3.1- Entrées canoniques

3.1.1- Echelon unité

C'est une fonction nulle pour $t < 0$ et constante et égale à 1 pour $0 < t < \infty$ (fig. 3-1). Cette fonction est appelée quelquefois $u(t)$ (unité). Elle n'est pas définie pour $t = 0$ puisqu'il y a discontinuité à cet endroit.

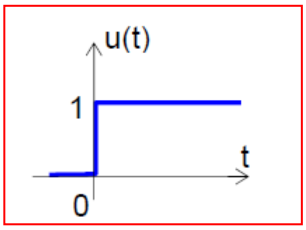

Fig. 3–1 : Fonction Echelon

Sa transformée de Laplace est : $U(p) = \frac{1}{p}$

3.1.2- Echelon de vitesse (rampe unité)

C'est une fonction nulle pour $t<0$ et qui varie linéairement avec t pour $t \geq 0$ (fig. 3-2). On l'exprime parfois sous la forme $r(t) = t \,.\, u(t)$.

Cette fonction est appelée échelon de vitesse ou rampe, car sa vitesse de variation est constante et égale à 1.

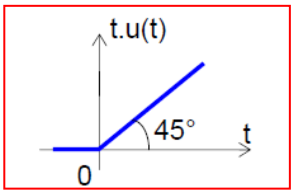

Fig. 3–2 : Fonction Rampe

On vérifie aisément que sa transformée de Laplace est égale à : $R(p) = \frac{1}{p^2}$

En effet :

$$\mathscr{L}\{ r(t) \} = \int_0^\infty e^{-pt} . t . dt \,, \qquad \text{on pose :} \quad u = t \qquad dv = e^{-pt}\, dt$$

$$du = dt \qquad v = \frac{e^{-pt}}{-p}$$

$$\text{Donc} \quad \mathscr{L}\{ r(t) \} = \left[f(t) \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^\infty = 0 + \frac{1}{p}\left[- \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^\infty = \frac{1}{p^2}$$

3.1.3- Echelon d'accélération

Soit $f(t)$ la fonction échelon d'accélération, définie par (voir fig. 3–3) :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{t^2}{2} u(t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

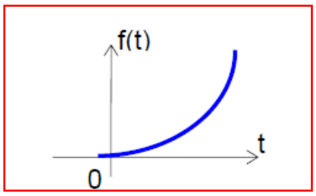

Fig. 3–3 : Fonction Accélération

$$\mathscr{L}\{\,f(t)\,\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}.\frac{t^2}{2}.\,dt\,, \qquad \text{on pose :} \quad u = \frac{t^2}{2} \qquad dv = e^{-pt}\,dt$$

$$du = t.dt \qquad v = \frac{e^{-pt}}{-p}$$

$$\text{Donc} \quad \mathscr{L}\{\,f(t)\,\} = \left[f(t)\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{p}\,.\,\mathscr{L}\{\,r(t)\,\} = \frac{1}{p^3}$$

D'où :

D’où : $F(p) = \frac{1}{p^3}$

3.1.4- Impulsion unitaire

Une impulsion est une fonction du temps de durée très courte mais dont l'amplitude est suffisamment grande pour que l'effet en soit sensible. L'impulsion est dite unitaire si la surface est égale à 1. On la note $\delta(t)$
(fig. 3–4).

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \leq 0 \quad \text{et} \quad t \geq \tau \\ \lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{1}{\tau} & \text{pour} \quad 0 < t < \tau \end{cases}$$

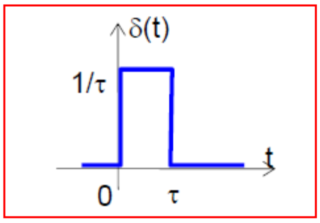

Fig. 3–4 : Fonction Impulsion $\delta(t)$

Toutes les impulsions, dont la durée égale numériquement l'inverse de l'amplitude, sont unitaires si cette durée tend vers zéro.
Pour t = 0, l'amplitude est théoriquement infinie.

$\delta(t)$ est définie par : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).\,dt = 1$ (ce qui est équivalent à la surface unitaire)

Elle est appelée aussi **impulsion de DIRAC**. $E(p) = 1$

3.1.5- Entrée harmonique

Elle est définie par (Voir fig. 3–5): $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ A\sin(\omega t + \varphi) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$

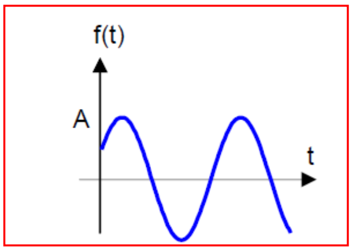

Fig. 3–5 : Signal harmonique

Sa transformée de Laplace est :

$$F(p) = \frac{p.\sin\varphi + \omega.\cos\varphi}{p^2 + \omega^2}$$

3.2.1- Réponse du système à une impulsion unitaire : réponse impulsionnelle

Soit un système de fonction de transfert H(p).
Appliquons sur son entrée une fonction, $e(t) = \delta(t)$, c'est-à-dire une impulsion unitaire.
Sa sortie sera donnée par : S(p) = H(p) . E(p)

Or : E(p) = 1, puisque $\{\ \delta(t)\ \} = 1$.
Donc la transformée de Laplace S(p) de la sortie correspond exactement à la fonction de transfert H(p).

S(p) = H(p)

C'est aussi une autre définition de la fonction de transfert. On voit donc qu'une méthode pour connaître H(p) est de mesurer la réponse à une impulsion unité.
La Fig. 3–6 montre deux types de réponses impulsionnelles (selon la nature du système à exciter).

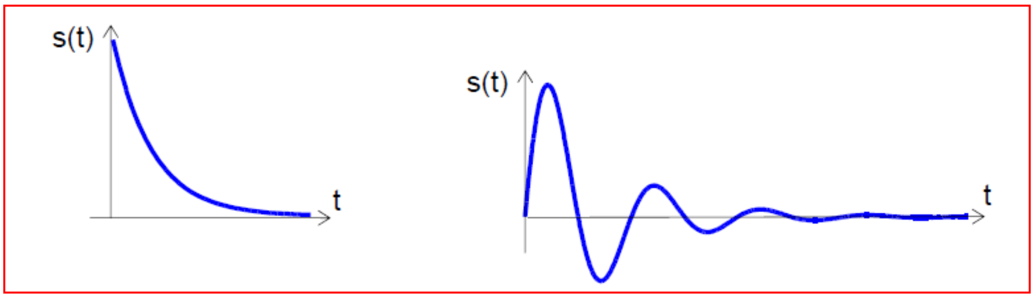

Fig. 3–6 : Exemples de réponses impulsionnelles

Du point de vue pratique, cette méthode présente quelques difficultés, car il est pratiquement impossible de réaliser physiquement une entrée $\delta(t)$. On se contente, en général, d'une impulsion de durée aussi courte que possible mais finie, d'où une certaine imprécision. Après avoir envoyé cette entrée $\delta(t)$ approchée, on doit enregistrer, en fonction du temps, la réponse s(t). Ce qui donne une courbe qu'il faut ensuite interpréter. Si on veut l'expression mathématique de la fonction de transfert, on approche cette courbe par des morceaux de courbes correspondant à des fonctions connues. Il faut alors prendre la transformée de ces fonctions du temps pour obtenir la fonction de transfert.

3.2.2- Réponse du système à un échelon unité : réponse indicielle

Pour pallier aux inconvénients de la réponse impulsionnelle, il est plus facile, pratiquement, d'utiliser comme entrée, un échelon unité.

L'entrée du système est donc : $e(t) = u(t)$, d'où $E(p) = \frac{1}{p}$

Sa sortie est alors : $S(p) = \frac{H(p)}{p}$. C'est l'intégrale de la fonction de transfert.

Pratiquement, l'essai est très rapide, il suffit de faire passer l'entrée de 0 à une valeur constante pendant un temps (donné) T puis de cette valeur à 0, et d'enregistrer la sortie en fonction du temps.

En principe, cette sortie doit être du même type que l'entrée si le système est linéaire, c'est-à-dire qu'au bout d'un certain temps correspondant à la durée du régime transitoire, la sortie doit rester constante.

S'il en est autrement, le système n'est pas linéaire (la réciproque n'est pas forcément vraie). Donc ce test permet de savoir si on est en présence d'un système linéaire ou non. La Fig. 3–7 montre deux types de réponses indicielles (selon la nature du système à exciter).

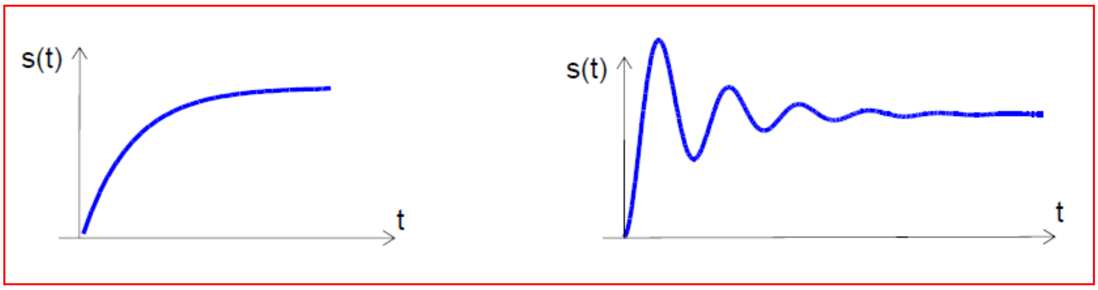

Fig. 3–7 : Exemples de réponses indicielles

3.3- Etude des systèmes du premier ordre

3.3.1- Définition

On appelle système du 1er ordre, un système régi par une équation linéaire différentielle du premier ordre telle que :

$$T.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

ou encore, un système dont la fonction de transfert est du type :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

Ces systèmes sont encore appelés **systèmes à une seule constante de temps**, ou **système à retard**.

Ils sont très nombreux en physique. En dehors des circuits RC ou RL en électricité, on peut considérer qu'un amplificateur est un système du 1er ordre. En mécanique, tous les assemblages comportant un ressort et un amortisseur sont du 1er ordre.

3.3.2- Réponse indicielle

La réponse indicielle nous renseignera sur le comportement du système en régime transitoire.

$S(p) = \frac{K}{1+Tp}E(p)$ ici $E_1(p) = \frac{1}{p}$ $S_1(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$

En consultant une table de Transformée de Laplace, on voit que l'originale $s_1(t)$ de $S_1(p)$ est :

$$s_1(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad \lim_{t \to \infty} s_1(t) = K$$

On constate donc que la sortie $s_1(t)$ (Fig. 3–9) atteint pratiquement le régime permanent au bout d'un temps qui dépend de la constante T.
Cette constante T, appelée **constante de temps**, caractérise donc la **rapidité du système** à atteindre son régime permanent.

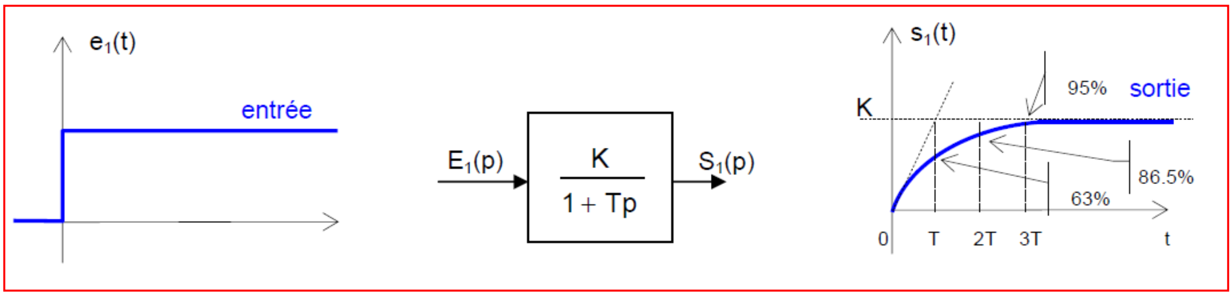

Fig. 3–9 : Réponse indicielle d'un système du 1er Ordre

La pente de la tangente à l'origine est K/T, plus le système a une constante de temps faible, plus il "répond" vite.
Au bout d'un temps t = T, la sortie est $s_1(T) = K(1 - 1/e)$, ce qui représente environ 63% de K.

Temps de réponse : Nous avons vu que le temps de réponse était le temps au bout duquel la sortie avait atteint son régime permanent à 5% près. Dans le cas du système du premier ordre, ce temps correspond à **3T** environ.

3.3.3- Réponse à une rampe (échelon de vitesse)

Dans ce cas, nous avons :

$$e_2(t) = t.u(t)$$

$$E_2(p) = \frac{1}{p^2}$$

Où u(t) : échelon unitaire

Donc

$$S_2(p) = \frac{K}{p^2(1 + Tp)} = \frac{S_1(p)}{p}$$

Avec $S_1(p)$: transformée de la réponse indicielle d'un 1er Ordre.

D'où : $$S_2(t) = \int_0^t S_1(t)dt = \int_0^t K(1 - e^{-\frac{t}{T}})dt$$

$$S_2(t) = K\left\{t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})\right\}$$

La figure 3–10 donne la réponse à une rampe d'un système du 1er Ordre.

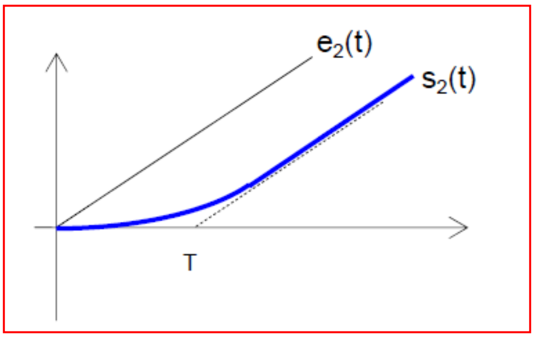

Fig. 3–10 : Réponse d'un système du 1er Ordre à une rampe (tracée pour K=1)

En régime permanent :

$$t \to \infty, \text{ alors } s_2(t) = K(t - T)$$

On met, ainsi, en évidence le retard T qui constitue une erreur permanente.
Dans le cas où K=1, l'erreur T entre l'entrée et la sortie est constante en fonction du temps. C'est l'erreur de "traînage".
Donc, un système du 1^er ordre suit les variations linéaires de l'entrée avec un certain retard, d'où leur nom de système à retard.

3.3.4- Réponse à une impulsion unité

Dans ce cas, nous avons :

$$e_3(t) = \delta(t)$$

$$E_3(p) = 1$$

Où $\delta(t)$: impulsion unitaire.

Donc $S_3(p) = \frac{K}{1+Tp} = \frac{K}{T}\frac{1}{p+\frac{1}{T}}$ d'où : $S_3(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$

On met ainsi en évidence la constante de temps sur le graphique (Fig. 3–11).

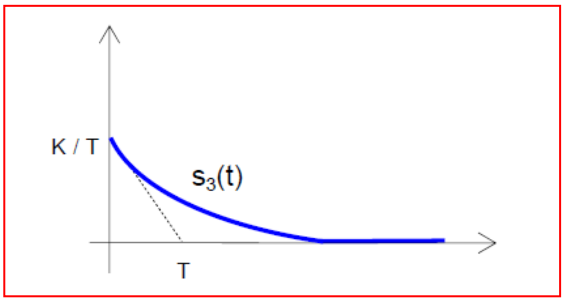

Fig. 3–11 : Réponse impulsionnnelle d'un système du 1^er Ordre

3.4- Etude des systèmes du second ordre

3.4.1- Définition

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations linéaires différentielles à coefficients constants du 2^ème ordre, du type :

$$B_2\frac{d^2s(t)}{dt^2}+B_1\frac{ds(t)}{dt}+B_0s(t)=\begin{cases}A_0e(t)\\ A_0\int_0^t e(t)dt\\ A_0\frac{de(t)}{dt}\end{cases}$$

Leurs fonctions de transfert seront du type :

$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{A_0}{B_2p^2+B_1p+B_0}.\begin{cases}1\\ \frac{1}{p}\\ p\end{cases}$$

Le comportement du système sera extrêmement différent suivant que le degré qui figure au dénominateur aura des racines réelles ou imaginaires.
On introduit les paramètres suivants :

Gain statique : $K=\frac{A_0}{B_0}$ C'est le rapport $\frac{s(t)}{e(t)}$ en régime statique $(\frac{ds(t)}{dt}=0;\ \frac{d^2s(t)}{dt^2}=0)$

Pulsation propre non amortie : $\omega_n=\sqrt{\frac{B_0}{B_2}}\ \mathrm{rad/s}$

Facteur d'amortissement (sans dimension) : $\xi=\frac{B_1}{2\sqrt{B_0B_1}}$ $\xi=1$(valeur critique)

Constante de temps : $T=\frac{1}{\xi\omega_n}$

La fonction de transfert s'écrit en fonction des paramètres ainsi définis :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2}.\begin{cases}1\\ \frac{1}{p}\\ p\end{cases}$$

Prenons le cas de $H(p)=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2}$ et étudions les différentes réponses.

Le comportement dynamique d'un tel système dépend de la valeur des deux constantes ω_n et surtout de ξ.

- Si $\xi>\mathbf{1}$: Le polynôme est décomposable, le dénominateur a 2 racines réelles ($-p_1$ et $-p_2$) : $-p_1=-\omega_n(\xi+\sqrt{\xi^2-1})$

$$-p_1=-\omega_n(\xi-\sqrt{\xi^2-1})$$

- Si $\mathbf{0}<\xi<1$: Le polynôme n'est pas décomposable, le dénominateur a 2 racines complexes Conjuguées ($(-p_0{}^-$ et $-p_0^{*-}$) (fig. 3-12) :

$$-p_0{}^-=-\omega_n(\xi+j\sqrt{1-\xi^2})$$

$$-\bar{p}_0^{*} = -\omega_n(\xi - j\sqrt{1-\xi^2})$$

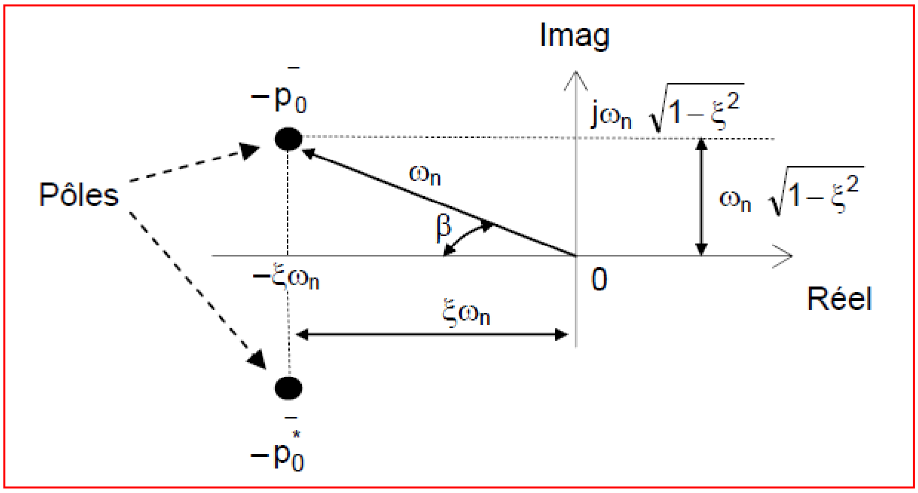

Fig. 3–12 : Relations entre les paramètres d'un système du 2nd ordre dans le plan Complexe

Remarque : $\xi = \cos\beta = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n}$: coefficient d'amortissement

- Si $\xi = \mathbf{1}$: Les 2 racines sont égales ($-p_{1,2}$):

$$-p_{1,2} = -\omega_n \qquad \rightarrow \qquad p_{1,2} = \omega_n = 1/\tau$$

3.4.2- Réponse à un échelon unité

$E(p) = \frac{1}{p} \qquad S(p) = \frac{K}{P}\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2}$

- Si $\mathbf{0} < \xi < 1$: Les 2 racines imaginaires conduisent à une solution oscillatoire amortie.

Le régime permanent est ici s(t)=K

$$(\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = K)$$

- Si $\xi = \mathbf{1}$: Les 2 racines (pôles) sont égales : système amorti critique.
- Si $\xi > 1$: Les 2 racines (pôles) sont négatives et inégales : système apériodique.

La Figure 3–13 donne les réponses indicielles d'un système du second ordre en fonction du coefficient d'amortissement ξ.

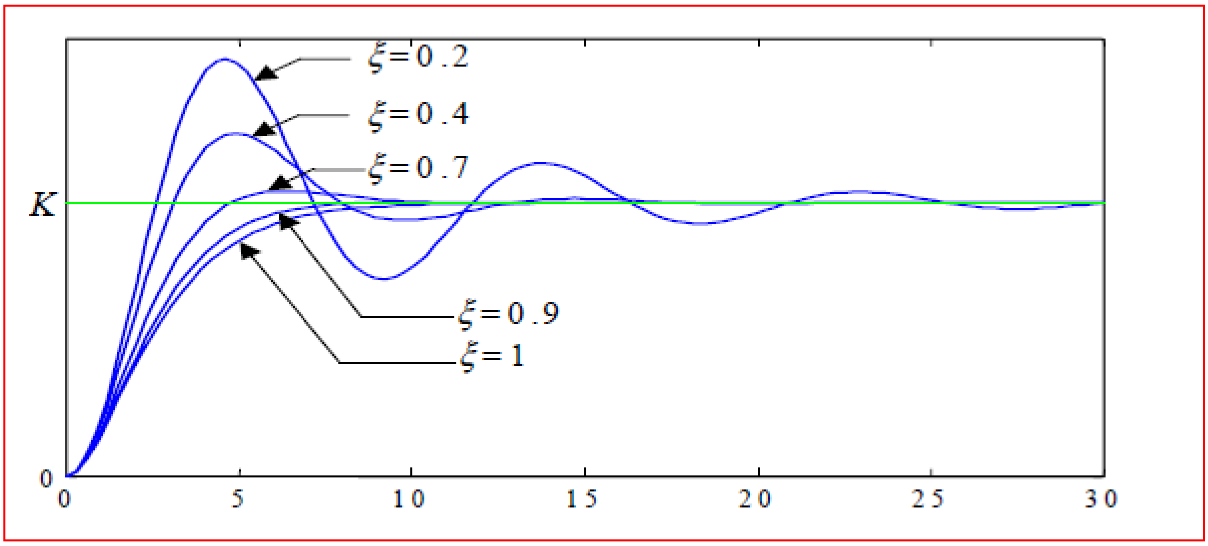

Fig. 3–13 : Réponses indicielles d'un système du 2ème ordre en fonction de ξ

3.4.3- Réponse à une impulsion unité

$E(p) = 1$ $\qquad S(p) = \dfrac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$

- Si $0 < \xi < 1$: $\quad s(t) = K\left(\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}\right)\right) \qquad t \geq 0$
- Si $\xi = 1$: $\quad s(t) = K\left(\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}\right) \qquad t \geq 0$
- Si $\xi > 1$: $\quad s(t) = K\dfrac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(e^{-\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t} - e^{-\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}\right) \qquad t \geq 0$

La Figure 3–14 donne les réponses impulsionnelles d'un système du deuxième ordre en fonction du coefficient d'amortissement ξ.

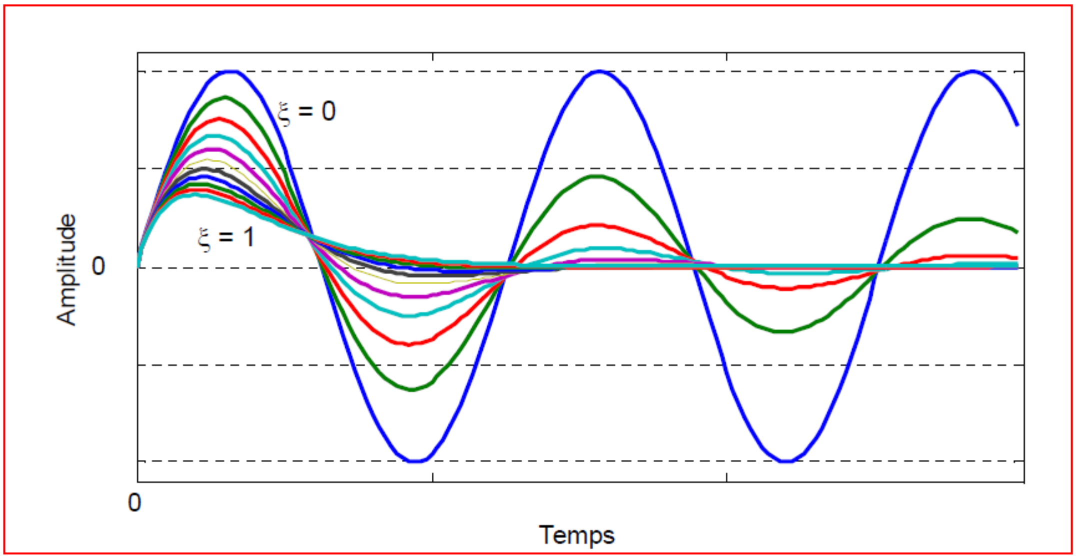

Fig. 3–14 : Réponses impulsionnelles d'un système du 2nd ordre en fonction de ξ

On définit parfois $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

Le pseudo-période des oscillations est donnée par :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

On montre que le premier dépassement est obtenu pour :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_p}{2}$$

Le premier dépassement pour cent vaut :

$$D_{1\%} = 100\ e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Le $k^{ème}$ dépassement pour cent vaut :

$$D_{k1\%} = 100\ e^{\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Système oscillatoire ($0 < \xi < 1$) : réponse indicielle

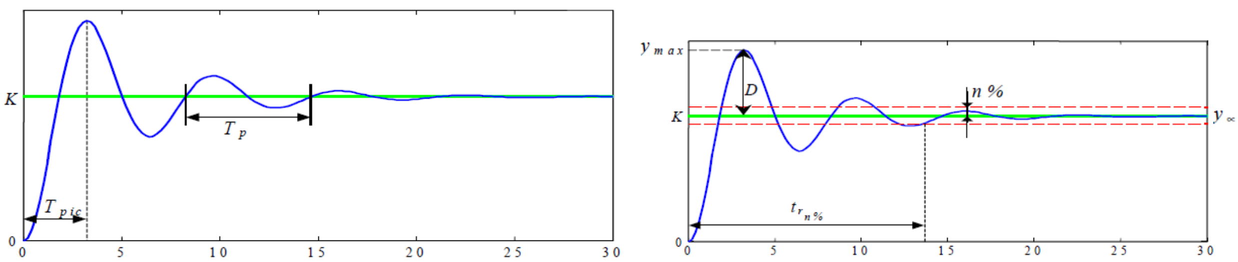

Fig. 3–15 : Réponses impulsionnelles d'un système du 2ème ordre

Temps de réponse à *n*% ($t_{rn\%}$) :C'est le temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $\pm n\%$ de sa valeur finale

$$t_{rn\%} \approx \frac{1}{\xi\omega_n} ln\frac{100}{n} \qquad (\xi < 0.7)$$

Le temps de montée ***tm*** est le temps pendant laquelle s(t) passe de $0.1S_p(t)$ à $0.9S_p(t)$

$$t_m = \frac{T_p}{2}\left(1-\frac{\beta}{\pi}\right);\ \beta = arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

Remarque : Si la constante est **faible**, alors le temps de réponse est faible et le système est **rapide**. Si la constante est **élevée**, le système est **lent**.

Temps d'établissement t_e : Temps pour lequel la réponse atteint pour la première fois la valeur maximale. $t_e = \frac{4}{\xi\omega_n}$