

Résistance normale à la flexion, suite

Flexion a l'ELU de résistance :

1. Généralités

La vérification d'une pièce en B.P à l'ELU se fait pour éviter son effondrement soit par écrasement du béton ou par plastification des aciers actifs ou passifs. La traction du béton n'étant pas limitée du fait que la section du béton tracté est négligée.

Les hypothèses de calcul à l'ELU sont :

- conservation de la planéité des sections droites ;
- non-intervention du béton tendu ;
- non-glissement entre les armatures et le béton.

2. Equilibre d'une section à l'ELU

Prenons l'exemple de la section médiane d'une poutre isostatique soumise à un moment fléchissant positif. Cette section résiste par son béton comprimé sur une hauteur y (figure 01) et par ses aciers (actifs et passifs) tendus à :

- σ_p pour les armatures de précontrainte ;
- σ_s pour les armatures passives.

σ_p se décompose en trois termes :

- σ_{pm} contrainte probable à vide ;
- $\Delta'\sigma_p$ premier complément de contrainte accompagnant le retour à 0 de la déformation du béton adjacent ;
- $\Delta''\sigma_p$ deuxième complément de contrainte jusqu'à l'épuisement de la résistance de la section.

Ces contraintes σ_p , σ_s et σ_b équilibrent le moment M_{uext} développé par les charges extérieures.

$$Sys \{M_{ext}\} \sim Sys \{\sigma_b dB, -A_p (\sigma_{pm} + \Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), -A_s \sigma_s\}$$

La relation d'équivalence précédente s'écrit encore :

$$Sys \{M_{ext}, A_p \sigma_{pm}\} \sim Sys \{\sigma_b dB, -A_p (\Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), -A_s \sigma_s\}$$

Soit:

$$Sys \{M_{ext}, P_m\} \sim Sys \{\sigma_b dB, -A_p (\Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), -A_s \sigma_s\}$$

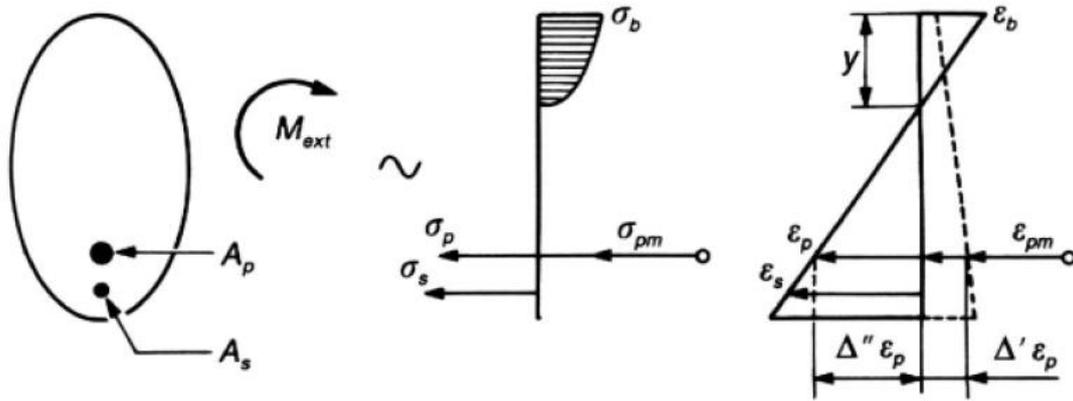


Fig. Contraintes et déformations dans une section à l'ELU

Dans la relation précédente, la précontrainte P_m est passée du côté sollicitant (figure 1), les aciers de précontrainte n'intervenant plus que par leur surtension $\Delta\sigma_p = \Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p$ dans la résistance de la section.

C'est cette formulation (équations précédentes) qui sert de base aux justifications réglementaires du fait que la précontrainte P_m est considérée comme une action.

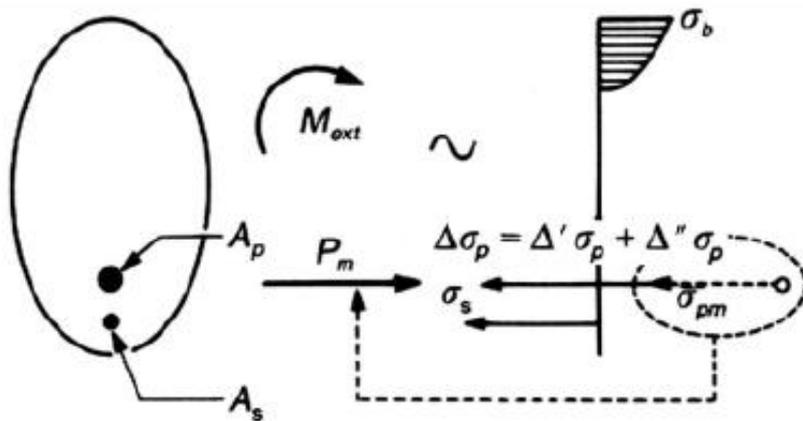


Fig. 1 Equilibre d'une section à l'ELU selon la formulation précédente

Dans la pratique, ϵ_{pm} et $\Delta'\epsilon_p$ se situent dans le domaine élastique des aciers et qu'en conséquence :

$$\epsilon_{pm} = \frac{\sigma_{pm}}{E_p}$$

$$\Delta'\epsilon_p = \frac{\Delta'\sigma_p}{E_p} = \epsilon_{bpm} = \frac{\sigma_{bpm}}{E_b}$$

Avec σ_{bpm} contrainte du béton en phase d'exploitation, à vide, au niveau des armatures de précontrainte, calculée en prenant en compte la valeur probable de la précontrainte, et ϵ_{bpm} le raccourcissement correspondant du béton. On peut prendre (Art. 6,3,31 du BPEL 91)

$$E_p = 5 E_b$$

En remplaçant les équations précédentes, il en résulte : $\Delta'\epsilon_p = 5 \frac{\sigma_{bpm}}{E_p}$

En revanche $\Delta''\varepsilon_p$ se situe presque toujours dans le domaine plastique (figure 02).

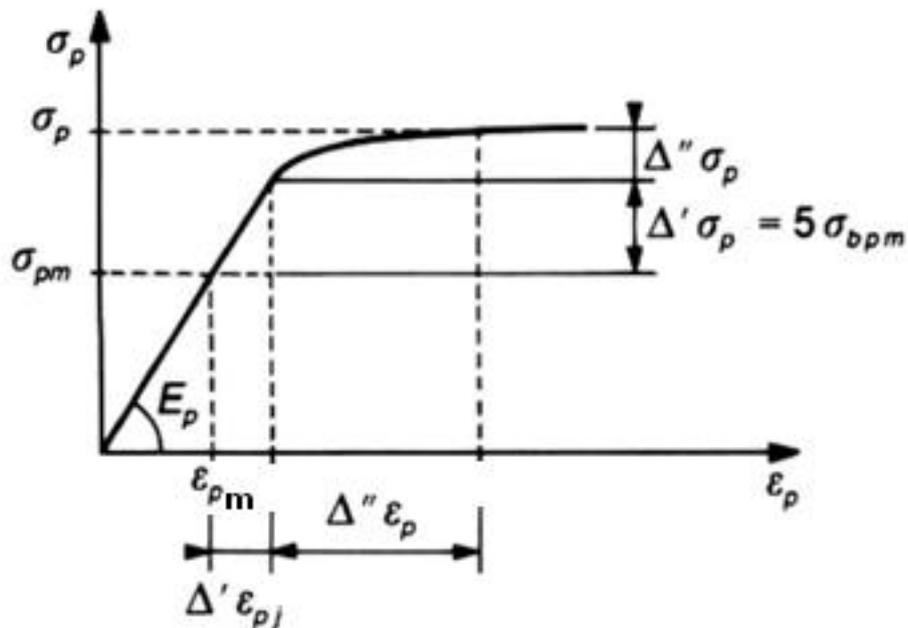


Fig. 02 Diagramme contrainte- déformation d'une armature de précontrainte

3. Caractérisation d'un état-limite ultime

Physiquement, un état-limite ultime se caractérise par le fait que l'un au moins des matériaux constitutifs de la section atteint sa déformation ultime. Réglementairement, on admet, de façon conventionnelle, qu'un ELU est atteint lorsque le diagramme des déformations est un diagramme limite passant par un des pivots A, B, C (ou encore A', B', ou C') (figure 03).

- Les pivots A ou A' correspondent, pour les aciers, à un des allongements ou à des variations d'allongements ultimes estimés à

$$\varepsilon_{su} = 10 \times 10^{-3}$$

- Les pivots B ou B' correspondent, pour le béton, à un raccourcissement ultime

$$\varepsilon_{bu} = 3.5 \times 10^{-3}$$

- Les pivots B ou B' correspondent, pour le béton, à un raccourcissement ultime
- Les pivots C ou C', quant à eux, situés à $3h/7$ de la fibre la plus comprimée permet de tenir compte du fait que, lorsqu'une pièce périt tout en étant partout comprimée, les raccourcissements qu'on y mesure sont sensiblement plus faibles et sont voisins de la valeur ; $\varepsilon_{bu} = 2 \times 10^{-3}$

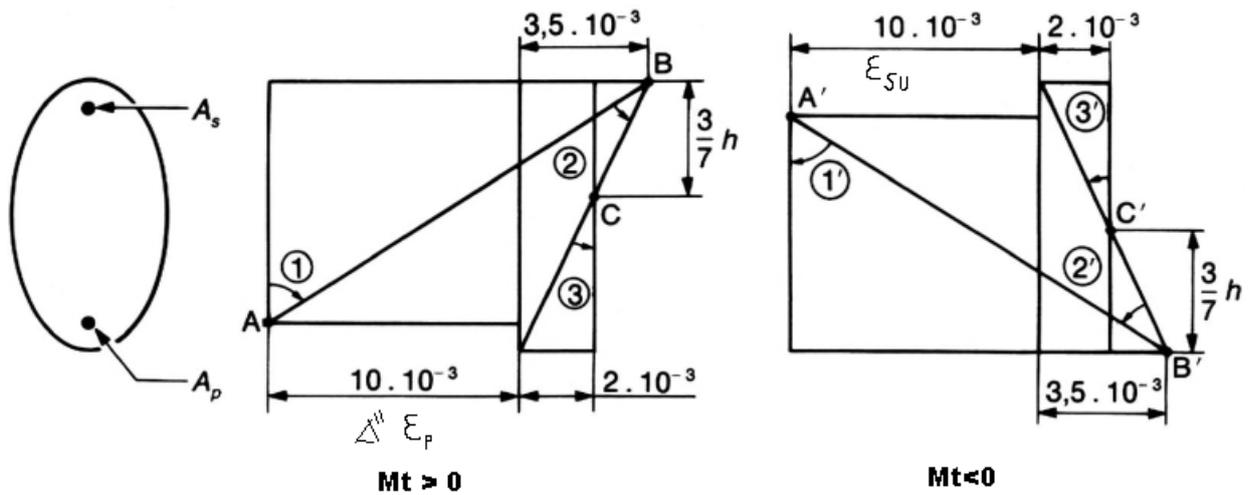


Fig. 03 Règle des 3 pivots

Les lois de comportement des matériaux, qui relient les contraintes aux déformations à l'ELU, sont illustrées dans la figure 04. Pour les armatures de précontrainte, on a ;

$$\text{si } \sigma_p \leq 0.9 \frac{f_{peE}}{1.15}, \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p}$$

$$\text{si } \sigma_p > 0.9 \frac{f_{peE}}{1.15}, \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left(1.15 \frac{\sigma_p}{f_{peE}} - 0.9 \right)^5$$

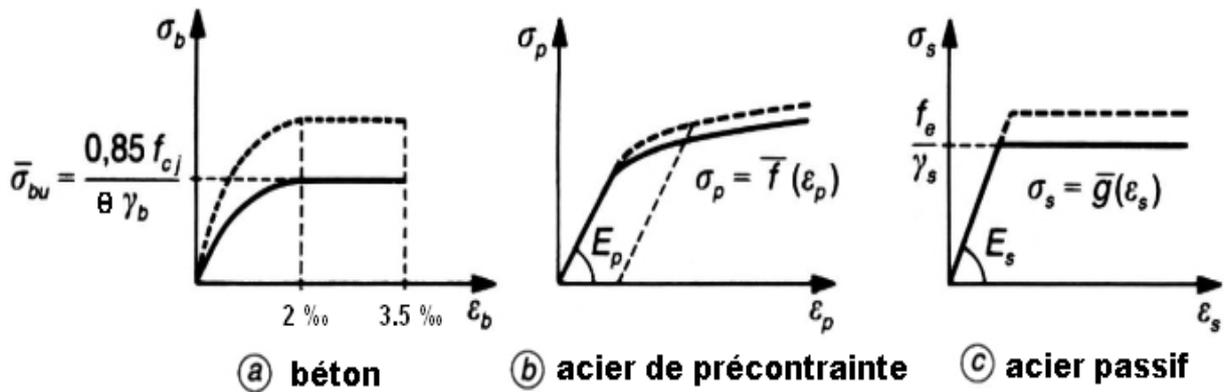


Fig. 04 Diagrammes contraintes-Déformations de calcul à l'ELU

4. Principe des justifications

Dans la flexion simple à l'état-limite ultime, la section transversale est soumise selon la formulation (101) et la figure (101) aux deux efforts

$$N_u = \gamma_p P_m$$

$$M_u = 1.35 M_{Gmax} + M_{Gmin} + \gamma_{Q1} Q_{1k} + \sum_{i>1} 1.3 \Psi_{0i} Q_{ik}$$

N_u et M_u étant respectivement l'effort normal et le moment fléchissant à l'ELU par rapport au point d'application A_p de la précontrainte.

En général, il y a lieu de vérifier avec les deux sollicitations : $M_{u\max}$ et $M_{u\min}$.

À titre d'exemple simple, prenons le cas de la section médiane de la poutre représentée à la figure 05. Supposons que cette poutre soit soumise :

- À une charge permanente uniforme g , donnant un moment positif dans la section médiane ;
- A une charge variable d'exploitation uniforme q .

La figure 05 définit les deux cas de charges extrêmes à considérer pour la justification de la section médiane. Les sollicitations de calcul correspondantes s'écrivent

$$S_{max} \begin{cases} N_u = \gamma_p P_m \\ M_{u\max} = 1.35M_g + 1.5M_q^+ \end{cases}$$

$$S_{min} \begin{cases} N_u = \gamma_p P_m \\ M_{u\min} = M_g + 1.5M_q^- \end{cases}$$

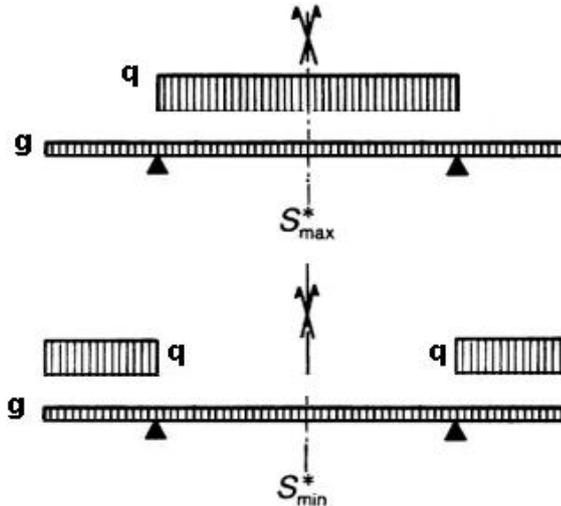


Fig. 05 Exemple de moments extrêmes dans la section médiane d'une poutre

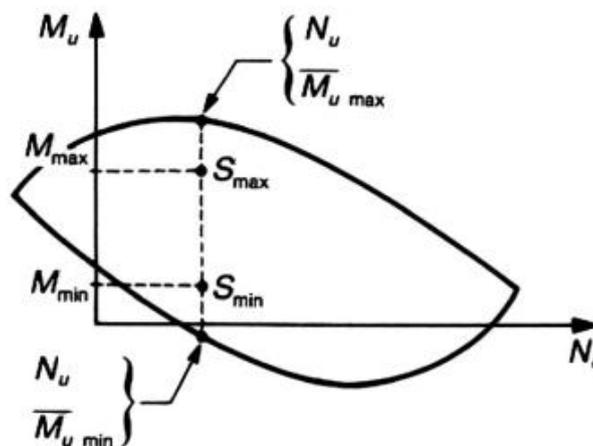


Fig. 06 Courbe d'interaction (N,M) à l'ELU

Une sollicitation quelconque $S (Nu, Mu)$ est représentée par un point S dans le plan d'axes Nu et Mu . Ce point S doit se situer à l'intérieur de la courbe d'interaction (figure 06) qui est

l'ensemble des points $\overline{S_u}(\overline{N_u}, \overline{M_u})$. Cette courbe est tracée à partir des pivots A, B, C et A', B', C'. En partant des déformations limites, on peut remonter aux contraintes par l'intermédiaire des diagrammes contraintes-déformations de calcul et de déterminer les sollicitations $\overline{S_u}(\overline{N_u}, \overline{M_u})$, qu'équilibrent ces contraintes.

En pratique, il ne faut pas calculer la courbe d'interaction point par point. Compte tenu de la convexité du domaine, il suffit de déterminer les deux points d'intersection de cette courbe avec la verticale passant par S et de vérifier que S est bien entre ces deux points

5. Mise en équations du problème

Considérons l'exemple de la poutre représentée dans la figure 07 qui est soumise seulement à un moment fléchissant positif. Il est clair qu'il n'y a aucun risque que la borne inférieure $\overline{M_{umin}}$ ne soit franchie. Il faut vérifier seulement la condition :

$$M_u \leq \overline{M_{umax}}$$

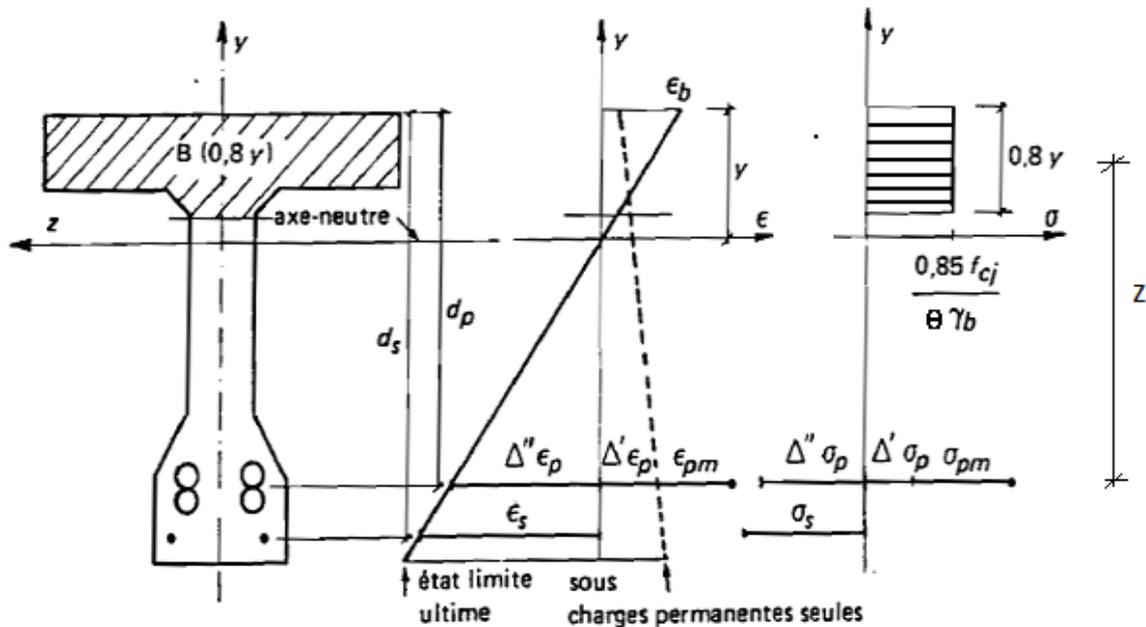


Fig. 07 Equilibre de la section à l'ELU

L'équilibre de l'effort normal s'écrit:

$$N_u = B_c \frac{0.85 f_{cj}}{\theta \gamma_b} - A_p \Delta \sigma_p - A_s \sigma_s$$

$$\overline{M_{uM}} = B_c \frac{0.85 f_{cj}}{\theta \gamma_b} z - (d_s - d_p) \sigma_s A_s$$

z est le bras de levier de la force de compression par rapport au point de passage de l'effort de précontrainte.

En exploitant l'hypothèse des sections planes et en utilisant la propriété de similitude des triangles à partir du diagramme de déformation de la figure 107, on peut écrire

$$\frac{\Delta'' \varepsilon_p}{\varepsilon_b} = \frac{d_p - y}{y}$$

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_b} = \frac{d_s - y}{y}$$

Les équations traduisant le comportement de l'acier ;

Pour les armatures passives :

$$\sigma_s = g(\varepsilon_s)$$

Pour les armatures actives :

$$\Delta \sigma_p = f(\varepsilon_{pm} + \Delta' \varepsilon_p + \Delta'' \varepsilon_p) - f(\varepsilon_{pm})$$

Nous considérons qu'il y a six équations à sept inconnues qui sont : $\Delta \sigma_p$, σ_s , ε_s , ε_b , $\Delta'' \varepsilon_p$, $\overline{M_{um}}$, y :

Comme première approximation, en partant de

- Soit $\varepsilon_b = \varepsilon_{bu} = 3.5 \times 10^{-3}$
- Soit $\varepsilon_s = \varepsilon_{su} = 10 \times 10^{-3}$

On aura sept équations à sept inconnues. Le moment ultime résistant sera donc défini par approximations successives et on pourra le comparer au moment sollicitant, soit : $M_u \leq \overline{M_{um}}$, sinon la section sera redimensionnée.

2. Autres états limites ultimes (BPEL, Art. 6,4-6,5)

L'ELU de résistance n'est pas le seul à considérer pour vérifier la sécurité de l'ouvrage. Par exemple pour les pièces élancées, la vérification doit se faire à la stabilité au flambement, déversement, voilement et cloquage. C'est un état de stabilité de forme. Par ailleurs, lorsque l'ouvrage est sollicité par une variation intense et répétée de contraintes, on doit effectuer une justification à l'état limite de fatigue.