جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة غليزان
Université de Relizane

Commande de robots de manipulation

Chapitre II: Fondements théoriques et mathématiques préliminaires

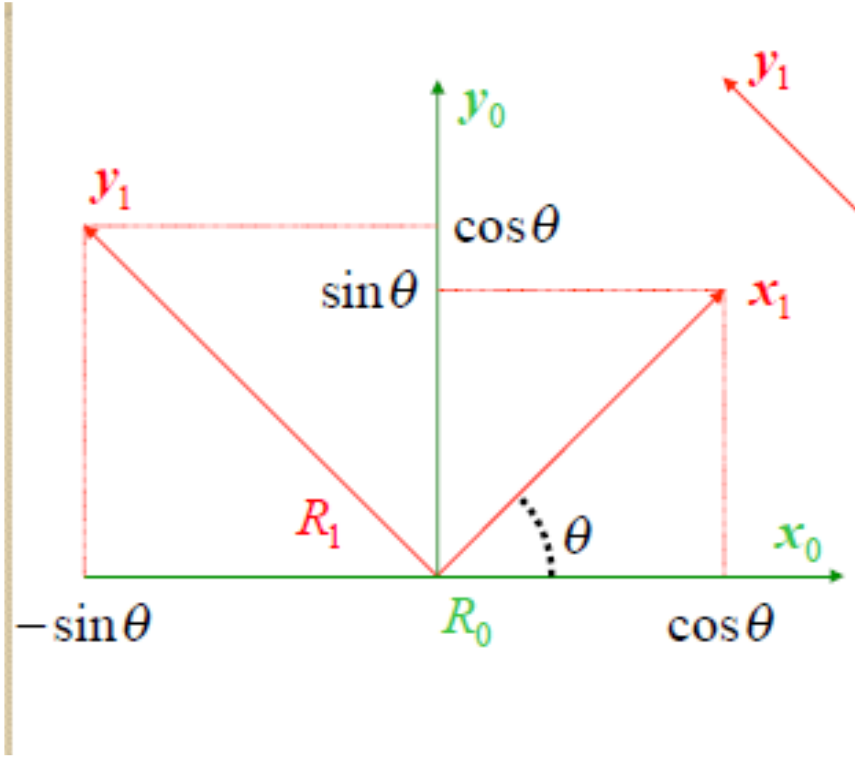
2021/2022

- 1. Positionnement
  - 1.1. Rotation
  - 1.2. Représentations de la rotation
  - 1.3. Attitude
  - 1.4. Les matrices de transformations homogènes
- 2. Cinématique
  - 2.1. Vitesse d'un solide
  - 2.2. Vecteur vitesse de rotation
  - 2.3. Mouvement rigide
  - 2.4. Torseur cinématique et composition de vitesses

I. Positionnement

I.1. Rotations : le cas 2D

- Représentation de la rotation :



$$R_{01} = \begin{pmatrix} {}^{0}x_1 & {}^{0}y_1 \\ \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

I. Positionnement
I.1. Rotations : le cas 2D

- Propriétés:

$$R_{01} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow det\{R_{01}\} = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow R_{01}^{-1} = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = R_{01}^{T} = R_{01}$$

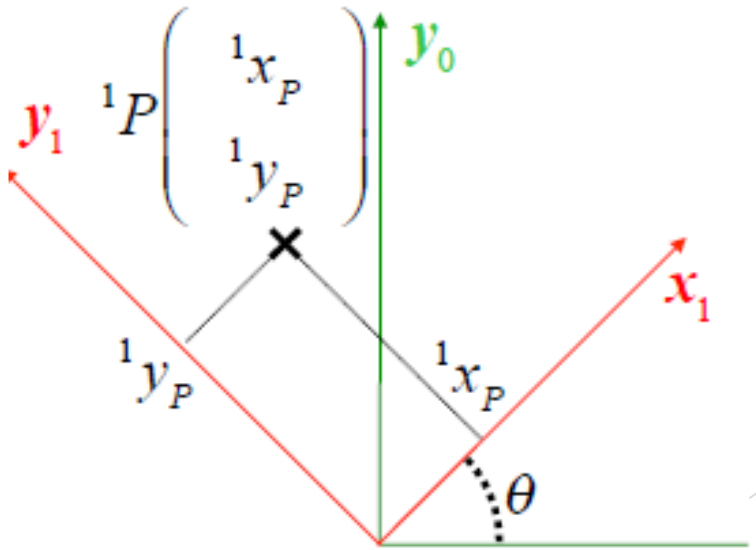
- Ce type de matrice $2x2$ appartient au groupe spécial orthogonal d'ordre *2* noté *SO(2)*

- Changement de repère :

$${}^1P \begin{pmatrix} {}^1x_P \\ {}^1y_P \end{pmatrix}$$

$${}^0P \begin{pmatrix} {}^0x_P = {}^1x_P cos\theta - {}^1y_P sin\theta \\ {}^0y_P = {}^1x_P sin\theta + {}^1y_p cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^0P = R_{01}\ {}^1P$$



I. Positionnement

I.1. Rotations : le cas 2D

- Opérateur de rotation :

$${}^0v' = {}^1\vec{v} = R_{10}\,{}^0\vec{v} = R_\theta\,{}^0\vec{v}$$

- Composition :

- Transformation de coordonnées :

$${}^1P = R_{12}\,{}^2P$$

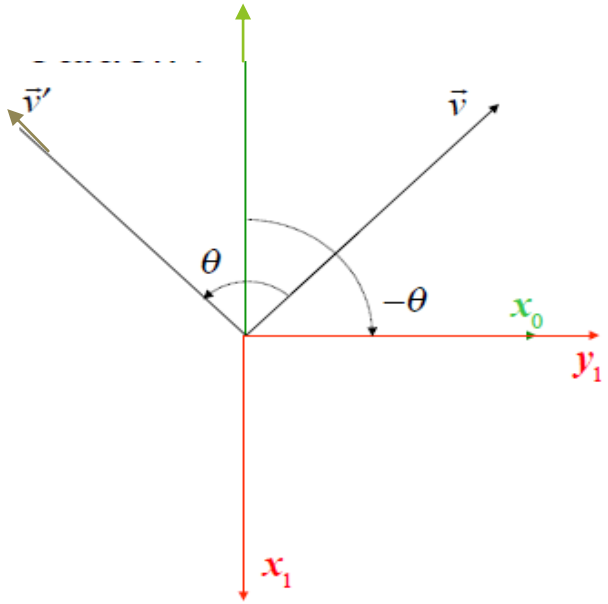
$${}^0P = R_{01}\,{}^1P$$

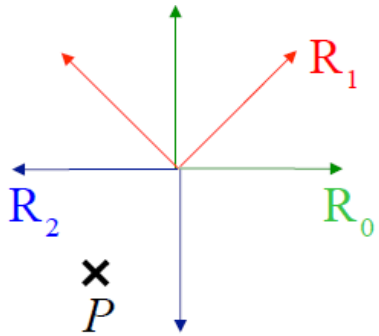
$$\Rightarrow {}^0P = R_{01}R_{12}\,{}^2P = R_{02}\,{}^2P$$

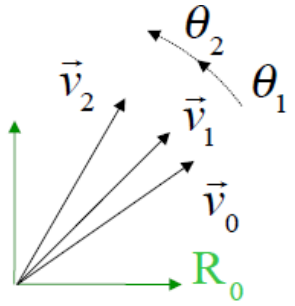
- Opérateur de rotation :

$$\vec{v}_1 = R_{\theta_1}\vec{v}_0 \qquad \vec{v}_2 = R_{\theta_2}\vec{v}_1$$

$$\rightarrow \vec{v}_2 = R_{\theta_2}R_{\theta_1}\vec{v}_0$$







I. Positionnement

I.1. Rotations : le cas 3D

- Positionnement :

$R_{01} = ({}^0x_1 \quad {}^0y_1 \quad {}^0z_1)$, $\det(R_{01}) = =1$

$R_{01}^{-1} = R_{01}^T = R_{01}$

$R_{01} \in SO(3)$

- Changement de repère :

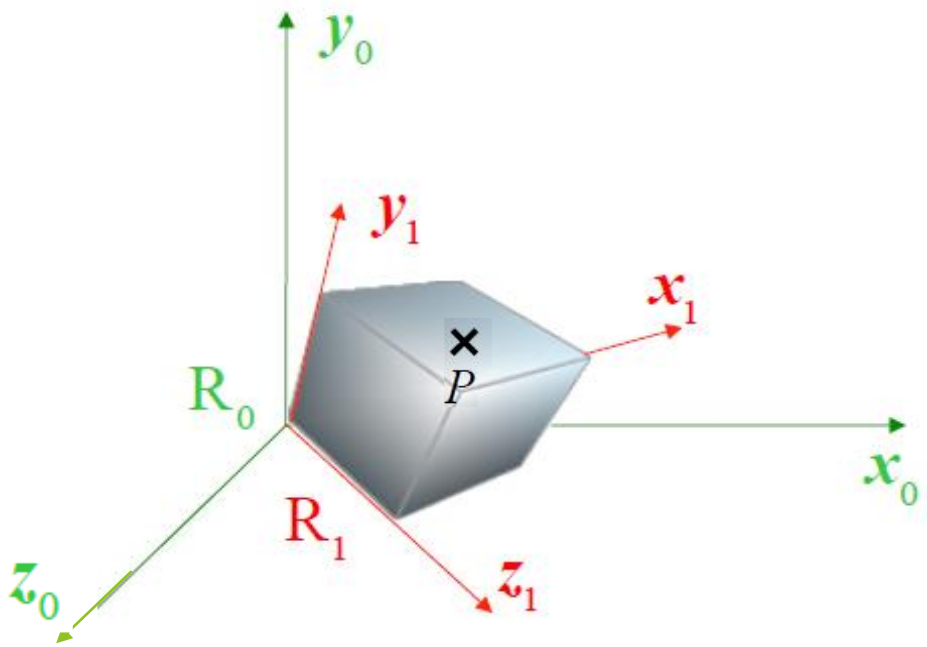
$${}^0P = R_{01}\,{}^1P$$

- Composition :

$${}^1P = R_{12}\,{}^2P$$

$${}^0P = R_{01}\,{}^1P$$

$$\Rightarrow {}^0P = R_{01}R_{12}\,{}^2P = R_{02}\,{}^2P$$



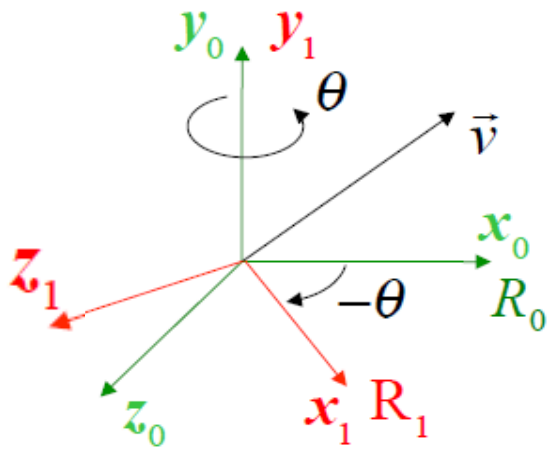
I. Positionnement
I.1. Rotations : le cas 3D

- Opérateur de rotation :
- Ex : rotation de ***v*** autour de ***y*** :

$$R_{(y_0,\theta)} = R_{10} = \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix}$$

($\cos\theta$ et $\sin\theta$: $c\theta$ et $s\theta$)

$${}^0\boldsymbol{v}' = R_{10}\,{}^0\boldsymbol{v} = R_{(y_0,\theta)}\,{}^0\boldsymbol{v}$$

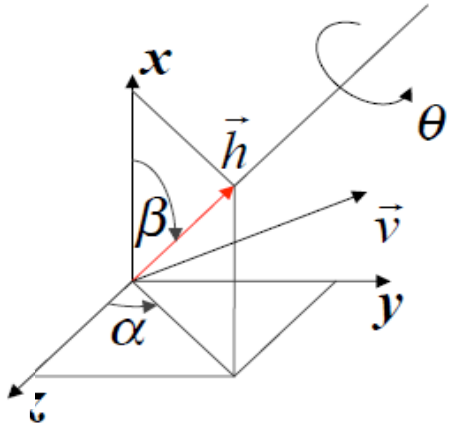


- Autres rotations élémentaires :

$$R_{(x_0,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{pmatrix} \qquad R_{(z_0,\theta)} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. Positionnement
I.1. Rotations : le cas 3D

- Opérateur de rotation : cas général
  - Rotation de ***v*** autour de ***h*** d'un angle θ :
  - Méthode :
    - Transformer ***v*** par une rotation qui amène ***h*** sur ***x***
    - Faire la rotation de ***θ*** autour de ***x***
    - Faire la transformation inverse pour ramener ***h*** à sa position initiale



$$R_{(\boldsymbol{h},\theta)} = R_{(\boldsymbol{x},\alpha)} R_{(\boldsymbol{y},\beta)} R_{(\boldsymbol{x},\theta)} R_{(\boldsymbol{y},-\beta)} R_{(\boldsymbol{x},-\alpha)}$$

- Avec

$$R_{(\boldsymbol{h},\theta)} = \begin{bmatrix} h_x^2 v_\theta + c\theta & h_x h_y v_\theta - h_z s\theta & h_x h_z v_\theta + h_y s\theta \\ h_x h_y v_\theta + h_z s\theta & h_y^2 v_\theta + c\theta & h_y h_z v_\theta - h_x s_\theta \\ h_x h_z v_\theta - h_y s\theta & h_y h_z v_\theta + h_x s\theta & h_z^2 v_\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

$$v_\theta = 1 - c_\theta \quad \boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}^T$$

I. Positionnement
I.1. Rotations : le cas 3D

- Propriétés :
  - Ortho-normalité :
    - La norme des vecteurs lignes et des vecteurs colonne est égale à *1*.
    - Les vecteurs ligne et les vecteurs colonne sont orthogonaux deux à deux.
  - L'inverse est égale à la transposée.
  - Le déterminant est égal à *1*.

$$R_{02} = R_{01}R_{12} \qquad R_{(\boldsymbol{h_1},\theta_1)(\boldsymbol{h_2},\theta_2)} = R_{(\boldsymbol{h_2},\theta_2)}R_{(\boldsymbol{h_1},\theta_1)}$$

- Pas commutatif : $R_{01}R_{12} \neq R_{12}R_{01}$

I. Positionnement
1.2. Représentations de la rotation : introduction

- Soit *R*, une matrice de rotation :
  - *R* comprend 9 termes
  - Il y a 6 relations indépendantes entre ces termes :

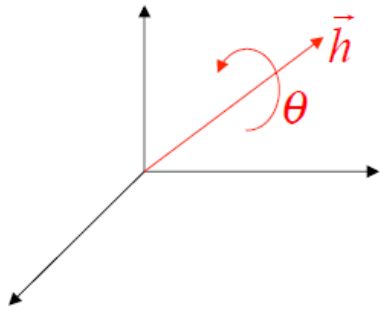
$$\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_y = 0 \quad \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_z = 0 \quad \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{r}_z = 0$$
$$\|\boldsymbol{r}_x\| = \|\boldsymbol{r}_y\| = \|\boldsymbol{r}_z\| = 1$$

    - ✓ Il n'y a donc que 3 termes indépendants.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_x & \boldsymbol{r}_y & \boldsymbol{r}_z \end{bmatrix}$$

- Paramétrage angle/axe :

• Toute rotation peut être représentée par un axe de rotation défini par un vecteur unitaire ***h*** autour duquel on effectue une rotation θ.



$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

- Le vecteur $\theta\boldsymbol{h}$ définit entièrement la rotation.

I. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : quaternions

- La rotation est parfois représentée par un quaternion unitaire :

✓ Soit : $\theta \boldsymbol{h} = \theta \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}^T$

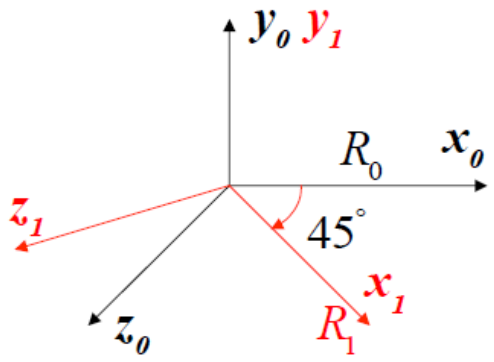
✓ Le quaternion $\boldsymbol{p}$ équivalent est défini par :

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}h_x & \sin\frac{\theta}{2}h_y & \sin\frac{\theta}{2}h_z \end{bmatrix}^T$$

✓ Avec : $\left\|\boldsymbol{p}\right\| = 1$

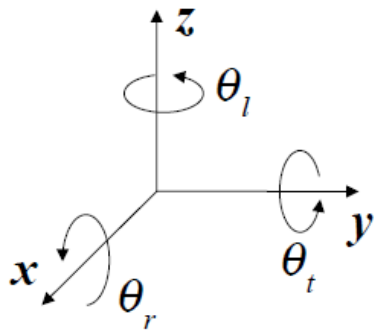
1.2. Représentations de la rotation : angle/axe, exercice

✓ Trouver le paramétrage angle/axe de la rotation entre les repères *R0* et *R1* :



1. Positionnement
1.2. Représentations de la rotation : roulis, tangage, lacet

- Définition :
  - 3 rotation successives autour des axes ***x*** (roulis, *roll*), ***y*** (tangage, *pitch*), et ***z*** (lacet, *yaw*) de R_0.



$$R_{01} = R_{(z,\theta_l)} R_{(y,\theta_t)} R_{(x,\theta_r)}$$

- ✓ Il existe des définitions alternatives des noms des axes et/ou de la rotation associée.
- Matrice de rotation :

$$R_{01} = \begin{bmatrix} c\theta_l & -s\theta_l & 0 \\ s\theta_l & c\theta_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_t & 0 & s\theta_t \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_t & 0 & c\theta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_r & -s\theta_r \\ 0 & s\theta_r & c\theta_r \end{bmatrix}$$

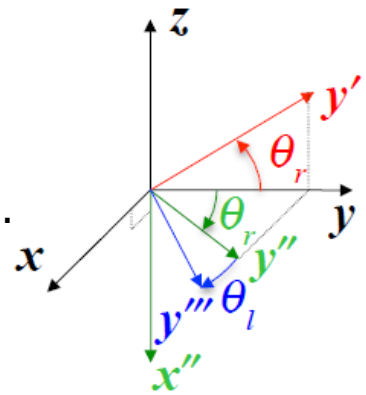
$$= \begin{bmatrix} c\theta_l c\theta_t & -s\theta_l c\theta_r + c\theta_l s\theta_t s\theta_r & s\theta_l s\theta_r + c\theta_l s\theta_t c\theta_r \\ s\theta_l c\theta_t & c\theta_l c\theta_r + s\theta_l s\theta_t s\theta_r & -c\theta_l s\theta_r + s\theta_l s\theta_t c\theta_r \\ -s\theta_t & c\theta_t s\theta_r & c\theta_t c\theta_r \end{bmatrix}$$

1. Positionnement
1.2. Représentations de la rotation : roulis, tangage, lacet

- Transformation inverse :
  - ✓ Trouver θ_r , θ_t , θ_l à partir des r_{ij} de la matrice R_{01} $\quad R_{01} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$
  - ✓ On définit $\theta_t = \arcsin(-r_{31})$
  - ✓ D'où :

$$\begin{cases} \theta_l = \arctan 2\left(\dfrac{r_{21}}{c\theta_t}; \dfrac{r_{11}}{c\theta_t}\right) \\ \theta_r = \arctan 2\left(\dfrac{r_{32}}{c\theta_t}; \dfrac{r_{33}}{c\theta_t}\right) \end{cases} \text{ pour } \cos\theta_t \neq 0$$

- Cas singulier : $\theta_t = \pm\dfrac{\pi}{2}$
  - ✓ Roulis et lacet ont le même effet. *Gimbal lock* en anglais.



$$\theta_t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_{12} = \sin(\theta_r - \theta_l) & r_{13} = \cos(\theta_r - \theta_l) \\ r_{22} = \cos(\theta_l - \theta_r) & r_{23} = \sin(\theta_l - \theta_r) \end{cases}$$

- ✓ On choisit $\theta_l = 0 \Rightarrow \theta_r = \arctan 2\left(r_{12}, r_{22}\right)$

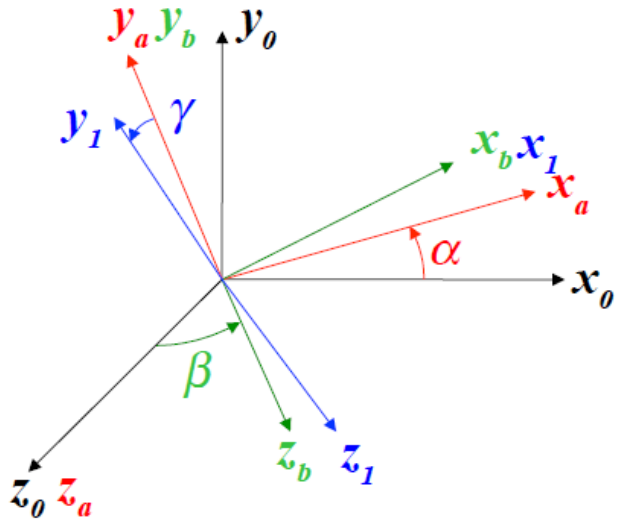
$$\theta_t = -\frac{\pi}{2} : \theta_l = 0 \Rightarrow \theta_r = -\arctan 2\left(r_{12}, r_{22}\right)$$

11. Positionnement
1.2. Représentations de la rotation : angles d'Euler

- Principe :
  - Faire trois rotations successives d'angle α, β, γ autour des axes ***z***, ***y*** et ***x*** du repère courant.

- Matrice de rotation :

$$R_{01} = R_{0a} R_{ab} R_{b1} \text{ avec } R_{0a} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_{ab} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \quad R_{b1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

- d'où : $R_{01} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$

11. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : angles d'Euler

- Transformation inverse :

$$R_{01} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

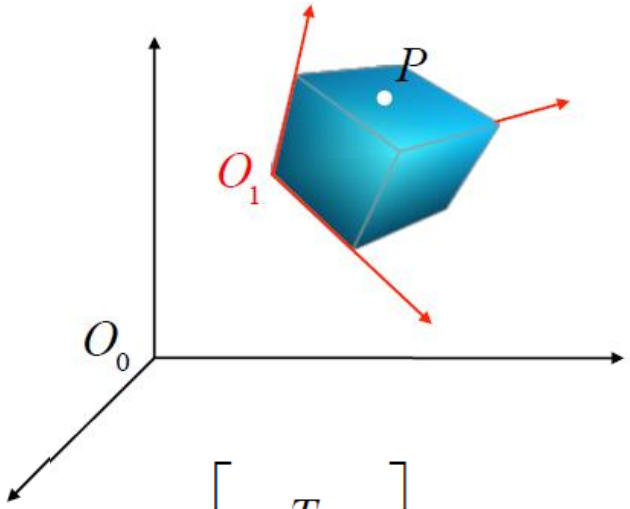
$$\left.\begin{aligned} \beta &= \arcsin(-r_{31}) \\ \alpha &= \arctan 2\left(\frac{r_{21}}{\cos\beta}\,;\frac{r_{11}}{\cos\beta}\right) \\ \gamma &= \arctan 2\left(\frac{r_{32}}{\cos\beta}\,;\frac{r_{33}}{\cos\beta}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } \beta \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} : \alpha = 0 \quad \gamma = \arctan 2(r_{12}, r_{22})$$

$$\beta = -\frac{\pi}{2} : \alpha = 0 \quad \gamma = -\arctan 2(r_{12}, r_{22})$$

11. Positionnement
1.3. Attitude : définition

- L'attitude du repère R_1 par rapport au repère R_0 est définie par la translation des origines et par la rotation $R_{01} : \left(\overrightarrow{O_0O_1}, R_{01}\right)$



- Représentation

Une attitude *p* (*pose* en anglais) est définie de manière minimale par 6 paramètres :

3 pour la translation et 3 pour la rotation :

$$p = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

3 coordonnées de translation

3 coordonnées de rotation :
Angles d'Euler, angle/axe, …

11. Positionnement

1.3. Attitude : Représentation

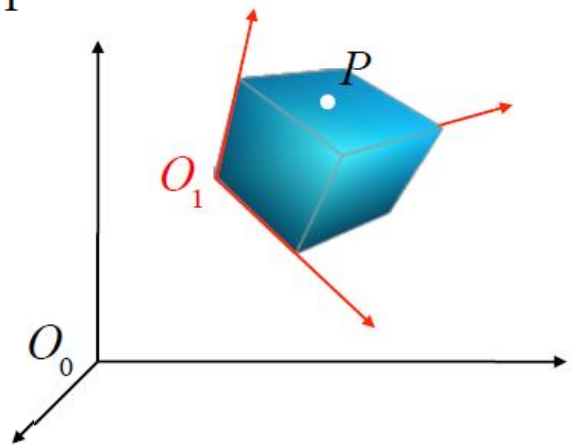
- Une attitude peut aussi être représentée par une matrice homogène.
  - La matrice homogène est aussi :
    - Un opérateur de changement de repère
    - Un opérateur de transformation rigide

✓ *Matrice homogène de transformation entre le repère R0 et le repère R1*

$$M_{01} = \begin{bmatrix} R_{01} & {}^{0}(O_0O_1) \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4. Matrices homogènes : changement de repère

- On a : ${}^{0}P = {}^{0}(O_0O_1) + R_{01}\,{}^{1}P$



Coordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} {}^{0}P \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{01} & {}^{0}(O_0O_1) \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_{01}} \begin{bmatrix} {}^{1}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

11. Positionnement

1.4. Matrices homogènes : transformation rigide

- La matrice homogène est un opérateur de transformation rigide
- Un opérateur de transformation rigide appliqué à tous les points d'un solide ne déforme pas ce solide
- La matrice homogène applique une transformation équivalente à la composition d'une translation et d'une rotation

1.4. Matrices homogènes : propriétés

- Composition :

Opérateur de changement de repère de coordonnées de points de R_2 vers R_0

$$M_{02} = M_{01} M_{12}$$

- Inverse :

$$M = \begin{bmatrix} R & T \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- *Pas commutatif !*

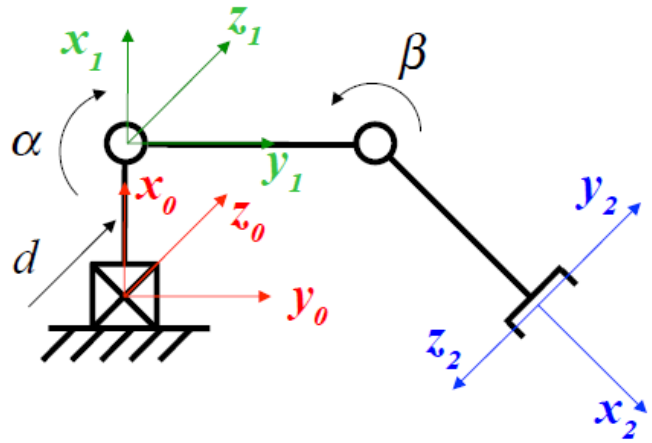
11. Positionnement

1.4. Matrices homogènes :

- Soit le robot :

$$\alpha = \measuredangle(y_0, y_1)$$

$$\beta = \measuredangle(y_1, x_2)$$



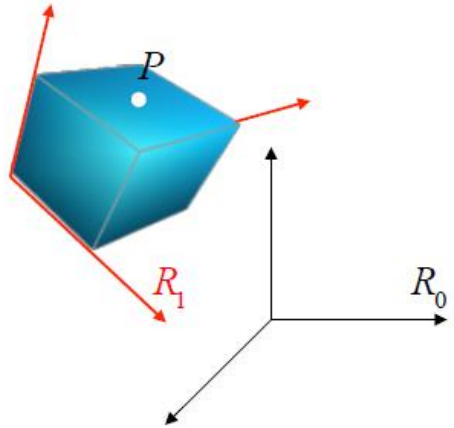
d = translation suivant z_0

- Avec :
  - a_1 la distance entre l'origine de R_0 et celle de R_1
  - a_2 la longueur du premier bras
  - a_3 la longueur du dernier bras
  - Les angles sont nuls lorsque le bras est horizontal
- Déterminer M_{01} , M_{12} puis M_{02}.

2. Cinématique

2.1. Vitesse d'un solide : introduction

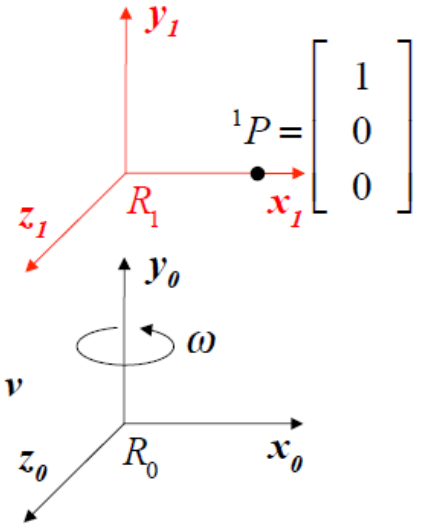
- Soient :
  - ✓ R_1 un repère lié à un solide en mouvement par rapport à un repère R_0.
  - ✓ M01(t) la matrice homogène de transformation entre R0 et R1 en fonction du temps.



$$\begin{bmatrix} {}^0P(t) \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01}(t)\begin{bmatrix} {}^1P \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} {}^0\dot{P}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{M}_{01}(t)\begin{bmatrix} {}^1P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{01}(t) = \begin{bmatrix} R_{01}(t) & T_{01}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^0\dot{P}(t) = \dot{R}_{01}(t)\,{}^1P + \dot{T}_{01}(t) \quad (2.1)$$

Vitesse de translation de O_1 dans R_0



$$^1P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemple:

- ✓ Soient :P un point d'un solide lié à R1 en mouvement par rapport à R0;
- ✓ Le mouvement est la composition d'une translation verticale de vitesse v et d'une rotation d'axe y0 et de vitesse ω .
- ❖ Pour t=0 on a R1=R0 .

2. Cinématique

2.1. Vitesse d'un solide : exemple

- On a :

$$R_{01}(t)=\begin{bmatrix} c(\omega t) & 0 & s(\omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\omega t & 0 & c\omega t \end{bmatrix} \quad T_{01}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ vt \\ 0 \end{bmatrix}$$

- D'où :

$$^{0}\dot{P}(t)=\begin{bmatrix} -\omega s(\omega t) & 0 & \omega c(\omega t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega c(\omega t) & 0 & -\omega s(\omega t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\omega s(\omega t) \\ v \\ -\omega c(\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{0}\dot{P}(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ v \\ -\omega \end{bmatrix}$$

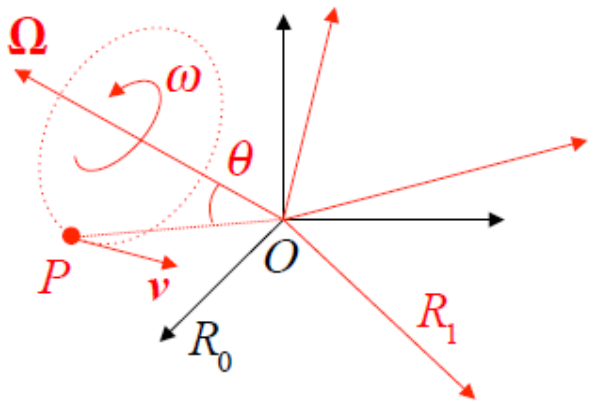
2. Cinématique
2.2. Vecteur vitesse de rotation : définition

- C’est un vecteur dont l’axe coïncide avec l’axe de rotation, qui est dirigé suivant le « principe du tire-bouchon » et dont la norme est égale à la valeur de la vitesse angulaire.
- **Note :** *Dans l’exemple précédent, le vecteur vitesse de rotation de R1 par rapport à R0 est dirigé suivant y0 et a pour norme* ω.

2. Cinématique
2.2. Vecteur vitesse de rotation : application

- **Application :**

✓ Trouver la vitesse du point P lié au repère R1 qui tourne suivant un vecteur v vitesse de rotation Ω par rapport à R0



✓ On a : $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{\Omega}\| \cdot \|\overrightarrow{OP}\| \cdot \sin\theta$

✓ De plus : $\boldsymbol{v} \perp \left(\overrightarrow{OP}, \boldsymbol{\Omega}\right)$

✓ Et le sens de v est celui de la règle des 3 doigts.

D'où : $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OP}$

$$ {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{P} = {}^{0}\boldsymbol{\Omega} \times {}^{0}(\boldsymbol{OP}) \quad (2.2) $$

Vitesse de P dans le mouvement de R_1 par rapport à R_0 exprimé dans R_0

2. Cinématique
2.2. Vecteur vitesse de rotation : matrice anti-symétrique

- ✓ On définit :
  - Les vecteurs : $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T$
  - La matrice *AS(.)* : $AS(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$
  - D'où : $$AS(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_y v_z - a_z v_y \\ a_z v_x - a_x v_z \\ a_x v_y - a_y v_x \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} \Rightarrow \boxed{{}^0\boldsymbol{v}_{01}^P = AS({}^0\boldsymbol{\Omega}) R_{01} {}^1P} \quad (2.3)$$

2. Cinématique
2.3. Mouvement rigide

- Le repère *R1* se déplace par rapport à *R0* en translation et en rotation : on parle de mouvement rigide. Eq. (2.3) devient :

$$ {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{P} = AS({}^{0}\boldsymbol{\Omega}) R_{01} {}^{1}P + {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{O_1} \quad (2.4) $$

Vitesse de l'origine de R1

- ✓ Si on compare (2.4) et (2.1) : $AS({}^{0}\boldsymbol{\Omega}) R_{01} = \frac{d}{dt} R_{01}$

2.4. Torseur cinématique

- ✓ En robotique, on a l'habitude de définir le torseur cinématique de la manière suivante :

$$ {}^{0}\boldsymbol{C}_{01} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{O_1} \\ {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{01} \end{bmatrix} $$

Vecteur 6×1 *des coordonnées de vitesse linéaire et angulaire de* R_1 *par rapport à* R_0 *exprimées dans* R_0

2. Cinématique
2.5. Composition des vitesses

- Soient :
  - ${}^{0}C_{O1}$ le torseur cinématique de R_1 par rapport à R_0.
  - ${}^{1}C_{12}$ le torseur cinématique de R_2 par rapport à R_1.
- Loi de composition :

$$ {}^{0}\boldsymbol{C}_{02} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{01} + {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{12} = {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{02} \\ {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{O_2} + {}^{0}\boldsymbol{v}_{12}^{O_2} = {}^{0}\boldsymbol{v}_{02}^{O_2} \end{bmatrix} $$

Vitesse de O_2 dans le mouvement de 1 par rapport à 0 en figeant le mouvement de 2 par rapport à 1.