur d_i
  3. Translation autour de *x* d'une longueur a_i
  4. Rotation autour de *x* d'un angle αi

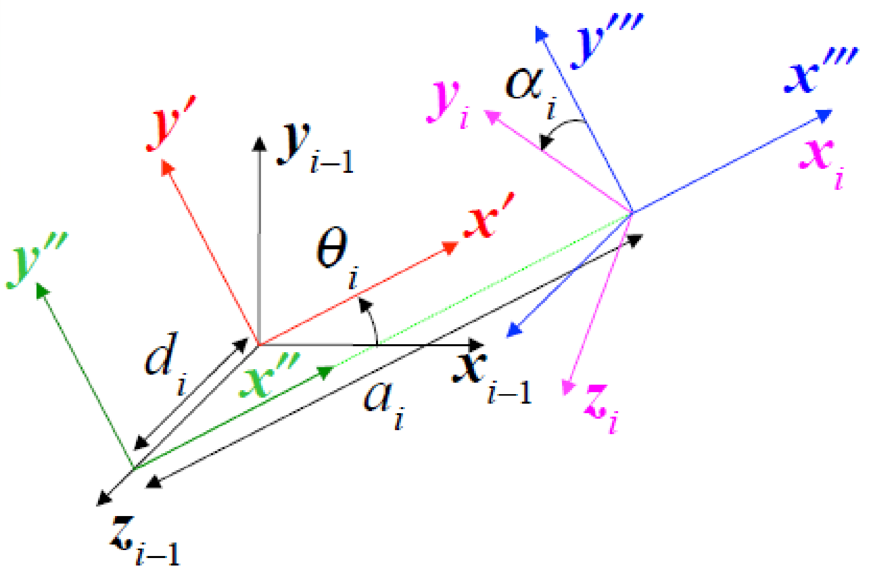
- Ces transformations se font par rapport au repère courant. D'où :

$$M_{i-1\,i} = R_{(z_{i-1},\theta_i)} T_{(z_{i-1},d_i)} T_{(x_i,a_i)} R_{(x_i,\alpha_i)}$$

2. Convention de DH
2.2. Les paramètres de DH

- On vérifie que les 2 conditions de DH sont remplies :

θ_i $d_i a_i$ et $\alpha_i$sont les paramètres de Denavit-Hartenberg



- Unicité :
  - Soit $M_{i-1\ \ i}$ vérifiant les 2 conditions de DH
  - Dans ce cas, on démontre [SPONG] que les paramètres de DH θ_i $d_i a_i$ et α_i sont uniques.

2. Convention de DH
2.3. Matrice homogène de DH

- On a :
- D’où :

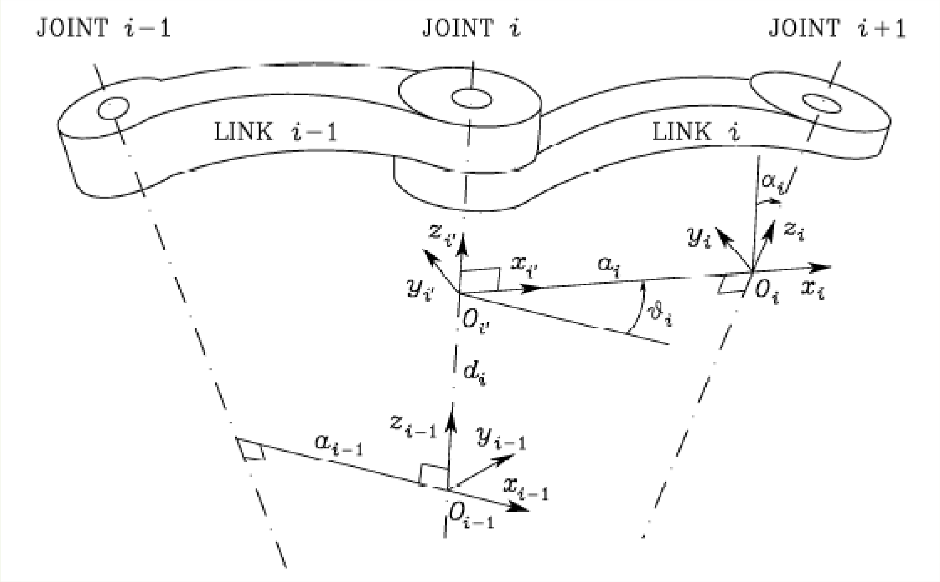
$$M_{i-1\,i} =$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Convention de DH
2.4. Application à un robot série : cas général

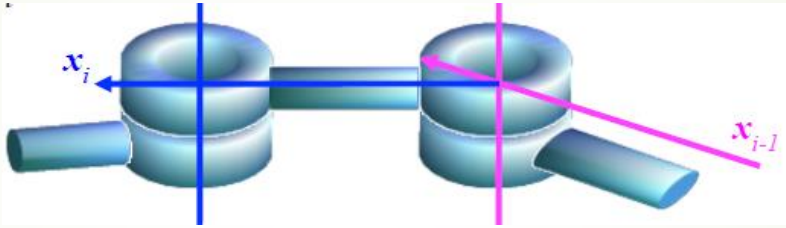
- Règle de positionnement du repère Ri :
  - ✓ L’axe z_i est confondu avec l’axe $n^\circ i + 1$ du robot.
  - ✓ L’axe x_i est perpendiculaire et coupe l’axe $n°i$.



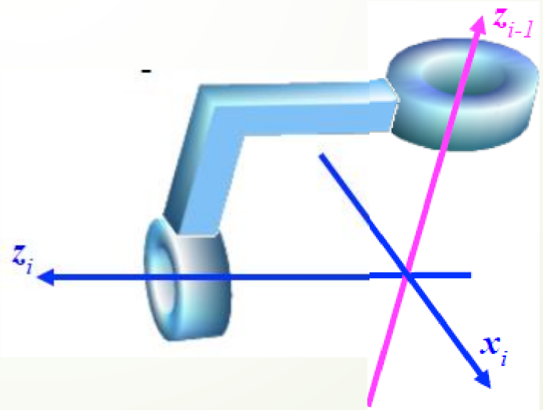
2. Convention de DH

2.4. Application à un robot série : cas particuliers

- **Les axes z_{i-1} et z_i sont parallèles**
  - Il y a une infinité de normales communes entre z_i et z_{i-1}. On fixe $d_i = 0$:



- **Les axes z_{i-1} et z_i se coupent**
  - Dans ce cas : $\boldsymbol{a_i = 0}$:



2. Convention de DH

2.4. Application à un robot série : cas particuliers

- **Choix du repère R_0**
  - L'origine du repère R_0 peut être choisie n'importe où le long de l'axe *1*.
  - L'axe $\boldsymbol{x}_0$ peut être choisi de manière quelconque.
- **Choix du repère R_n**
  - L'origine est en général placée au centre de l'outil (TCP).
  - Parfois on impose *y* dans le sens de la fermeture de la pince

- **Remarques**

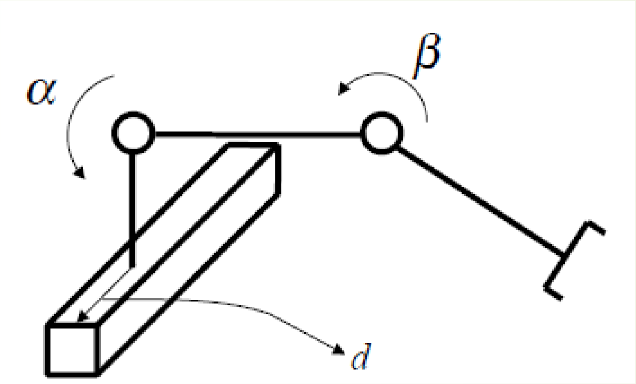
✓ Lorsqu'on a le choix et en l'absence de contrainte particulière, on privilégiera toujours la solution la plus simple (*i.e.* celle qui donne le plus de *0* dans le tableau de DH).

✓ Le sens des axes $\boldsymbol{z}$ respecte le sens positif d'évolution des coordonnées articulaires.

✓ Le choix des repères impose une configuration nulle du manipulateur (celle pour laquelle les coordonnées articulaires sont nulles). On peut en changer en imposant des offsets à θ ou d dans le tableau de DH.

2. Convention de DH
2.5. Exemple 1 : manipulateur plan

- a_1 : longueur du corps 1.
- a_2 : longueur du corps 2.
- a_3: longueur du corps 3.
- $d = \alpha = \beta = 0$: bras vertical.



Corps	a_i	α_i	d_i	θ_i
1				
2				
3				

$$M_{i-1\,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Modèle géométrique inverse
3.1. Définitions

- **Modèle géométrique direct (MGD)**
  - ✓ Le modèle géométrique direct est donc une fonction qui permet d’exprimer l’attitude de l’organe terminal en fonction des coordonnées articulaires.
  - ✓ Par exemple, lorsque l’attitude est exprimées à l’aide de 6 coordonnées :

$$p(q) = \begin{bmatrix} T_x(q) \\ T_y(q) \\ T_z(q) \\ \theta_r(q) \\ \theta_t(q) \\ \theta_l(q) \end{bmatrix} = G_d(q)$$

- **Modèle géométrique inverse (MGI)**
  - ✓ Soit *Gi* une fonction telle que :
  - ✓ La fonction *Gi* est appelée modèle géométrique inverse du robot.
- **Remarques :**
  - ❖ *Gi* dépend de la décomposition de la rotation.
  - ❖ Il existe souvent plusieurs solutions ***q*** pour une attitude ***p*** donnée de l'organe terminal.
  - ❖ *Gi* est définie uniquement à l'intérieur de l'espace de travail dextre du robot.
  - ❖ Il y a des points singuliers à l'intérieur de l'espace de travail du robot où *Gi* admet une infinité de solutions.

3. Modèle géométrique inverse

3.2. Exemple 1 : robot plan

- **Problème** :
  - ✓ Soit $\boldsymbol{p} = [T_x \;\; T_y \;\; T_z]^T$ les coordonnées de O_3 dans R_0
  - ✓ Trouver Gi telle que $\boldsymbol{q} = G_i\,(\boldsymbol{p})$ avec $\boldsymbol{q} = [d \; \alpha \; \beta]^T$