SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES

Chapitre 3 :Commandabilité et Observabilité

Plan de cour

- Introduction,
- Critère de commandabilité de Kalman,
- Commandabilité de la sortie,
- Critère d’observabilité,
- Dualité entre la commandabilité et l’observabilité,
- Etude de quelques formes canoniques.

Introduction

- En effet, l'utilisation de la représentation d'état suscite deux questions importantes :

  - ✓ Est-ce que pour tout couple $x_0 = x(t_0)\ et\ x_1 = x(t_1)$, il existe un vecteur de commande $u(t)$ défini sur l'intervalle$[t_0, t_1]$ permettant de passer de l'état x_0 à l'état x_1, c'est le problème de commandabilité du système.

  - ✓ Est-ce que la connaissance de $y(t)$ et de $u(t)$ sur l'intervalle$[t_0, t_1]$ permet d'obtenir $x_0 = x(t_0)$, c'est le problème d'observabilité du système.

- Ces deux propriétés sont nécessaires que ce soit pour la commande où il faudra que le système soit commandable, ou pour la synthèse d'observateur où il faudra que le système soit observable. Pour cela, il sera nécessaire de partir d'une représentation d'état minimale (commandable et observable) en éliminant (du modèle) les parties non commandables et non observables à la condition impérative que celles-ci soient asymptotiquement stables.

Critère de commandabilité de Kalman

2.1 Commandabilité

- Un système décrit par un modèle d'état est dit *commandable* si pour tout état x_f du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état initial x_0 à l'état x_f en un temps fini. Un système est dit *complètement commandable* s'il est commandable à tout point de l'espace d'état.

- ***Théorème 1 :*** Un système linéaire est complètement commandable si et seulement si : $rang[Q_c] = n$, c-à-d, Q_c est régulière où n est l'ordre du système (nombre de variables d'état) et

$$Q_c = [B \; AB \; A^2B \; \ldots \; A^{n-1}B]$$

est dite matrice de commandabilité.

Exemple :

Critère de commandabilité de Kalman

2.2 Observabilité

- On dit qu'un état $x(t_0)$ est *observable*, s'il peut être identifié à partir de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps fini $[t_0, t_1]$. Le système est dit *complètement observable* si $\forall\, X(t_0) \in$ *à l'espace d'état*, il est possible de restituer ou identifier sa valeur à partir de la seule connaissance de $u(t)$ et $y(t)$.

Théorème 2 : Un système linéaire est complètement observable si et seulement si : $rang[Q_o] = n$, c-à-d, Q_o est régulière, où n est l'ordre du système (nombre de variables d'état) et

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$ est dite matrice d'observabilité.

Exemple

2.3 Commandabilité/observabilité et fonction de transfert

- Dans cette partie, on montre la relation entre la fonction de transfert et ces deux propriétés (commandabilité et observabilité) à travers un exemple. Soit un système d'ordre 4 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}}_{\dot{X}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}}_{X}+\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1&0\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}}_{X}$$

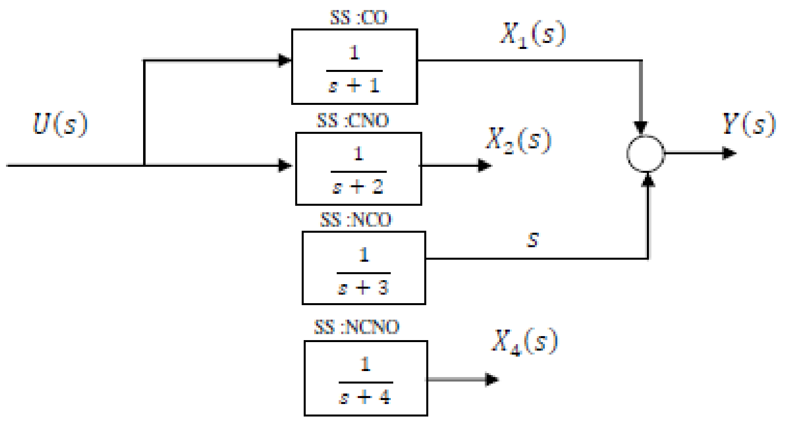
- A est diagonale, donc :
- La variable d'état $x1$: est commandable et observable (CO)
- La variable d'état $x2$: est commandable et non observable (CNO)
- La variable d'état $x3$: est non commandable et observable (NCO)
- La variable d'état $x4$: est non commandable et non observable (NCNO)

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+u(t) &&\Rightarrow X_1(s)=U(s)/(s+1)\\
&\dot{x}_2(t)=-2x_2(t)+u(t) &&\Rightarrow X_2(s)=U(s)/(s+2)\\
&\dot{x}_3(t)=-3x_3(t) &&\Rightarrow X_3(s)(s+3)=0\\
&\dot{x}_4(t)=-3x_4(t) &&\Rightarrow X_4(s)(s+4)=0\\
&y(t)=x_1(t)+\ x_3(t) &&\Rightarrow U(s)=x_1(s)+\ x_3(s)
\end{aligned}$$

Critère de commandabilité de Kalman

2.3 Commandabilité/observabilité et fonction de transfert

- ✓ Le système peut être décomposé en quatre sous-systèmes (CO,CNO, NCO,NCNO) comme :



- ✓ On calcule la fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

- ✓ Cependant, d’après la représentation d’état ce système est d’ordre 4, donc, on peut écrire :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

2.4 Formes canoniques pour les systèmes monovariables

- ✓ Soit la fonction de transfert d'un système donné, le système est supposé commandable et observable, donc, la fonction de transfert n'admet pas de pôles et zéros communs.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad n \geq m$$

2.4.1 Forme compagne de commandabilité

- ✓ En effet, si le système est commandable, on peut le mettre sous une forme d'état dite *forme compagne de commandabilité*.

$$G(s) = \frac{V(s)Y(s)}{U(s)V(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0}$$

- ✓ la forme compagne commandable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_0 \; b_1 \dots b_m \; 0 \dots \; 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.4 Formes canoniques pour les systèmes monovariables
2.4.2 Forme compagne d'observabilité

- ✓ Si le système est observable, on peut le mettre sous une forme d'état dite *forme compagne d'observabilité*.

- ✓ On divise le numé $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad n \geq m$ nsfert par s_n.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{m-n} + b_{m-1} s^{m-n-1} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- ✓ la forme compagne observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ \ 0 \ldots 0 \ \ 0 \ \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.5.4 *Concept de dualité*

- Il existe une analogie entre les formes compagne commandable et compagne observable, cette analogie est liée à la notion de *dualité*. On appellera systèmes duaux deux systèmes définis respectivement par les équations :

Système S	Système S^*
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $y(t) = Cx(t)$	$\dot{x}^*(t) = A^T x^*(t) + C^T u(t)$ $y^*(t) = B^T x^*(t)$

- Ces systèmes sont tels que :

 Si S est commandable, alors S_* est observable.

 Si S est observable, S_*est commandable.

Il est donc possible de tester l'observabilité d'un système en vérifiant la commandabilité de système dual.

3. Cas des systèmes multivariables

3.1 Commandabilité

- Soit un système multi-variable linéaire représenté par le modèle d'état suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

✓ avec : $u(t) \in R^m, y(t) \in R^p$ $A(nxn), B(nxm), C(pxn)$ et $D(pxm)$

- Suivant le critère de commandabilité de Kalman, le système est commandable si et seulement si $rang[Q_c] = n. Qc = [B\ AB\ A^2B\ \ldots A^{n-1}\ B]$

On a : $B = [b_1 \ldots b_m]$ $Q_c = [|b_1\ b_2 \ldots b_m||Ab_1Ab_2 \ldots Ab_m||A^2b_1\ A^2b_2 \ldots\ A^2b_m| \ldots |A^{n-1}b_m\ A^{n-1}b_m \ldots\ A^{n-1}b_m|]$

- Dans un système multi-entrées $(m > 1)$, la matrice Q_c n'est pas carrée $(Q_c((n)x(nxm))$, et pour que le système soit commandable, il faudra trouver n vecteurs linéarement indépendants dans Q_c en utilisant la méthode suivante (méthode d'indice de commandabilité).

Indice commandabilité

- ✓ L'indice de commandabilité (IC) n_i relatif à l'entrée u_i est le nombre d'états que l'on peut commander par la seule entrée u_i.

a. Choix par lignes

1- On construit le tableau suivant :

b_1	b_2	b_3	...	b_m	
X	X	X	...	X	A^0
X	0	X	...	X	A^1
0		0	...	X	
			⋮		
			...		A^{n-1}

2- On remplit le tableau ligne par ligne,

3- On indique les vecteurs linéairement indépendants en mettant une croix (X) dans leurs cellules correspondantes

4- Une fois un vecteur linéairement dépondant aux vecteurs précédents est trouvé, on met dans sa cellule un zéro (0). Toutes les cellules se trouvant au-dessous de cette cellule sont laissées vides car les vecteurs correspondants sont aussi linéairement dépendants.

5- On arrête la procédure dès qu'on trouve n vecteurs linéairement indépendants (n croix dans le tableau).

6- L'indice de commandabilité n_i relatif à l'entrée u_i est égal au nombre de croix (X) dans la colonne b

b. Choix par colonnes

- ✓ Dans ce cas on remplit le tableau colonne par colonne en suivant la même procédure.

Indice commandabilité

Critère de commandabilité des systèmes multivariables

- On calcule les indices de commandabilité n_i, $(i = 1 \dots m)$.

- Le système est dit commandable si $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.

- Dans ce cas, la matrice de commandabilité Q_c se reduit à la matrice carrée réguière suivante :

$$Q_c = [|b_1\ Ab_1 \dots A^{n_1-1}b_1||b_2\ Ab_2 \dots A^{n_2-1}b_1| \dots |b_m\ Ab_m \dots A^{n_m-1}b_m|]$$

- On peut décomposer le système en m sous-systèmes chacun d'ordre n_i commandable par u_i.

Critère d'observabilité des systèmes multivariables

- On calcule les indices d'observabilité τ_i, $(i = 1 \dots p)$.

- Le système est dit observable si $\sum_{i=1}^{p} \tau_i = n$.

- Dans ce cas, la matrice d'observabilité Q_o se reduit à la matrice carrée régulière suivante :

$$Q_o = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1A \\ \vdots \\ c_1A^{\tau_1-1} \\ c_2 \\ c_2A \\ \vdots \\ c_2A^{\tau_2-1} \\ \vdots \\ c_p \\ c_pA \\ \vdots \\ c_pA^{\tau_p-1} \end{bmatrix}$$